

Courbure des Surfaces.

Courbe Indicatrice. — Soit S , une surface; O , un point de cette surface, et xy , le plan tangent en ce point, que nous prendrons pour plan horizontal.

Prenons pour axe des z la normale au point O . — Soit M un point voisin du point O et Mm , le z de ce point. On pourra toujours développer la quantité z en fonction des coordonnées indépendantes x et y du point M ; et ordonner ce développement suivant les puissances croissantes de x et y , de la manière suivante :

$$z = A + Bx + B'y' + Cx^2 + C'xy + C''y^2 + Dx^3 + D'x^2y + D''y^2x + D'''y^3 + \dots$$

Remarquons que le point O étant sur la surface, pour $z = 0$, on a : $x = 0$ et $y = 0$, ce qui entraîne $A = 0$.

Mais le plan xy est tangent en O , et par suite, la section faite dans la surface par le plan zx est une courbe tangente à l'axe des x .

Faisons $y = 0$, et prenons la limite du rapport $\frac{z}{x}$ qui sera le coefficient angulaire de la tangente à l'origine au point O de la section faite par le plan zx ; nous devons avoir : $\lim. \frac{z}{x} = 0$, pour $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ ce qui conduit à $B = 0$.

On aura de même en écrivant que l'axe des y est tangent à la surface :

$$C = 0.$$

L'équation de la surface est donc :

$$z = Cx^2 + C'xy + C''y^2 + Dx^3 + D'x^2y + D''y^2x + D'''y^3 + \dots$$

Pour une valeur particulière de z , cette équation sera celle de la section faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent et passant à une distance z de ce plan.

Si nous supposons que x et y soient des infiniment petits du 1^{er} ordre, la section précédente devient la section faite par un plan infiniment voisin du plan tangent; et prend le nom d'Indicatrice infinitésimale de la surface, au point O .

z est infiniment petit du 2^e ordre; les quantités $x^2y - xy^2 \dots$ sont du

Les deux sections normales, $\mathcal{K}x$ et $\mathcal{K}y$ qui passent par les axes de l'indicatrice se nomment les sections principales.

Théorème. — Les rayons de courbure des sections normales faites en un point d'une surface sont proportionnels aux carrés des rayons de l'indicatrice.

Soit $\mathcal{K}OD$ une section normale, et gh , la ligne suivant laquelle le plan de cette section coupe le plan de l'indicatrice. Nous avons dit que l'indicatrice était la section faite par un plan H infiniment voisin du plan tangent.

En négligeant les infiniment petits du 3^e ordre, le point g de l'indicatrice peut être considéré comme appartenant à la surface.

Le rayon de courbure ρ de la courbe OD a pour expression.

$$\rho = \frac{-2}{2gf} = \frac{-2}{2\mathcal{K}} \quad (2^e \text{ Expression du rayon de courbure})$$

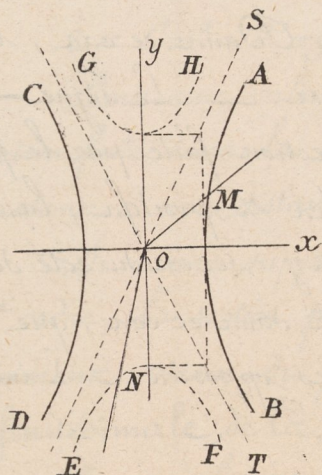
Il est donc proportionnel au carré du rayon $\mathcal{K}g$ de l'indicatrice.
C. Q. F. D.

Corollaire. — Les sections normales principales sont celles qui ont un rayon de courbure maximum ou minimum. — Les rayons de courbure de ces deux sections se nomment les rayons de courbure principaux.

Discussion. Dans le cas où l'indicatrice est une hyperbole, son équation infinitésimale est de la forme :

$$(1) \quad Ax^2 - By^2 = \mathcal{K}$$

Soit AB, CD , la courbe qu'elle représente. — Un plan normal



qui aurait OM pour trace rencontre la courbe en M , ce qui veut dire que la section qu'il donnerait dans la surface serait située par rapport au plan tangent du côté des $\mathcal{K}$ positifs.

Son rayon de courbure serait proportionnel au carré de OM .

Un plan ayant pour trace ON , ne

rencontre par l'indicatrice, et par suite ne coupe pas la surface du côté de κ positif. Mais si nous changeons dans l'équation (1) κ en $-\kappa$, ce qui revient à étudier la surface de l'autre côté de son plan tangent, l'équation devient :

(2) $Ax^2 - By^2 = -\kappa$, qui représente l'hyperbole EF GH conjuguée de la précédente et coupée par toutes les traces telles que ON qui ne rencontraient pas la précédente hyperbole. Nous pouvons donc dire que l'indicatrice pour une surface à courbures opposées est représentée par les deux hyperboles conjuguées AB, et GH, ayant les mêmes asymptotes OT et OS.

Indicatrices finies. — L'indicatrice infinitésimale sera remplacée, en dessin, par une indicatrice finie qui lui sera semblable, et dont l'équation rapportée à ses axes sera :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (si c'est une ellipse),
 et $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ si c'est une hyperbole. Le signe + du second membre répond à la section faite par un plan infiniment voisin, situé d'un côté du plan tangent et le signe - à une section faite de l'autre côté.

Soient R et R' les rayons de courbure principaux. Ces rayons sont proportionnels aux carrés des demi-axes de l'indicatrice infinitésimale et aussi à ceux de l'indicatrice finie qui lui est semblable. On aura donc, en désignant par K un coefficient arbitraire :

$$a^2 = KR, \text{ et } b^2 = KR',$$

et l'équation d'une indicatrice finie sera :

$$\frac{x^2}{KR} + \frac{y^2}{KR'} = 1 \text{ ou } \frac{x^2}{KR} - \frac{y^2}{KR'} = \pm 1$$

De la valeur du coefficient K dépendront les dimensions de l'indicatrice finie.

Dans une même épure, si en un même point O, plusieurs surfaces différentes ont le même plan tangent et que l'on veuille à l'aide d'indicatrices finies étudier les particularités de l'intersection de ces surfaces aux environs du point O, il faudra donner pour toutes les surfaces, une même valeur au coefficient K.

Parmi toutes les indicatrices finies d'une même surface en un point,

il en est une qui est plus simple à construire que les autres, c'est celle qui aurait pour un de ses demi-axes le rayon de courbure de la section principale correspondante.

Faisons $a = R$, on en déduit $K = R$ et $b = \sqrt{RR'}$; il existe donc une indicatrice finie ayant pour un de ses demi-axes l'un des rayons principaux de courbure, et pour autre demi-axe une moyenne proportionnelle entre les deux rayons principaux. C'est celle-là dont nous nous servirons dans nos épreuves, à moins d'indications contraires.

Remarquons que si l'on convient de donner le signe $+$ au rayon de courbure d'une section principale quand son centre de courbure est d'un côté du plan tangent, et le signe $-$ quand il est de l'autre côté, l'équation d'une indicatrice finie sera toujours :

$$\frac{x^2}{KR} + \frac{y^2}{KR'} = 1.$$

Celle de l'indicatrice la plus simple sera :

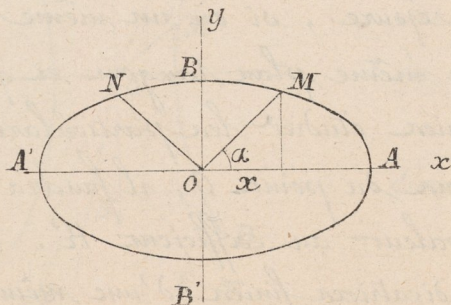
$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{RR'} = 1.$$

Formule d'Euler. — Expression du rayon de courbure d'une section normale quelconque, en fonction des rayons de courbure des sections principales.

Rappelons une formule connue des Courbes du second degré à centre.

Soit $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, l'équation d'une Ellipse ou d'une hyperbole rapportée à ses axes. Soit M un point quelconque de cette courbe; — $OM = l$ le rayon de ce point, x et y ses coordonnées; α l'angle formé par OM avec le grand axe.

$$\begin{aligned} \text{On a : } x &= l \cos \alpha \\ y &= l \sin \alpha. \end{aligned}$$



Écrivons que le point M est sur la courbe, ce qui donnera :

$$\frac{l^2 \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{b^2} = 1 \quad \text{ou:}$$

$$(1) \quad \frac{1}{l^2} = \frac{1}{a^2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{b^2} \sin^2 \alpha$$

Cela posé, revenons à la surface et à son indicatrice. Nous avons vu que le rayon de courbure d'une section normale qui aurait la ligne OM pour trace de son plan sur celui de l'indicatrice est proportionnel au carré du rayon OM de cette indicatrice, que cette dernière soit infinitésimale ou finie.

Désignons: par ρ le rayon de courbure de la section normale qui aurait OM pour trace; par R et R' les rayons de courbure principaux, c'est-à-dire des sections normales ayant les axes OA et OB pour traces.

Les quantités ρ , R et R' seront proportionnelles aux quantités l^2 , a^2 et b^2 , et en substituant dans l'expression (1) qui est homogène, on aura

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R'} \sin^2 \alpha. \quad \text{Celle est la formule d'Euler.}$$

Si l'on veut faire entrer dans cette expression les courbures au lieu des rayons de courbure, on sait que si nous désignons les courbures par les lettres c , C et C' , on a:

$$c = \frac{1}{\rho} \quad C = \frac{1}{R} \quad C' = \frac{1}{R'} \quad \text{ce qui donne:}$$

$$(3) \quad c = C \cos^2 \alpha + C' \sin^2 \alpha.$$

Courbure moyenne. — Prenons deux sections normales à angle droit l'une sur l'autre, ayant pour traces sur l'indicatrice les droites perpendiculaires entre elles OM et ON. Soient ρ et ρ' les rayons de courbure correspondants, on aura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R'} \sin^2 \alpha \quad (\text{l'indicatrice étant une ellipse})$$

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} \sin^2 \alpha + \frac{1}{R'} \cos^2 \alpha; \quad \text{ajoutant:}$$

$$(4) \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}, \quad \text{ou en introduisant les courbures:}$$

$$(5) \quad c + c' = C + C', \quad \text{D'où ce théorème:}$$

La somme des courbures de deux sections normales à angle droit l'une sur l'autre est constante et égale à la somme des courbures principales. La quantité $\frac{C+C'}{2}$ se nomme courbure moyenne de la surface au point O .

Ombilics. — Il peut se présenter, dans le cas où R et R' sont de même signe, des points pour lesquels R et R' sont égaux.

Dans ce cas, l'indicatrice est un cercle : toutes les sections normales ont le même rayon de courbure. — Ces points se nomment des ombilics.

Théorème. — Dans une surface à courbures opposées les asymptotes de l'indicatrice sont les tangentes de la courbe d'intersection de la surface par son plan tangent.

En effet, soit BOA la courbe d'intersection de la surface par son plan tangent, et OA une sécante passant par le point O .

La courbe de section normale $m.o.n.A$, qui aurait OA pour trace serait tangente en O , au plan tangent, et le recouperait en A .

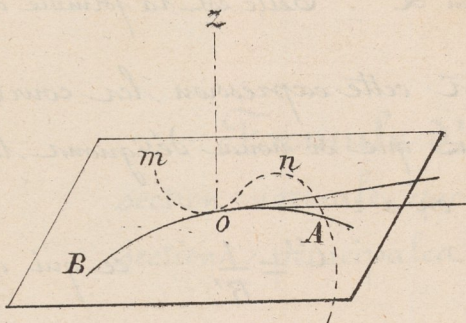
A la limite, si OA devient la tangente en O , à la courbe BOA , la section normale précédente aura, en O , 3 points réunis en un seul, elle présentera donc une inflexion et son rayon de courbure sera infini.

Mais pour que le rayon de courbure soit infini, il faut que le rayon de l'indicatrice le soit également, c'est-à-dire soit une asymptote.

C. G. F. D.

Conséquences. — Dans le paraboloïde et dans l'hyperboloïde, les génératrices de système différent qui passent par un même point sont les asymptotes de l'indicatrice de ce point.

Théorème de Meunier. — Une courbe quelconque tracée par un point O , sur une surface, a pour rayon de courbure la projection sur son plan osculateur du rayon de courbure de la section normale qui passe par la tangente en O à la courbe considérée.



En effet : soit Q le plan osculateur d'une courbe MN ; P le plan normal passant par la tangente OT ; ON' la section normale faite par ce dernier plan ; et α l'angle de ces 2 plans.

Prenons sur la tangente commune aux 2 courbes une longueur ob infiniment petite ; et élevons dans les deux plans P et Q , des perpendiculaires à cette tangence jusqu'à la rencontre en N et N' avec les 2 courbes.

Soit ρ , le rayon de courbure de la section normale ON' et ρ_1 celui de la courbe donnée, ON , on aura :

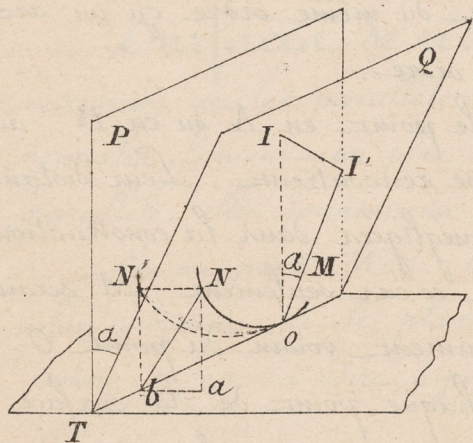
$$\rho = \frac{\overline{ob}^2}{2\overline{bN'}} \quad \text{et} \quad \rho_1 = \frac{\overline{ob}^2}{2\overline{bN}}, \quad \text{et par suite :}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\overline{bN'}}{\overline{bN}}.$$

Mais, à la limite, la droite NN' est une droite du plan tangent, et par suite est perpendiculaire sur bN' .

$$\text{Par conséquent : } \frac{\overline{bN'}}{\overline{bN}} = \cos. \alpha,$$

$$\text{et par suite : } \rho_1 = \rho \cos. \alpha.$$



Soient OI et OI' les deux rayons de courbure, on aura :

$$OI' = OI \cos \alpha ;$$

et par suite le point I' sera la projection du point I sur le plan osculateur. C. Q. F. D.

Il résulte du théorème de Meusnier joint au théorème d'Euler, que la connaissance des rayons de courbure principaux entraîne celle des rayons de courbure de toutes les sections faites par des plans passant au même point.