Lignes de plus grande pente.

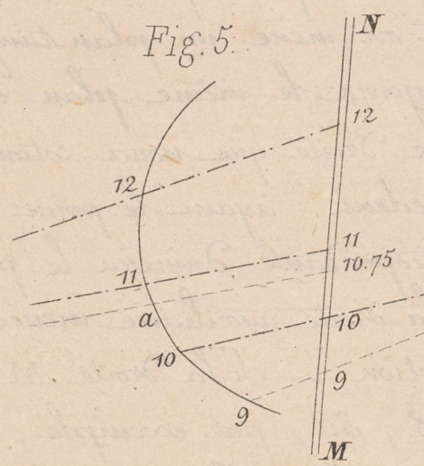
Une telle ligne a pour tangente en chacun de ses points la ligne de plus grande pente du plan tangent en ce point, c'est donc la trajectoire orthogonale des lignes de niveau.

Quand la surface est à courbures opposées et que le plan tangent est horizontal, on a ce que les topographes appellent un col.

Plan tangent à une courbe cotée et passant par une droite donnée.

Joignons les points de même cote, sur la droite MN et sur la courbe ; nous obtenons ainsi des horizontales s'appuyant sur la droite et sur la courbe, ou les génératrices d'un conoïde dont le plan directeur est le plan horizontal.

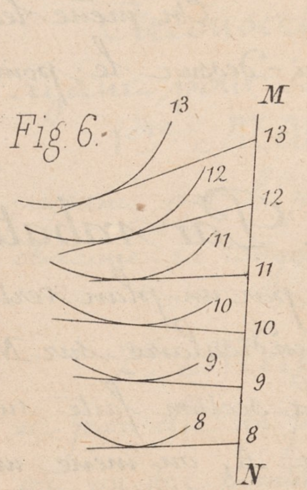
Fig. 5.



Mais d'après une remarque faite à propos du conoïde droit, le point de tangence du plan cherché est sur une génératrice singulière, c'est-à-dire sur une génératrice telle que la génératrice infiniment voisine lui est parallèle.

Il suffira de voir pour quelle cote 2 génératrices voisines seront sensiblement parallèles, et de prendre l'intersection de la génératrice correspondante et de la courbe. Ici, la cote est 10.75 et le point a est approximativement le point cherché.

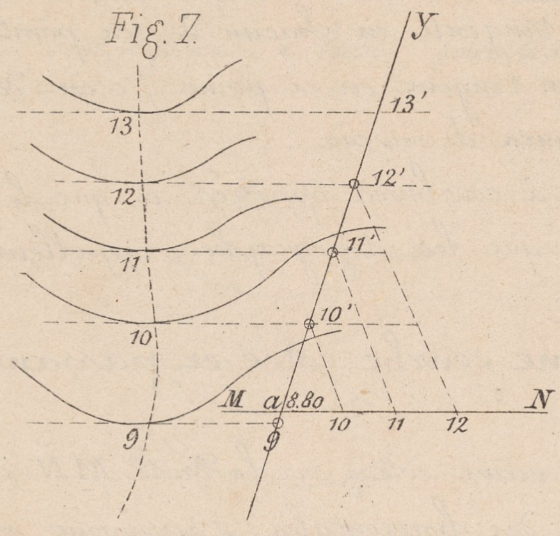
Fig. 6.



Même solution s'il s'agit non plus de courbe, mais de surfaces topographiques.

Pour avoir le plan tangent, on mène par les points de la droite des tangentes aux courbes de même niveau,

Fig. 7



et on cherche parmi ces horizontales celles pour lesquelles on a sensiblement des droites parallèles. — Ici les droites sont parallèles entre 9 et 10

Quand la droite donnée est horizontale, cette construction n'est plus applicable. On mène alors (fig. 7) des tangentes aux courbes de niveau, parallèles à la ligne donnée ; elles déterminent un cylindre circonscrit. Le plan tangent mené à ce cylindre sera tangent à la surface. Pour le déterminer, coupons le cylindre par un plan vertical XY ; — il coupe la droite en un point a, et le plan tangent suivant une droite tangente à l'intersection. Or, quelle que soit la droite qu'on mène par a, si par cette droite on mène un plan tangent à la courbe d'intersection, on aura toujours le même plan de contact.

Menons alors par a une droite que nous cotons, et le problème est ramené au cas précédent : ayant le point de contact sur la courbe, la génératrice correspondante donnera le point de contact sur la surface. — Ici la droite auxiliaire menée par a a été prise ayant MN pour projection. — Si la droite MN et par suite si le point a, a pour cote 8, 80, par exemple, on tracera, comme nous l'avons indiqué dans la méthode des projections cotées, la droite aN cotée 10, 11 . . . . On mène les droites 10.10' 11-11' . . . . et on cherche comme ci-dessus le point pour lequel elles sont parallèles.

2ème Méthode — Par rabattement.

On coupe le cylindre précédent par un plan vertical X, Y, dont on prend, de préférence, la trace perpendiculaire sur MN. On rabat en 9', 10', 11', 12' . . . . et en A, la section faite sur ce cylindre et sur la droite MN. Par le point A, on mène une tangente A, T, à cette section, et l'on a en P, le point de contact, donnant en

P_1p la génératrice de contact. — Le point p où cette génératrice rencontre la ligne 9 – 10 – 11 – 12 . . . . de contact du cylindre auxiliaire et de la surface, donne le point de contact du plan tangent cherché. Son échelle de pente s'obtiendra facilement en RS.

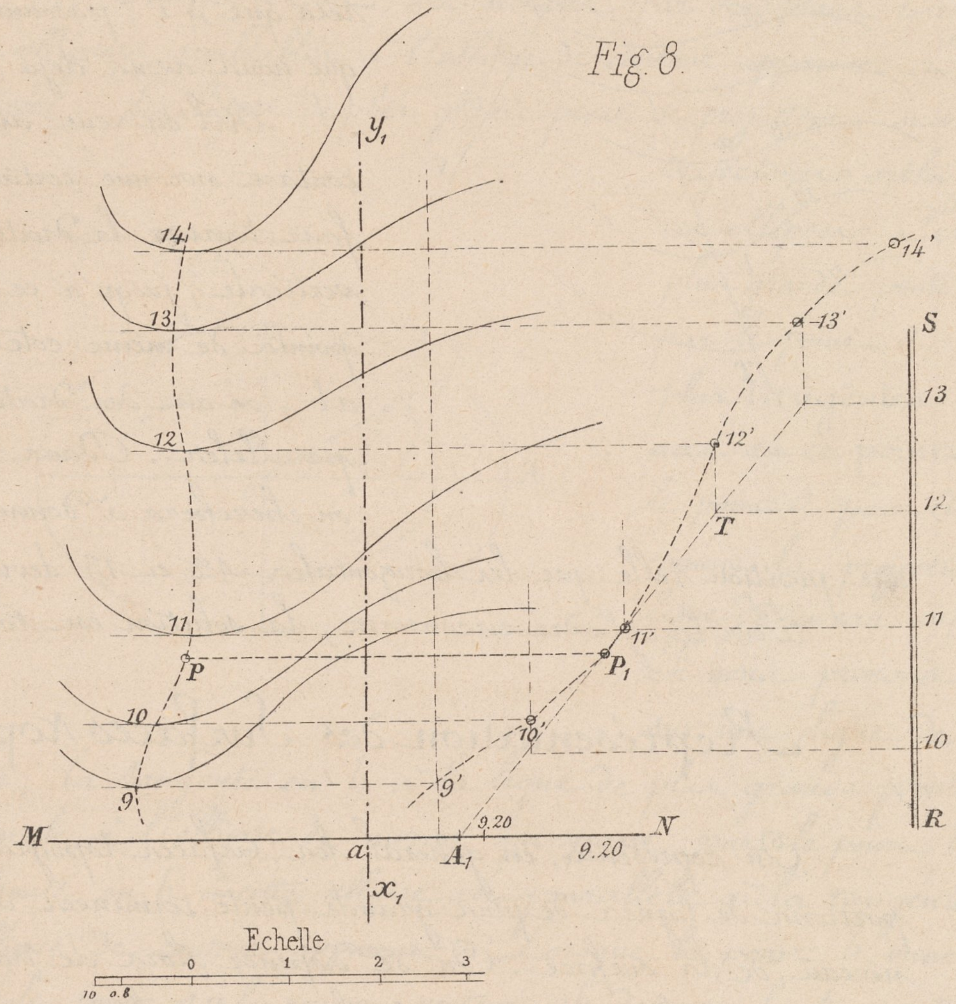


Fig. 8.

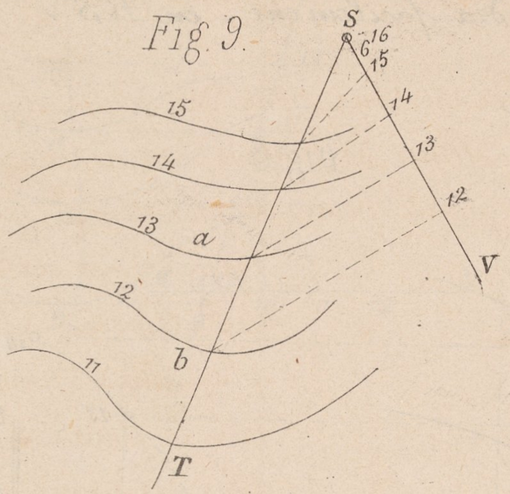
Circonscrire à une surface topographique un cône ayant pour sommet, un point donné S.

1ère Méthode. — On peut couper par des plans verticaux passant par le point S, rabattre les sections et déterminer dans chacune la tangente à la courbe de section.

2e Méthode. — On peut mener par S une droite quelconque et par elle un plan tangent à la surface ; le point de contact est un des points cherchés ; et en faisant varier la droite, on a la courbe de contact.

3e Méthode. — Prenons une seule droite auxiliaire SV. Cotons cette droite, et par elle menons des plans tangents aux diverses sections que l'on fait par des plans verticaux tels que ST, passant par S, problème que nous avons déjà traité.

Fig. 9.



Si l'on veut avoir un point de contact sur une certaine zône ab, on fait tourner la droite trace de la section verticale, jusqu'à ce qu'en joignant les points de même cote entre les limites ab, on ait des droites sensiblement parallèles. Dans le cas de la figure, on cherchera à donner au plan vertical une position telle que les horizontales 12 et 13 deviennent parallèles.

Pour le cylindre circonscrit, la solution est tout-à-fait analogue.

Représentation des Surfaces topographiques.

On représente, en général les surfaces topographiques par des portions de lignes de plus grande pente terminées aux lignes de niveau de la surface. On se dispense alors de tracer les lignes de niveau ; et les segments de lignes de plus grande pente constituent des hachures dont l'écartement, aussi bien que la longueur, indique la pente du terrain.

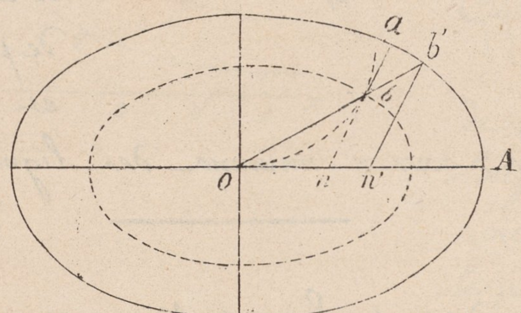
La ligne d'écoulement des eaux à la surface d'un terrain n'est pas la ligne de plus grande pente ; une molécule liquide se meut d'abord tangentiellement à un élément de ligne de plus grande pente ; mais l'instant d'après, la vitesse acquise l'empêche de continuer la direction de la ligne de plus grande pente.

A partir d'un point, il peut y avoir sur un terrain une infinité de lignes de plus grande pente. Ceci se présente, par exemple, lorsque nous considérons le sommet d'une surface de révolution dont l'axe est vertical. En général, lorsqu'une surface admet un plan tangent horizontal, à partir du point de contact, il y a une infinité de lignes de plus grande pente.

Examinons les lignes de plus grande pente dans 2 surfaces différentes :

1°. Ellipsoïde. — Les sections par des plans horizontaux sont des ellipses semblables à l'ellipse de contour apparent et semblablement placées. Les lignes de plus grande pente se projettent suivant des trajectoires orthogonales de ces ellipses. Ces lignes de plus grande pente passent toutes par le point O, et sont de plus tangentes au grand axe en ce point. En effet, le point O peut être considéré comme la projection d'une ligne de niveau infiniment petite. Si nous prenons un point b sur une ligne de plus grande

Fig. 10.



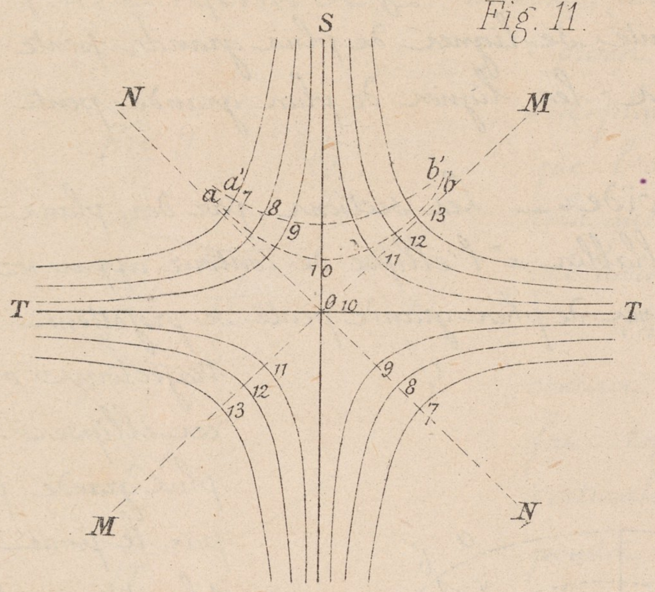
pente, la tangente en b à la ligne de plus grande pente est la normale à l'ellipse de niveau qui passe par le point b. Or, la tangente en b à cette ellipse est parallèle à la tangente en b' à l'ellipse de contour apparent. Lorsque le point b vient se confondre avec le point o, le rayon vecteur ob devient la tangente à la ligne de plus grande pente. Cette tangente est encore parallèle à la normale en b' à l'ellipse du contour apparent. Le point b', à la limite, est donc un point tel que la normale b'n' passe par le centre. — b' a donc pour limite A, et la tangente a pour limite le grand axe OA.

La tangente en O à l'une quelconque des lignes de plus grande pente Oba, est donc confondue avec le grand axe de l'ellipse de contour apparent.

2°. Surface du 2^d degré à courbures opposées.

Les lignes de niveau ab — a'b' . . . se projettent suivant des

Fig. 11.



hyperboles semblables et semblablement placées, parmi lesquelles les asymptotes OS et OT. Dans ce cas, les lignes de plus grande pente sont encore des trajectoires orthogonales de ces hyperboles. Elles s'éloignent du point O. Mais il existe encore 2 lignes de plus grande pente, OM et ON passant par le point O. — Ce sont les axes communs des lignes de niveau.

Application des surfaces topographiques à la représentation des Tables.

Table à simple entrée. — Lorsqu'on a une relation entre deux quantités $y = \log(x)$, par exemple, on la représente au moyen d'une courbe ou d'une droite cotée. Donnant à x diverses valeurs, les valeurs de y seront les logarithmes des valeurs correspondantes de x. Au lieu de tracer la courbe $y = \log.(x)$ nous porterons sur une droite, à partir d'un point, des longueurs proportionnelles aux logarithmes des nombres, et nous écrirons les nombres en regard des divisions. La droite ainsi graduée représente la projection de la courbe $y = \log.(x)$ sur une parallèle à l'axe des y.

Table à double entrée : — La même chose se répète pour une table à double entrée. La table de multiplication sera représentée par

$$z = xy.$$

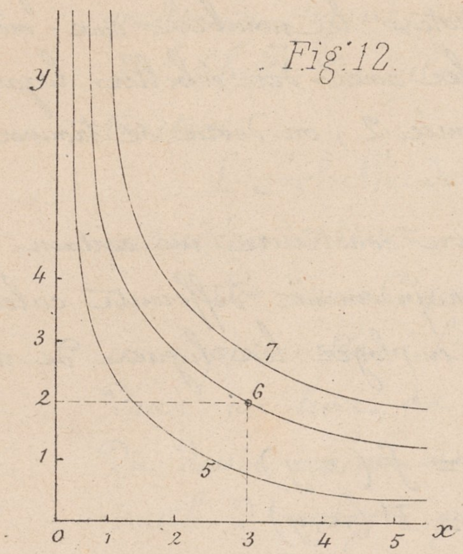


Fig. 12

En considérant x, y, z, comme les coordonnées d'un point de l'espace, la table à double entrée est représentée par la surface $z = xy$, c'est-à-dire par un paraboloïde hyperbolique.

Les lignes de niveau sont représentées par l'équation :

$$xy = \text{constante}.$$

Ce sont des hyperboles équilatères.

Sur les asymptotes ox et oy de ces hyperboles nous prendrons des longueurs égales, représentant chacune l'unité : si nous considérons alors le point d'abscisse 3 et d'ordonnée 2, il devra se trouver sur l'hyperbole cotée 6, c'est-à-dire sur l'hyperbole dont la cote est le produit 2×3.

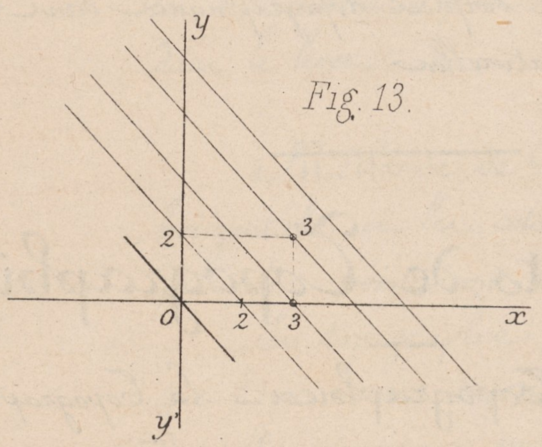


Fig. 13.

Mais on peut au préalable, faire ce que l'on nomme une anamorphose. En prenant les logarithmes

$$\log z = \log x + \log. y$$

$$\text{ou} \quad \log z = x' + y'.$$

En posant : $x' = \log. x$

$$y' = \log. y,$$

Nous connaîtrons facilement le logarithme du produit connaissant les logarithmes des facteurs. Il suffit en effet de construire une série de droites parallèles à la bissectrice de l'angle $x\,oy'$.

Étant alors donnés les logarithmes des deux facteurs d'un produit, nous prendrons respectivement sur les axes ox et oy des longueurs proportionnelles à ces logarithmes et le point correspondant sera sur une certaine parallèle dont la cote indiquera le logarithme du produit. Mais au lieu de coter les droites au moyen des logarithmes, nous pourrons prendre pour cotes les nombres eux-mêmes.

En prenant alors sur les axes des échelles logarithmiques, le point d'abscisse 3 et d'ordonnée 2, on devra se trouver sur la droite cotée 6.

C'est ainsi qu'on a pu construire un certain nombre d'abaques permettant d'opérer rapidement différents calculs.

Enfin, nous pouvons employer les lignes de niveau pour la résolution des équations :

$$z = f(x, y)$$
$$z = F'(x, y)$$

Ces deux surfaces donneront deux systèmes de lignes de niveau que nous rapporterons aux mêmes axes. — Les coordonnées des points de rencontre des lignes de niveau de même cote sont les valeurs de x et de y auxquelles correspondent pour Z et z des solutions communes.

On utilise encore les surfaces topographiques dans la représentation de certaines lois naturelles.

Éléments de Topographie.

Définition de la Topographie. — La Topographie est l'art de construire et de dessiner, au moyen de certaines conventions, une représentation exacte d'une portion de la surface de la terre avec tous les objets naturels ou artificiels qui s'y rencontrent. Le dessin topographique est une figure semblable à la projection horizontale du terrain.

Échelle. — L'échelle est le rapport constant qui existe entre les longueurs horizontales sur le terrain et leurs homologues sur le plan.