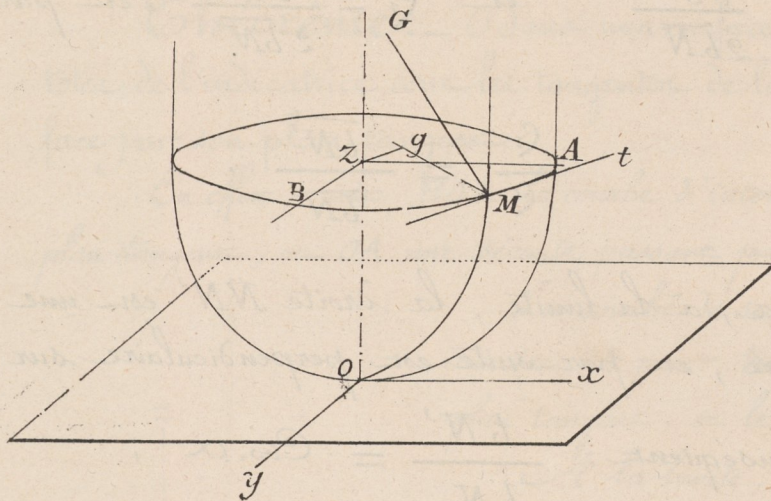


## Lignes de Courbure.

On donne le nom de *Lignes de courbure* d'une surface aux courbes tracées sur elle et telles que les normales à la surface en tous les points de ces courbes forment une surface développable, c'est-à-dire si elles à des distances au moins du 3<sup>e</sup> ordre.

Soit  $O$ , un point de la surface, et  $M$  un point infiniment voisin pris sur l'indicatrice.



La normale en  $O$ , est la droite  $OZ$ , perpendiculaire au plan de l'indicatrice.

Soit  $MG$  la normale à la surface au point  $M$ .

La projection de  $M.G$  sur le plan de l'indicatrice est perpendiculaire sur la tangente  $Mt$  à cette courbe, en la plus courte distance

des deux normales est projetée en vraie grandeur suivant la droite  $Zg$  perpendiculaire menée sur  $Mg$  par le pied  $Z$  de la normale en  $O$ .

Si le point  $M$  est un point quelconque de l'indicatrice, la distance  $Zg$  n'est pas nulle. Elle est du même ordre qu'un arc pris sur l'indicatrice. Elle est donc du 1<sup>er</sup> ordre.

Mais si l'on prend le point en  $A$  ou en  $B$ , aux sommets de l'indicatrice, les normales se rencontrent. Leur distance est infiniment petite de l'ordre des quantités négligées dans la construction de l'indicatrice, c'est-à-dire du 3<sup>e</sup>. - Dans ce cas seulement,  $M$  serait le point de la ligne de courbure cherchée infiniment voisin du point  $O$ .

Par conséquent; En chaque point de la surface il passe 2 lignes de courbure tangentes aux sections principales, c'est-à-dire tangentes aux deux axes de l'indicatrice.

Il existe donc deux séries de lignes de courbure. Les unes sont les trajectoires orthogonales des autres; et par conséquent, la connaissance



des premières entraîne celle des secondes.

S'il existe des ombilics, c'est-à-dire des points pour lesquels l'indicatrice est un cercle, dans ce cas, deux normales infiniment voisines se rencontrent toujours, et l'on y trouve des directions de lignes de courbure dans tous les sens. — En ces points les directions des lignes de courbure sont indéterminées.

**Lignes de courbure des surfaces développables.**  
 — **Nature de l'indicatrice.** — Sur ces surfaces, les lignes de courbure de la première série sont les génératrices de la surface, puisque les normales le long des génératrices forment un plan. Les autres sont les trajectoires orthogonales des premières, c'est-à-dire les développantes de l'arête de rebroussement.

**Cylindre.** Les lignes de courbure sont les génératrices et les sections droites du cylindre.

**Cône.** Ce sont les génératrices et les sections faites dans le cône par des sphères ayant leurs centres au sommet du cône.

Pour les cônes, les cylindres et les surfaces développables, un des rayons de courbure principaux étant infini, l'indicatrice est formée par deux lignes parallèles.

**Surfaces de révolution.** — Les lignes de courbure sont les méridiens et les parallèles. — En effet, le long des méridiens, les normales forment un plan qui est le plan méridien, et le long d'un parallèle, elles forment un cône.

En un point  $MM'$  les plans de sections principales sont donc le plan méridien, et le plan perpendiculaire mené par la normale en ce point, c'est-à-dire ayant pour trace sur le plan méridien la normale  $M'I'$ .

D'après le théorème de Meusnier, le rayon de courbure de la section méridienne étant  $M'G'$ , par exemple, je dis que celui de la 2.<sup>e</sup> section principale sera  $M'I'$ .

On aura, en effet :  $M'O'$  (rayon du parallèle) =  $M'I' \cos. \alpha$ ,



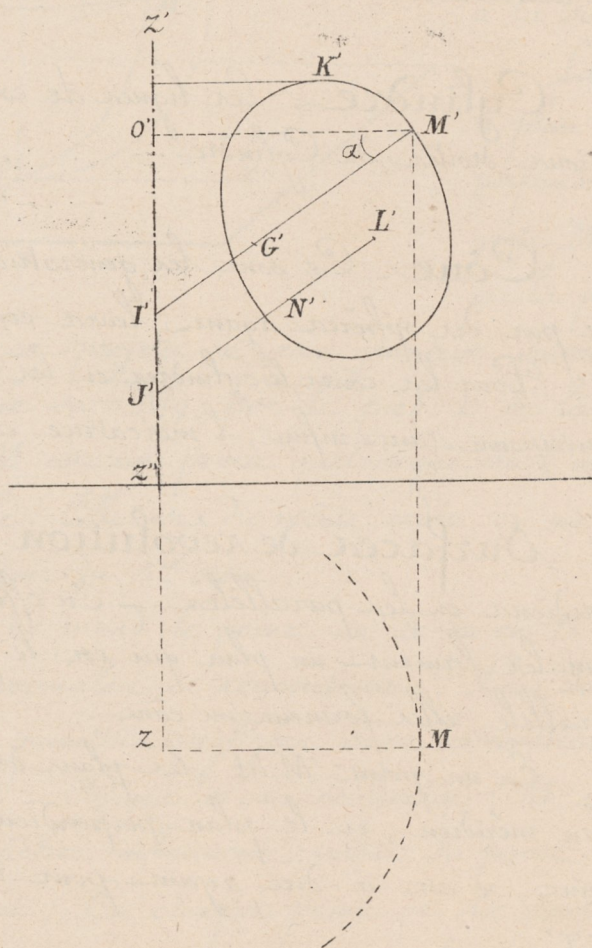
ce qui est l'application de la formule de Meusnier.

Par conséquent, dans une surface de révolution, les deux rayons de courbure principaux sont : l'un le rayon de courbure du méridien, l'autre la portion de la normale au méridien comprise entre ce méridien et l'axe.

Si le méridien a sa convexité tournée du côté de l'axe, comme cela se présente pour le point  $N'$ , les centres de courbure sont situés de part et d'autre du plan tangent. La surface est à courbures opposées et l'indicatrice est une hyperbole. - Au point  $M'$ , l'indicatrice est elliptique.

Au point  $K'$ , à tangente horizontale séparant la partie concave de la partie convexe du méridien, le 2<sup>e</sup> rayon principal est infini, puisque la normale au méridien rencontre l'axe à l'infini.

L'indicatrice se compose de 2 lignes parallèles.





## Lignes de courbure sur les surfaces enveloppes de sphères.

Toute caractéristique étant la limite de l'intersection de 2 sphères infiniment voisines, est un cercle de la sphère génératrice. Les normales à la surface aux différents points d'une caractéristique sont aussi normales à la sphère et concourent à son centre; elles forment donc un cône, et par suite, les caractéristiques forment la première série des lignes de courbure. La seconde série est formée par les trajectoires orthogonales des lignes précédentes.

**Surfaces osculatrices.** Une surface est osculatrice d'une autre en un point  $O$ , lorsqu'elle a même plan tangent en ce point, et les mêmes rayons de courbure pour toutes les sections faites par ce point.

D'après les théorèmes d'Euler et de Meunier, il suffit que les deux surfaces aient mêmes rayons principaux, c'est-à-dire même indicatrice, pour être osculatrices. Une sphère ne peut être osculatrice en un point, à moins que ce dernier ne soit un ombilic.

Il existe, au contraire, une infinité de surfaces du second degré qui peuvent être osculatrices de la surface donnée en un point  $O$ . En effet, prenons le cas où la surface est convexe. — Soient  $R$  et  $R'$  ses rayons principaux.

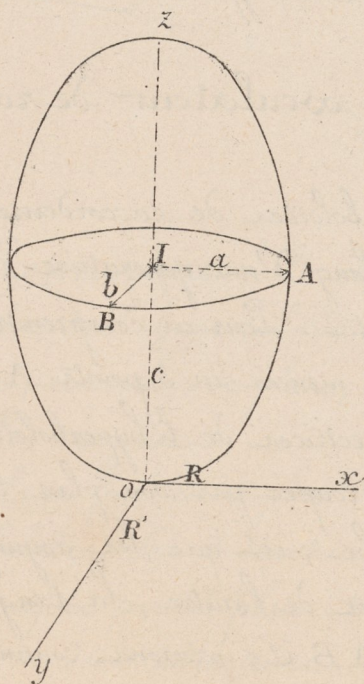
La surface osculatrice sera un Ellipsoïde.

Sur la normale prenons arbitrairement le centre de cet ellipsoïde en  $I$ , à une distance  $OI = c$ . — Soient  $a$  et  $b$  les demi-axes de son ellipse principale, parallèle au plan tangent.

L'ellipse  $xOz$  aura pour demi-axes les quantités  $c$  et  $a$ . Son rayon de courbure au sommet  $O$ , doit être égal à  $R$ , et est donné par la formule connue :

$$R = \frac{a^2}{c} \quad \text{d'où} \quad a^2 = cR \quad \text{et} \quad a = \sqrt{cR};$$

de même, le rayon de courbure en  $O$  de la section par le plan  $yOz$ , doit être égal à  $R'$  et donné par la formule :





$$R' = \frac{b^2}{c} \quad \text{d'où} \quad b^2 = cR' \quad \text{et} \quad b = \sqrt{cR'} ;$$

Les deux demi-axes  $a$  et  $b$ , sont donc déterminés.

On peut profiter de l'indétermination laissée sur  $c$  pour rendre l'Ellipsoïde de révolution.

Si l'on fait  $a = c$ , l'Ellipsoïde sera de révolution, et aura son axe parallèle à  $oy$ .

Dans ce cas, les formules deviennent:

$$a^2 = aR, \quad \text{d'où} \quad a = R \quad \text{et} \quad b = \sqrt{RR'}, \quad c = a.$$

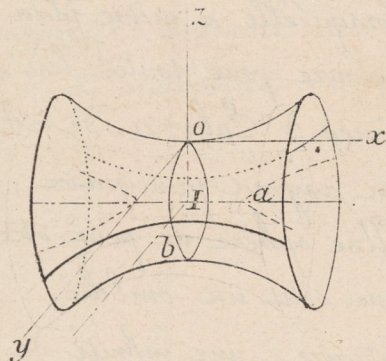
On voit facilement que l'Ellipse principale  $AB$  est semblable à l'indicatrice.

Si la surface est à courbures opposées, la surface osculatrice est un hyperboloïde.

On se donnera arbitrairement  $OI$ , distance du centre, comptée sur la normale.

On calculera le demi-axe réel  $Ib$  comme ci-dessus, — et le demi-axe imaginaire  $Ia$ .

Si le centre  $I$  eût été placé au-dessus du plan tangent  $xy$ , au lieu d'être au-dessous, l'axe réel eût été parallèle à  $ox$  et l'axe imaginaire parallèle à  $oy$ . On peut également disposer de  $OI$  pour rendre de révolution l'hyperboloïde osculateur.



### Hyperboloïde osculateur de raccordement d'une surface gauche.

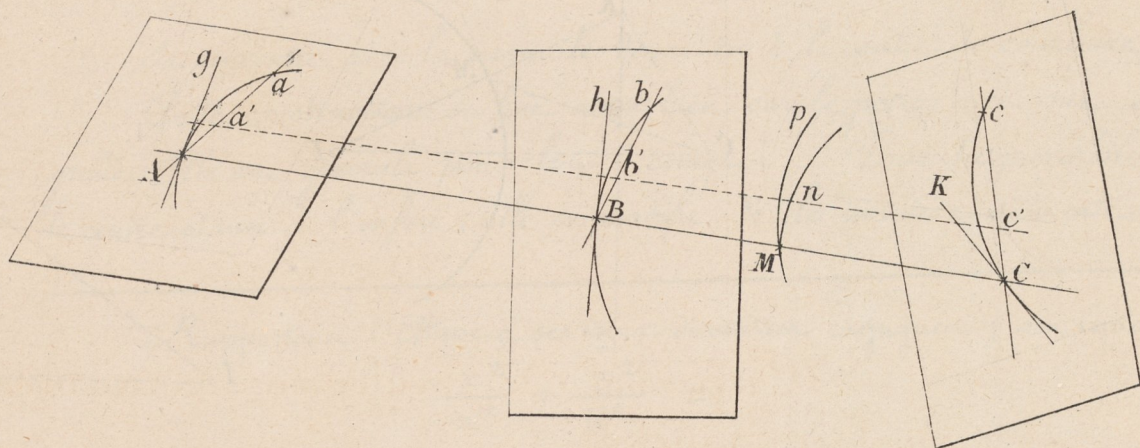
Parmi tous les hyperboloïdes de raccordement que l'on peut mener à une surface gauche le long d'une génératrice, il en est un qui sera osculateur en tout les points. Pour en comprendre la génération, rappelons que 3 tangentes à la surface menées en 3 points  $A, B, C$  de la génératrice, peuvent être prises pour directrices de l'hyperboloïde; rappelons également qu'une surface gauche est coupée par son plan tangent suivant la génératrice et suivant une courbe; et que les asymptotes de l'indicatrice sont, d'une part, la génératrice et de l'autre, la tangente à la courbe de section. Cela posé: avec 3 points  $A, B, C$ , prenons comme directrices de l'hyperboloïde



les 3 droites  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ , non tangenten aux sections faites par les 3 plans tangenten; je dirai que cet hyperboloïde ne sera pas osculateur en tous les points de la génératrice.

En effet, cet hyperboloïde aura bien en  $ABC$  deux génératrices confondues en une seule et commune avec la surface; mais la génératrice infiniment voisine  $a'b'c'$  de cet hyperboloïde ne peut être confondue avec la génératrice infiniment voisine de la surface. Par conséquent, toute section  $MN$ , faite par un plan quelconque donnera dans les deux surfaces des courbes qui n'auront pas trois points communs confondus en un seul, et par conséquent qui ne posséderont pas le même rayon de courbure.

Si, au contraire, on prend comme directrices les trois tangenten  $ag$ ,  $bh$  et  $ck$  aux sections faites par les plans tangenten, alors les 2 surfaces auront 3 génératrices communes, confondues en une seule; toutes les courbes de section auront 3 points confondus en un seul et par suite auront le même rayon de courbure.



**Remarque.** En chacun des points de la génératrice, les 2 génératrices de l'hyperboloïde sont les asymptotes de l'indicatrice de la surface, et sont, de plus, tangenten aux intersections de la surface par son plan tangent.

Si la surface est à plan directeur, l'hyperboloïde osculateur deviendra un paraboloid. Ses 2 directrices seront les tangenten aux sections faites dans la surface par 2 plans tangenten, ou, ce qui revient au même, les asymptotes de deux indicatrices.



Surface du second degré osculatrice d'une surface de révolution, le long d'un parallèle.

Soit  $M$ , un point pris sur le méridien d'une surface de révolution,  $MI$  le rayon de courbure du méridien ;  $I$  son centre de courbure. On sait que  $MI$  est un des rayons principaux, et que  $MK$ , portion de la normale au méridien comprise entre ce méridien et l'axe, est le second rayon de courbure. Cherchons une conique qui ait pour axe l'axe de la surface, et qui soit osculatrice en  $M$  au méridien, c'est-à-dire qui lui soit tangente en ayant même centre de courbure. En faisant tourner cette conique, elle engendrera une surface osculatrice de la première en tous les points du parallèle  $M$ .

Fig. 1.

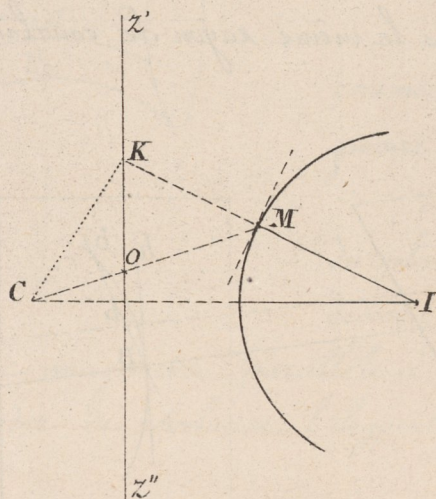
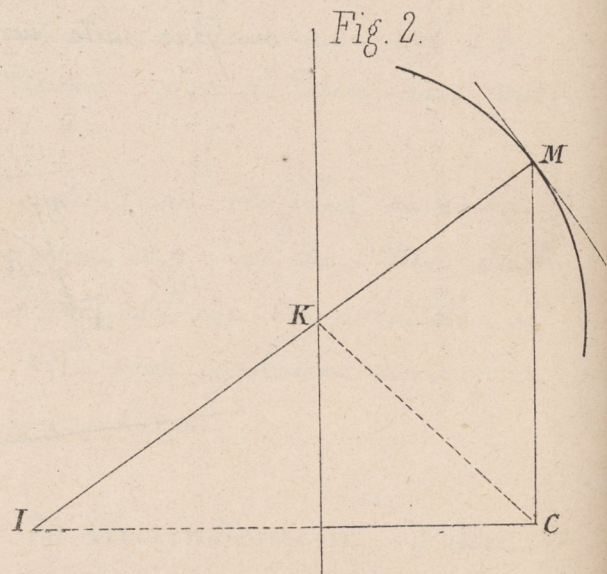


Fig. 2.



Rappelons la construction suivante du rayon de courbure d'une conique (fig. 3) (Voir la Note suivante).

### — Note. —

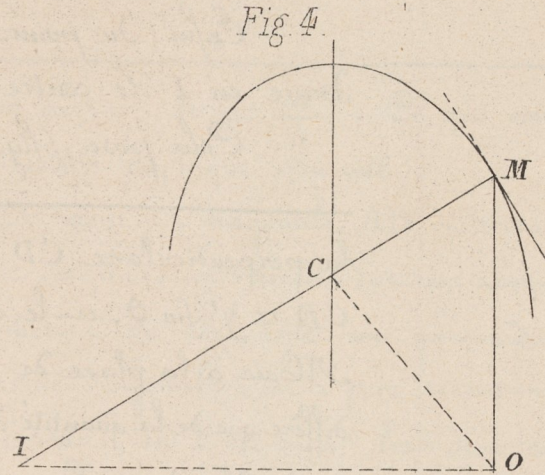
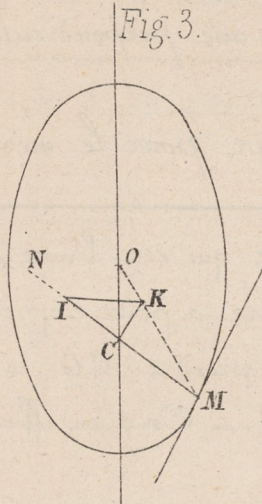
Recherche des rayons de courbure des sections coniques.

1°. Ellipse et Hyperbole. — Soit  $M$  un point de l'Ellipse ;  $MO$  le diamètre passant par ce point, et  $ON$  son conjugué.

Soit  $b'$  le demi-diamètre  $OM$  ;  $a'$  le demi-diamètre  $ON$ , et  $\theta$  leur angle.



Soit  $M$ , un point ;  $O$ , le centre ;  $MN$  la normale, et  $I$  le centre de courbure. On a le point  $I$  en menant par le point  $C$  où la normale rencontre l'axe, une perpendiculaire à cette normale. Joignant le centre de la conique au point  $M$ , et du point  $H$  de rencontre avec la perpendiculaire précédente, abaissant une perpendiculaire sur l'axe.



La rencontre avec la normale donne en  $I$  le centre de courbure.

Cette construction se fait aussi bien sur le petit axe que sur le grand. Elle est générale pour les 3 coniques. — Pour la parabole (fig. 4), le centre étant à l'infini, elle se modifie de la manière suivante :

Rapportons l'Ellipse à ses deux diamètres conjugués ; son équation est :

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

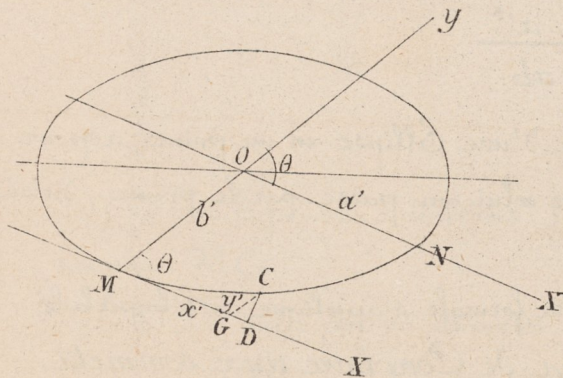
Transportons l'origine au point  $M$ .

A cet effet, changeons dans l'équation  $y$  en  $(y-b')$ , l'équation devient :

$$(1) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{2b'y}{b'^2} = 0$$

Prenons le point  $C$  infiniment voisin du point  $M$ , qui est actuellement l'origine.

Soient  $x'$  et  $y'$  ses coordonnées. — Abaissons





Par le point  $M$ , on mène la normale  $MI$  et la parallèle à l'axe  $MO$ .

Par le point  $C$ , rencontre de l'axe et de la normale, une perpendiculaire  $CO$  à cette normale, jusqu'à la rencontre en  $O$  avec la parallèle à l'axe.

Enfin, du point  $O$ , on mène une perpendiculaire à l'axe  $OI$ , qui donne en  $I$  le centre de courbure.

Cela posé, (fig. 1) appliquons pour le méridien donné, la construction

la perpendiculaire  $CD$  sur la tangente qui est l'axe des  $x$ , on aura :

$CD = y' \sin. \theta$ , et le rayon de courbure a pour expression :  $\rho = \frac{\overline{MD}^2}{2 CD}$  (2<sup>e</sup> Expression).

Mais à la place de  $MD$  on peut prendre  $MG$ , c'est-à-dire  $x'$ , qui n'en diffère que de la quantité du 2<sup>e</sup> ordre  $GD$ . — On a en effet :  $GD = GC \cos. \theta$ , et  $GC$  est du 2<sup>e</sup> ordre. On aura donc :

$$(2) \quad \rho = \frac{x'^2}{2 y' \sin. \theta}$$

De l'équation (1) on tirera :

$$\frac{x'^2}{2 y' \sin. \theta} = \frac{2 b' a'^2}{2 b'^2 \sin. \theta} - \frac{y' a'^2}{2 b'^2 \sin. \theta}.$$

Supprimant le terme  $\frac{y' a'^2}{2 b'^2 \sin. \theta}$ , qui tend vers zéro avec  $y'$ , il vient :

$$(3) \quad \rho = \frac{a'^2}{b' \sin. \theta}.$$

D'après le théorème d'Apollonius on a :  $a' b' \sin. \theta = ab$ , et par suite :

$b' \sin. \theta = \frac{ab}{a'}$  ; donc, en substituant :

$$(4) \quad \rho = \frac{a'^3}{ab}$$

Le rayon de courbure d'une Ellipse en un point, a pour expression le cube du demi-diamètre conjugué de celui qui passe par le point, divisé par le produit des demi-axes.

Remarque. — Cette formule s'applique à l'hyperbole.

Rayons de Courbure aux sommets.

À l'extrémité du grand axe on aura :

$$r = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a} ;$$







Cette dernière est donc déterminée, puisque l'on connaît son centre, ses deux axes en direction, un point  $M$  et la tangente en ce point.

Remarque. — Si la position  $I$  du centre de courbure est telle (fig. 2) que  $MC$  soit parallèle à l'axe, la conique osculatrice sera une Parabole.

Ayant la Conique osculatrice, en la faisant tourner autour de l'axe, elle engendrera une surface du 2<sup>e</sup> osculatrice de la surface donnée en tous les points d'un même parallèle.

D'où, en substituant les valeurs de  $Q$  et de  $MP$ :

$$MC = \frac{Qb'}{MP} = \frac{a'^2}{b' \sin \theta} \times \frac{b'}{\frac{aa'}{b}} = \frac{ba'}{a \sin \theta}.$$

D'un autre côté, élevons  $NC$  perpendiculaire sur la normale et calculons

$$MC. \text{ — On aura : } MC = \frac{MN}{\sin \theta}.$$

$$\text{Mais (formule connue) } MN = \frac{ba'}{a}$$

$$\text{Donc : } MC = \frac{ba'}{a \sin \theta}, \text{ même valeur que ci-dessus.}$$

Ce qui conduit au tracé suivant: Par le point  $N$  où la normale rencontre le grand axe, on élève une perpendiculaire à cette normale, jusqu'à la rencontre en  $C$  avec le diamètre du point. Par ce point  $C$ , on mène une perpendiculaire au grand axe et l'on obtient en  $I$  par recoupement avec la normale le centre de courbure.

Remarque. — On aurait pu se servir du petit axe. Prolonger la normale en  $P$  sur le petit axe. Elever  $PC'$  perpendiculaire sur la normale et abaisser  $C'I$  perpendiculaire sur le petit axe.

Cette construction s'applique à l'hyperbole, et même à la parabole, puisque cette dernière courbe peut être considérée comme la limite d'une Ellipse dont le centre s'éloigne indéfiniment tandis que le paramètre reste constant.

### Rayon de Courbure de la Parabole.

Soit  $M$  un point de la Parabole. — Cette dernière rapportée au diamètre  $Mx'$  et à la tangente  $My'$  en  $M$ , a pour équation  $y^2 = 2p'x$ , et l'on sait que le paramètre  $p'$  est égal à  $\frac{P}{\sin^2 \theta}$ ,  $\theta$  étant l'angle de la tangente en  $M$  avec l'axe de la parabole.

Soit  $C$  un point infiniment voisin de  $M$ ;  $x'$  et  $y'$  ses coordonnées; on



**Lignes asymptotiques.** — On nomme ainsi les lignes tracées sur une surface et tangentes aux asymptotes des indicatrices de tous les points par lesquels elles passent sur la surface. Nous ne les étudierons pas dans ces leçons élémentaires.

**Lignes géodésiques.** — Ce sont les lignes les plus courtes que l'on puisse tracer d'un point à un autre sur une surface.

aura comme ci-dessus :

$$(1) \quad \rho = \lim. \frac{\overline{MG}^2}{2cD} = \lim. \frac{y'^2}{2x' \sin \theta} ; \text{ de l'équation de la courbe on tire :}$$

$$\frac{y'^2}{2x' \sin \theta} = \frac{p'}{\sin \theta} = \frac{p}{\sin^3 \theta} , \text{ donc :}$$

$$(2) \quad \rho = \frac{p}{\sin^3 \theta} .$$

**Construction Graphique.** — Soit  $N$  le point où la normale rencontre l'axe ; la sous-normale  $KN$  est constante et égale à  $p$ . On aura donc :  $MN = \frac{p}{\sin \theta}$ .  
Menons  $NS$  perpendiculaire sur la normale.

$$\text{On aura : } MS = \frac{MP}{\sin \theta} = \frac{p}{\sin^2 \theta} .$$

Enfin, élevons  $ST$  perpendiculaire sur l'axe, et prenons la rencontre en  $I$  avec la normale. On aura :

$$SI = \frac{MS}{\sin \theta} = \frac{p}{\sin^3 \theta} ;$$

$$\text{Donc } \rho = MI = \frac{p}{\sin^3 \theta} .$$

On retrouve ainsi la construction indiquée pour l'Ellipse et l'Hyperbole.

**Rayon de courbure au sommet.**

$$\text{On aura } \theta = 90^\circ \text{ et } \sin \theta = 1$$

$$R = p .$$

Le centre de courbure au sommet se trouve à une distance de ce sommet, qui est le double de la distance du foyer.

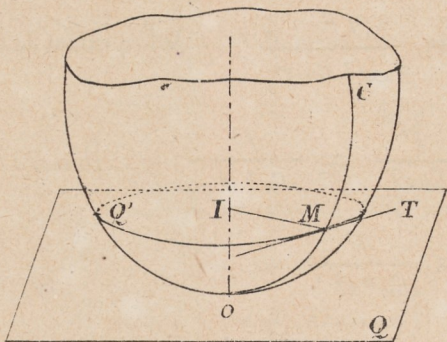


## Théorème des Tangentes conjuguées.

Lorsqu'une surface développable est circonscrite à une surface quelconque, la tangente à la courbe de contact et la génératrice de la développable sont conjuguées par rapport à l'indicatrice.

En effet, soit  $O$ , un point de la surface;  $Q$  le plan tangent en ce point;  $m$  un point infiniment voisin, situé sur une courbe  $OC$ .

Menons le plan tangent en ce point et cherchons l'intersection des plans tangents en  $M$  et en  $O$ .



Si nous menons par  $M$  un plan  $Q'$  parallèle au plan  $Q$ , il donnera comme section une courbe semblable à l'indicatrice. Le plan tangent en  $M$  aura pour trace sur le plan  $Q'$  la tangente  $MT$  à l'indicatrice; en cette droite  $MT$ , devient, à la limite, l'intersection des 2 plans tangents, c'est-à-dire la génératrice d'une développable qui serait l'enveloppe de ces plans tangents.

D'un autre côté, la courbe de contact, c'est-à-dire le lieu des points de tangence, est la courbe  $OMC$ , dont la tangente est, à la limite, le diamètre  $IM$  de l'indicatrice.

Or, dans une conique, un diamètre et la tangente à son extrémité sont conjugués; le Théorème est donc démontré.

**Conséquences.** — La tangente à la courbe d'ombre propre d'une surface est conjuguée du rayon lumineux du point de contact.

La tangente au contour apparent d'une surface est conjuguée du rayon visuel du point de contour apparent.

Lorsque deux surfaces sont tangentes en un point, les lignes d'ombre propres n'ont pas les mêmes tangentes, à moins que les surfaces ne soient osculatrices.

La propriété des tangentes conjuguées se conserve en projection, car une conique et deux de ses diamètres conjugués se projettent suivant une autre conique et deux de ses diamètres conjugués.



## Ligne d'ombre ou de perspective sur des surfaces à courbures opposées.

Coupons par un plan un corps limité ; nous obtiendrons ainsi une section plane. Si le plan sécant passe par le point lumineux, les tangentes menées du point éclairant à la section sont les rayons lumineux tangents au corps et situés dans ce plan. Les points de contact de ces tangentes sont des points de la courbe d'ombre propre sur le corps. Ces points sont dits réels ou virtuels, suivant que dans leur voisinage les rayons lumineux sont extérieurs ou intérieurs. Parmi les points réels, il y en a qui sont utiles au point de vue des ombres, et d'autres qu'il est inutile de conserver. Les arcs formés par la suite des points de contact sont réels ou virtuels. Les points d'intersection de ces arcs sont dits points de passage ou points limites.

**Théorème.** — En un point limite, le rayon lumineux est une asymptote de l'indicatrice de la surface du corps.

En effet, puisqu'il s'agit d'un point limite si on le considère comme appartenant à l'arc réel qu'il termine, il appartient à une tangente extérieure, mais il appartient aussi à une tangente intérieure, comme étant l'extrémité d'un arc virtuel. Le rayon lumineux est donc d'un côté, intérieur, de l'autre côté, extérieur à la surface. En ce point, la section faite par le plan auxiliaire présente une inflexion, et le rayon lumineux est tangent en ce point d'inflexion. Par suite, c'est une droite osculatrice à la surface. Or, on sait qu'une pareille droite est une asymptote de l'indicatrice comme répondant à un rayon de courbure infini. Comme dans une hyperbole l'asymptote est à elle-même sa conjuguée, on voit aussi qu'aux points limites, les rayons lumineux sont tangents à la courbe d'ombre.

**Réciproquement :** Si du point lumineux on mène une tangente à la courbe d'ombre, le point de contact sera un point limite.

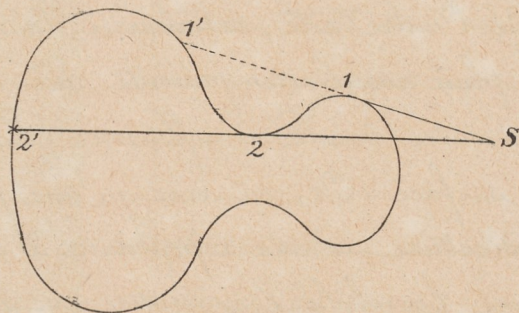
En effet, la conjuguée du rayon lumineux se confond avec le rayon lumineux lui-même. Donc, celui-ci est une asymptote de l'indicatrice ; par suite il est osculateur à la surface, et le point où il touche cette surface est un point limite.



Dans la pratique du dessin, si des projections du point éclairant on mène des tangentes aux projections de la courbe d'ombre, les points de contact sont les projections des points limites. Toutefois il faut s'assurer que les plans tangents à la surface aux points déterminés ne sont pas perpendiculaires aux plans de projection, car dans ce cas, la tangente à la projection de la courbe peut ne pas être la projection de la tangente à la courbe de l'espace.

On a vu que si une courbe a sa tangente passant par le point visuel, cette courbe présente en perspective un rebroussement, et que le cône perspectif présente lui-même un rebroussement le long de cette tangente. Le cône d'ombre est formé par les rayons s'appuyant sur la courbe d'ombre. Les génératrices qui sont tangentes à la courbe d'ombre sont des génératrices de rebroussement pour le cône. Ainsi, les rayons lumineux des points limites sont des génératrices de rebroussement du cône d'ombre.

**Ombres portées.** — Se coupe le corps par un plan passant par le point lumineux. La courbe d'ombre portée est le lieu des



points tels que (1') (2'). A un point réel de la courbe d'ombre propre correspond un point réel de la courbe d'ombre portée. Un point d'ombre virtuel de la 1<sup>re</sup> courbe donne un point virtuel de la 2<sup>e</sup>. Les points où, à la courbe réelle, succèdent des points de la courbe d'ombre

portée virtuelle, sont dits points de passage de la courbe d'ombre portée.

Les points de passage appartiennent à la fois à la courbe d'ombre propre et à la courbe d'ombre portée.

En effet, pour passer d'un rayon tel que  $S.1.1'$  à un rayon tel que  $S.2.2'$ , il faudra nécessairement que, dans une position intermédiaire, le point 1' vienne rejoindre le point 1 (fig. 2). Alors le rayon aura 3 points confondus communs avec la surface, c'est-à-dire sera une



asymptote de l'indicatrice. Ce point sera donc un point limite de la courbe d'ombre propre, tel qu'il a été défini plus haut, mais il sera aussi un point limite de la courbe d'ombre portée, puisque le point (1') de cette courbe, qui était d'abord réel (fig. 1), c'est-à-dire situé au-delà du point de contact relativement au point lumineux, vient se placer (fig. 3) entre ce point lumineux et le point 1 où le rayon touche la surface.

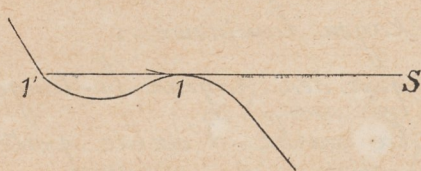


Fig. 1.

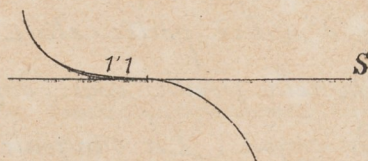


Fig. 2.



Fig. 3.

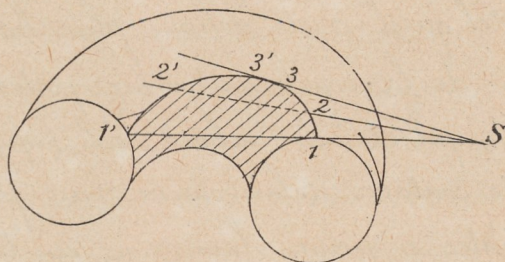
### Construction de la tangente en un point de la courbe d'ombre portée.

Soit le rayon lumineux  $S1$  qui donne le point  $1'$  de la courbe d'ombre portée. La tangente en  $1'$  est l'intersection du plan tangent en ce point à la surface, et du plan tangent au cône d'ombre le long de la génératrice  $S1$ . Ce plan est le même que le plan tangent au point 1 de la surface. Donc la tangente au point  $1'$  est l'intersection des plans tangents à la surface aux points 1 et  $1'$ .

En un point limite, tel que  $1.1'$  (fig. 2) ces deux plans tangents dont les points de contact sont infiniment voisins, d'après le théorème des tangentes conjuguées, se coupent suivant une droite conjuguée de la ligne qui joint leurs points de contact. Cette dernière ligne est l'asymptote de l'indicatrice. Donc: la tangente à la courbe d'ombre portée aux points limites est le rayon lumineux lui-même.

Nous avons vu qu'aux points limites, la courbe d'ombre propre avait pour tangente le rayon lumineux. Donc: Aux points limites, les courbes d'ombre propre et d'ombre portée sont donc tangentes entre elles. Prenons par exemple un tore; 1, 2, sont des points de la courbe d'ombre propre;  $1'2'$  les points correspondants de la courbe d'ombre.





autoportée. Lorsque les pointa tels que 1 et 1' se confondent en 33', on a les pointa limites, où les deux courbes se raccordent. La tangente de raccordement est le rayon lumineux lui-même.

Cherchons comment se coupent les courbes d'ombre propre et d'ombre portée.

— Nous avons appelé plus haut, ces pointa des pointa de perte et nous avons démontré que la tangente à la courbe d'ombre portée était le rayon lumineux.

De tels pointa sont donnés par des rayons bi-tangents à la surface du corps. La tangente à la courbe d'ombre portée est l'intersection du plan tangent au point de la courbe d'ombre portée et au point où le rayon lumineux s'appuie d'abord sur le corps. Cette intersection est le rayon lumineux lui-même. Mais la tangente à la courbe d'ombre propre est la conjuguée du rayon lumineux. Donc, en un point d'intersection de la courbe d'ombre portée et de la courbe d'ombre propre, les tangentes à ces deux courbes sont deux droites conjuguées de l'indicatrice.

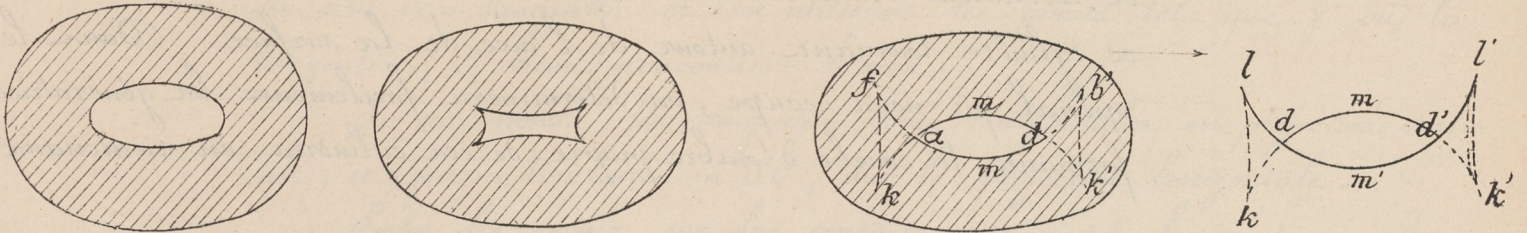
On retrouve comme cas particulier le théorème démontré plus haut sur les pointa limites :

Les rayons tangents que nous venons de considérer sont des génératrices doubles du cône d'ombre.

Les principes précédents s'étendent aux contours apparents en perspective et en projection ; mais certaines parties de ces courbes utiles en projection et en perspective peuvent ne plus l'être dans le cas des ombres. Prenons pour exemple le Cône, et supposons qu'on le projette sur le plan du tableau, en le plaçant obliquement par rapport à ce plan. Nous le considérons comme enveloppe d'une sphère dont le centre reste sur une circonférence fixe. Cette circonférence se projette suivant une ellipse, et la sphère mobile a à chaque instant pour contour apparent une circonférence de cercle dont le centre est sur cette ellipse. L'enveloppe se compose donc de deux courbes parallèles à l'ellipse, dont on a déjà étudié la forme, et que



rappellent les figures suivantes. Ces courbes sont des développantes de la développée de l'Ellipse.



$l$  et  $l'$  sont les points limites séparant la partie réelle de la partie virtuelle. Les arcs  $lK$  et  $l'K'$  sont des arcs virtuels ;  $Kd$  et  $K'd'$  sont des arcs réels, mais cachés ;  $d$  et  $d'$  sont les traces de deux rayons bitangents à la surface. Les arcs  $ld$ ,  $l'd'$ , utiles si l'on considère la projection de la surface, cessent de l'être si l'on cherche seulement l'ombre portée.

### Ombres sur les surfaces de révolution.

Prenons pour exemple un tore ; le plan horizontal étant supposé perpendiculaire à l'axe, soit  $SS'$  le point lumineux. Considérons le tore comme enveloppe de cônes de révolution. Prenons la trace  $ab - a'b'$  d'un de ces cônes sur le plan horizontal passant par le point lumineux.

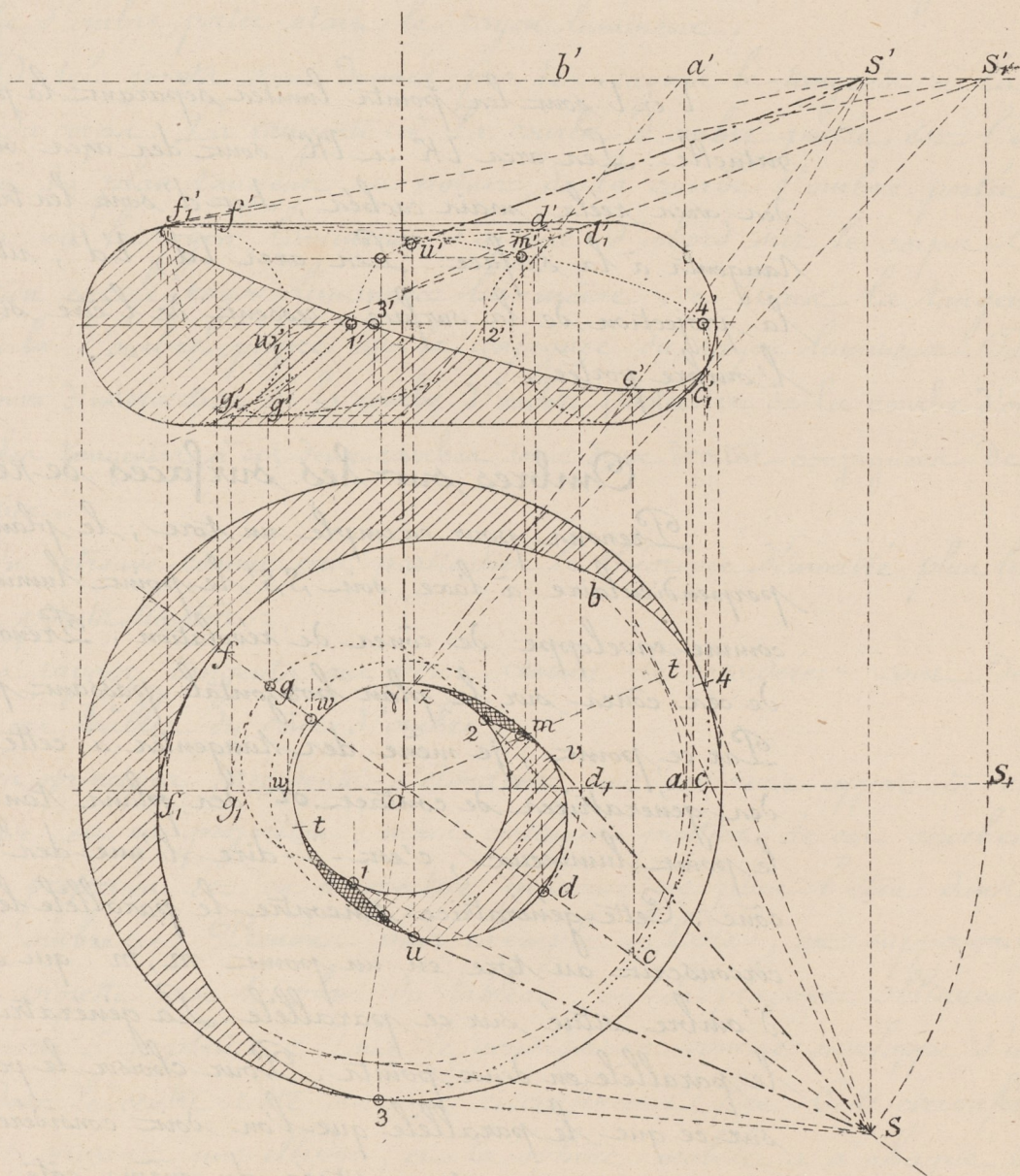
Par ce point, je mène des tangentes à cette trace, et j'en déduis l'une des génératrices de contact et des plans tangents menés au cône par le point lumineux, c'est-à-dire l'une des courbes d'ombre sur le cône. Cette génératrice rencontre le parallèle le long duquel le cône est circonscrit au tore en un point  $m, m'$  qui est le point de la courbe d'ombre situé sur ce parallèle. La génératrice rencontre en projection le parallèle en deux points. Pour choisir le point utile, on s'appuie sur ce que le parallèle que l'on doit considérer et la base du cône sont ou ne sont pas situés du même côté du sommet.

Le plan vertical  $OS$  est évidemment un plan de symétrie.

La courbe a donc dans ce plan ses points les plus hauts et les plus bas. Pour trouver ces points, il suffit de remarquer que



pour chercher les points de la courbe qui sont sur un méridien quelconque, on peut regarder le tore comme enveloppe d'un cylindre de révolution dont la section droite est la section méridienne du tore, ce cylindre tournant autour de l'axe de la surface. Dans le cas spécial qui nous occupe, on déterminera facilement les génératrices formant la courbe d'ombre propre de ce cylindre en ramenant leur



section droite, ainsi que le point lumineux dans le plan méridien de front.

Dans ce mouvement, le point  $S'S'$  vient en  $S_1S'_1$ . Les tangentes menées du point  $S'_1$  au méridien principal, sont  $S_1c'_1$  (réelle), —



$s'_1 d'_1$  (réelle) —  $s'_1 f_1$  (réelle) et  $s'_1 g'_1$  (virtuelle) — Ce dernier rayon donne en  $W'_1$  ramené en  $WW'$ , un point de l'ombre autoportée.

Ces points seront ramenés facilement dans le méridien  $S'O$  soit en traçant des cercles en projection horizontale, soit en se servant du cône des tangentes et en utilisant les points tels que  $\gamma$  où la tangente  $S'_1 C'_1$  vient rencontrer l'axe.

En ces points les tangentes sont horizontales en projection verticale, et perpendiculaires à  $S'O$ , sur la projection horizontale.

Enfin les points sur les contours apparents horizontaux ou verticaux s'obtiennent en menant des tangentes à ces contours par les projections du point lumineux.

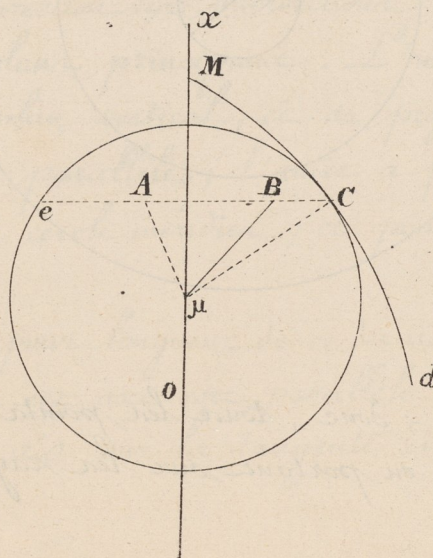
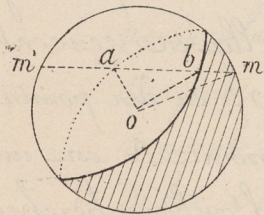
La courbe intérieure d'ombre ainsi obtenue est virtuelle sur une certaine étendue, limitée par les points de passage. On obtiendra ces points sur la courbe en lui menant, par le flambeau, les tangentes telles que  $S'u$  —  $S'u'$ , et vérifiant que les points  $u$  et  $u'$  sont sur une même ligne de rappel.

Aux points de passage  $u$  et  $v$  commence la courbe d'ombre autoportée, tangente également en  $u$  et  $v$ , aux rayons lumineux.

On a en  $WW'$  le point de cette courbe située dans le méridien  $OS$ . — Ce point est au-dessous de l'équateur, ainsi que le fait voir le point  $W'_1$ , par suite, la courbe d'ombre autoportée rencontre en deux points  $t$  et  $z$ , le petit équateur.

### Autre Méthode pour la détermination des ombres des surfaces de révolution.

Considérons la surface de révolution donnée comme enveloppe de sphères, et supposons-la éclairée par des rayons parallèles.



Soit  $ox$  l'axe de révolution,  $Mcd$  la courbe méridienne, et  $\mu c$  la normale en un point.

La circonférence ayant  $\mu c$  pour rayon en la



courbe méridienne, de la sphère tangente à la surface le long du parallèle  $ce$ ; la courbe d'ombre sur cette sphère est en projection une ellipse dont les rencontres avec la droite  $ce$  donnent deux points de la courbe d'ombre de la surface. Pour les diverses sphères auxiliaires, ces ellipses sont homothétiques et semblables; il suffit donc de construire pour une seule de ces sphères la projection de la courbe d'ombre.

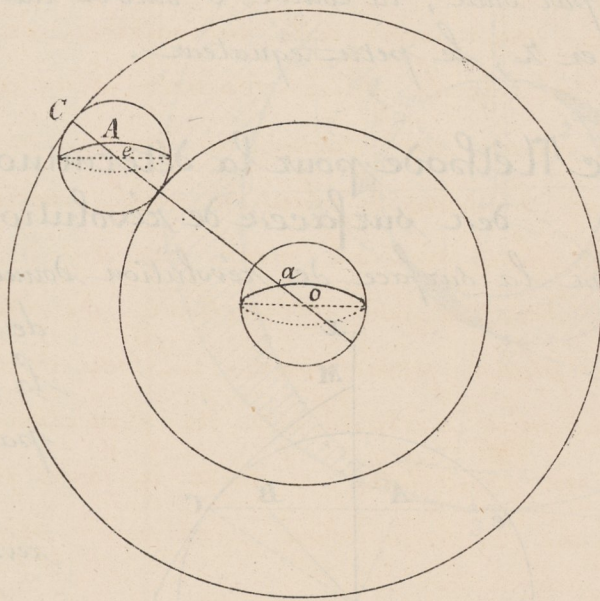
Soit  $O$  le centre de la projection de la sphère auxiliaire que l'on choisit pour la construction, je mène par  $O$  une parallèle  $om$  à la normale  $\mu c$  de la surface de révolution; par  $m$  je mène une parallèle  $mm'$  à la droite  $ce$ ; j'obtiens en  $a$  et  $b$  deux points sur l'ellipse d'ombre. Je mène par  $\mu$  des parallèles  $\mu A$ ,  $\mu B$  à  $OA$ ,  $OB$ , et les points  $A$  et  $B$  sont deux points d'ombre sur la surface de révolution donnée.

Ces constructions se simplifient si le flambeau est dans le plan du méridien principal, ou si les rayons lumineux sont parallèles au plan vertical.

Dans le cas du tore, en projection horizontale, il y a une simplification. Je prends pour sphère auxiliaire celle qui engendre le

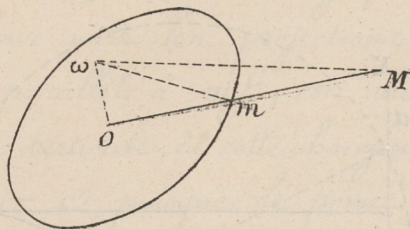
tore par sa rotation autour de l'axe. Je mène un méridien  $OC$  et la sphère inscrite au tore ayant pour centre le point  $e$  sur ce méridien; je mène la sphère égale ayant  $O$  pour centre. Les courbes sur ces deux sphères sont deux ellipses égales; ces ellipses rencontrent le méridien  $OC$  en des points  $a$ ,  $A$ ; le point  $A$  est un point de l'ombre cherchée; d'ailleurs, il est évident que l'on a :

$aA = oe$ ; donc, tous les points de la courbe d'ombre du tore s'obtiendront en portant sur les rayons vecteurs de l'ellipse centrale





à partir des points de cette ellipse une longueur constante égale à  $oc$ . La courbe d'ombre est donc une conchoïde d'ellipse.



On peut, en s'appuyant sur cette remarque, construire immédiatement la normale, et par suite la tangente à la courbe d'ombre. Rappelons qu'une courbe et sa conchoïde ont même sous-normale aux points correspondants  $m$  et  $M$ .

Tracons la perpendiculaire  $O\omega$  au rayon  $OM$  : la normale en  $m$  à l'ellipse rencontre cette droite en  $\omega$  ; la normale à la conchoïde en  $M$  sera la droite  $\omega M$ .

### Recherche de la tangente à la courbe d'ombre d'une surface de révolution.

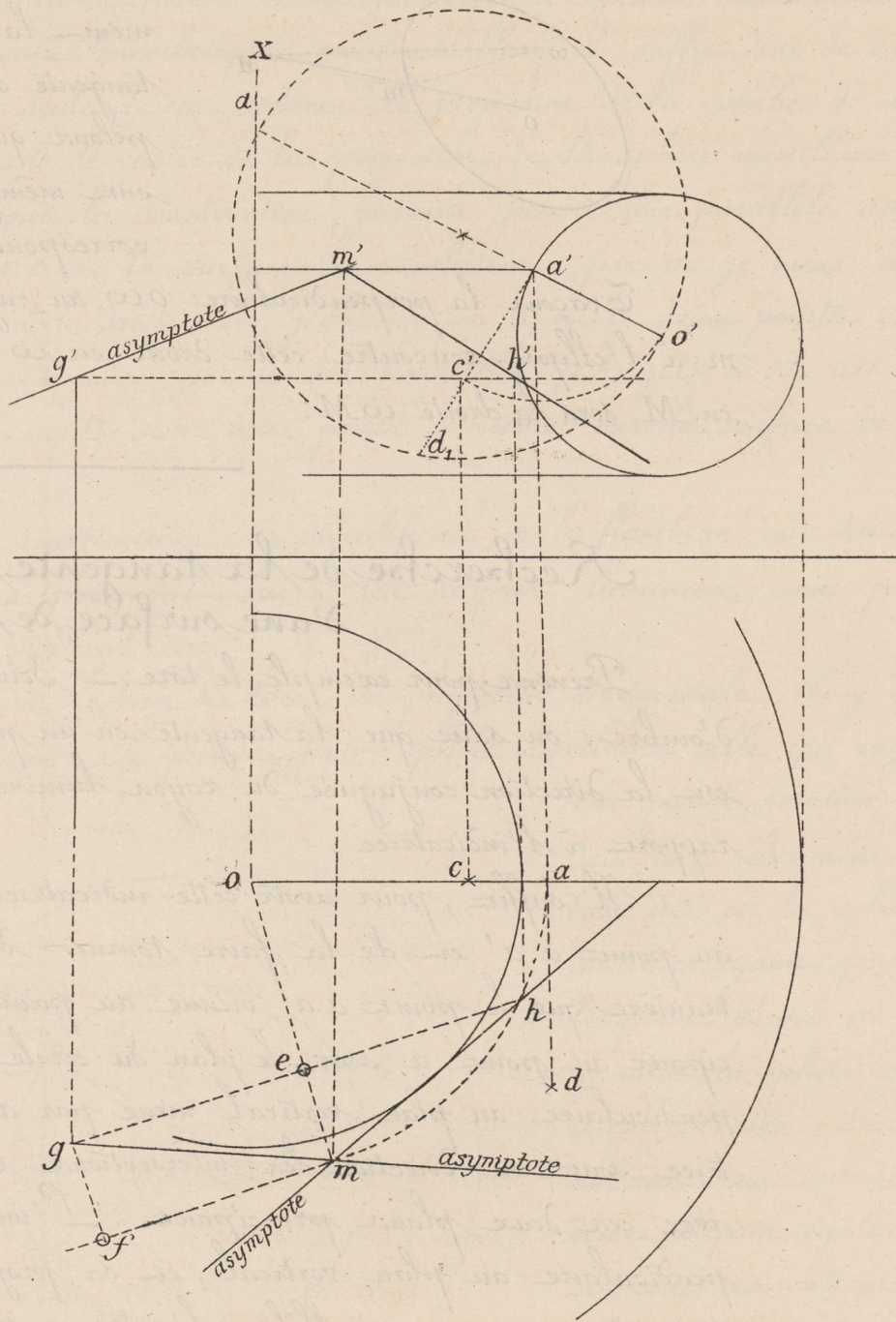
Prenons pour exemple le tore. — Soit  $mm'$  un point de la courbe d'ombre ; on sait que la tangente en un point à la courbe d'ombre est la direction conjuguée du rayon lumineux passant par ce point par rapport à l'indicatrice.

Il suffit, pour avoir cette indicatrice, de construire l'indicatrice au point  $a$  à' et de la faire tourner d'un angle convenable, de manière que le point  $a$  à' vienne au point  $mm'$ . Les plans principaux au point  $a$  sont le plan du cercle méridien et le plan perpendiculaire au plan vertical mené par  $a$  à'. Les axes de l'indicatrice sont en direction les intersections du plan tangent en  $a$  à' avec ces deux plans principaux. L'un de ces axes est donc perpendiculaire au plan vertical, et sa projection horizontale est la tangente en  $a$  au parallèle ; l'autre a pour projection verticale la tangente en  $a$  au cercle méridien, et pour projection horizontale la droite  $oa$ .

Se prendra pour longueur de ce dernier axe le rayon du cercle méridien. Comme cet axe est parallèle au plan vertical, il suffit de porter  $a'c' = a'o$  sur la tangente en  $a$ . On sait aussi que



l'autre axe est moyen proportionnel entre les deux rayons de courbure principaux, c'est-à-dire entre  $a'o'$  et  $a'd$ . Si donc on décrit sur  $a'o'$  comme diamètre une circonférence, et si l'on prend son intersection  $d_1$  avec la tangente  $a'e'$ , on aura en  $a'd_1$  la longueur du second axe de l'indicatrice.



En portant sur la tangente en  $a$  au parallèle  $ad = a'd_1$ , on aura en  $a'd$  la projection du second axe de l'indicatrice. Se fait tourner la figure autour de l'axe  $X$ , de manière que le point  $a$  vienne en  $m$ ,



et j'ai, en  $me$ ,  $mf$ , les projections horizontales des axes de l'indicatrice. Les diagonales du rectangle construit sur  $me$ ,  $mf$ , seront les projections horizontales  $mg$ ,  $mh$  des asymptotes de l'indicatrice.

Pour avoir les projections verticales de ces asymptotes, on remarque que  $gh$ , parallèle à  $mf$ , est une horizontale du plan de l'indicatrice. La projection verticale de cette horizontale est la parallèle à la ligne de terre menée par  $c$ , puisque le point  $cc'$ , dans la rotation, n'a pas changé de hauteur. Les points  $g$  et  $h$  sont donc projetés verticalement en  $g'$  et  $h'$ , et  $m'g'$ ,  $m'h'$  sont les asymptotes de la projection verticale de l'indicatrice.

En prenant les directions conjuguées des projections du rayon lumineux passant par le point  $m$ ,  $m'$  par rapport aux projections des asymptotes de l'indicatrice, on aura les projections de la tangente à la courbe d'ombre.

### Objet de la 7<sup>e</sup> Épure.

On demande de trouver les ombres propres et autoportées d'un tore, ainsi que ses ombres portées sur le plan horizontal, en supposant les rayons lumineux parallèles entre eux et au plan vertical.

On déterminera directement un point sur un parallèle quelconque, par la méthode des Cônes circonscrits ou par celle des sphères, et on donnera le tracé de la tangente en ce point, en faisant usage de l'indicatrice.

Les points importants de l'épure seront trouvés directement. Les points de passage seront obtenus après coup, en menant sur les deux projections à la courbe d'ombre propre, des tangentes parallèles au rayon lumineux.

L'ombre portée sur le plan horizontal s'obtiendra, en prolongeant les rayons lumineux des points de l'ombre propre trouvés directement, et en prenant les enveloppes des ombres portées par les parallèles.

L'ombre autoportée se trouvera par la méthode des projections.