Le point Q se nomme le Pôle de la génératrice am – La distance $OQ = q$ se nomme le paramètre de tangence.

On le construira géométriquement, en joignant au centre de courbure la trace t de la tangente à la ligne de striction, menant par la trace m de la génératrice une parallèle à la ligne ainsi construite, et prenant son intersection Q' avec la normale. – Reportant la distance aQ' de O en Q, on aura le Pôle.

En effet, il est facile de voir que

$$\frac{tg.\,\gamma}{tg.\,\beta} = \frac{a''m'}{a''t'} = \frac{am}{at} = \frac{aQ'}{aO},$$

et par suite:
$$\overline{aQ'} = \rho \cdot \frac{tg.\,\gamma}{tg.\,\beta}.$$

Ayant le pôle, les problèmes sur les plans tangents deviennent très-simples.

1°. Plan tangent par un point d'une génératrice.

On joint le Pôle de la génératrice et la projection du point. Puis on mène par la trace de la génératrice, une perpendiculaire sur la droite ainsi menée: on a la trace horizontale du plan tangent.

2°. Un plan contient une génératrice; – Trouver le point où il est tangent.

Du pôle, on abaisse une perpendiculaire sur la trace du plan, et le point de rencontre avec la génératrice, donne le point de tangence, etc.

Héliçoïde gauche quelconque

C'est la surface engendrée par une droite entraînée dans un mouvement héliçoïdal, lorsque cette droite ne rencontre pas l'axe du mouvement.

Soit $ab - a'b'$ la droite lorsqu'elle est de front, – et h le pas réduit du mouvement héliçoïdal.; $Z - Z''Z'$ l'axe du mouvement héliçoïdal.

Si nous menons la plus courte distance Za, de l'axe et de la droite, et si nous considérons le cylindre qui aurait Za pour rayon; la droite est et restera tangente à ce cylindre, qui sera le noyau de la surface.

Son point de contact aa' décrira sur le cylindre une hélice $a'c'$ de pas réduit h.

Cette hélice se projettera horizontalement suivant le cercle de base du cylindre noyau. Ce sera la ligne de contour apparent horizontal de la surface ; et comme cette dernière a son cône directeur de révolution et à axe vertical ; l'hélice $a'c'$ est la ligne de striction de la surface. Soit β l'angle de la droite mobile avec le plan horizontal, et soit γ, celui de l'hélice de striction.

h étant le pas réduit,

et $r = \overline{za}$ le rayon du cylindre noyau,

On aura $tg\,\gamma = \frac{h}{r}$.

Si l'on s'était donné le pas total H, on sait que l'on aurait eu $h = \frac{H}{2\pi}$.

Paramètre de Distribution.

Il sera le même pour toutes les génératrices, et fourni par la formule donnée pour les surfaces à cône directeur de révolution

$$K = r\left(tg\beta - tg\gamma\right) = r\left(tg\beta - \frac{h}{r}\right) = r\,tg\beta - h.$$

Si $tg\beta = tg\gamma$, alors $K = 0$ et la surface est développable. Ce serait le cas où la génératrice $ab - a'b'$ serait tangente à l'hélice de striction.

Il faudrait que la distance r fût telle que l'on ait :

$$tg\beta = tg\gamma = \frac{h}{r},$$

$$\text{ou} \quad r = h.\cotg.\beta.$$

On peut construire graphiquement le paramètre de distribution K. (Voir sur le croquis, la construction graphique des paramètres)

Plan tangent en un point mm' de l'héliçoïde gauche.

Soit mm' le point pris sur la génératrice de front $ab - a'b'$.

La surface est à cône directeur de révolution, et la construction à l'aide du pôle, peut s'appliquer.

Le centre de courbure est le pied z de l'axe.

Le paramètre de tangence sera :

$$q = r\ \frac{tg.\gamma}{tg.\beta}$$

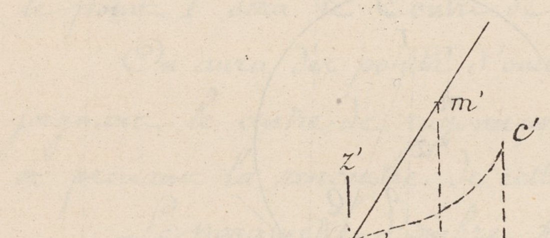
Mais $tg.\gamma = \frac{h}{r}$, donc :

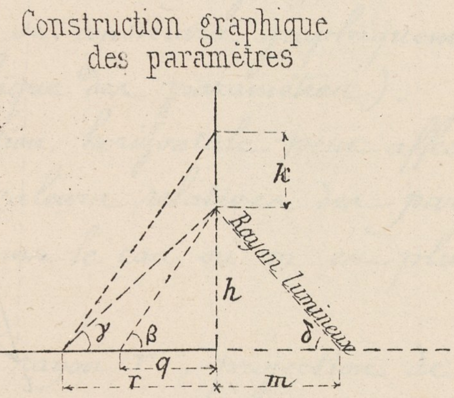
$q = h.\ Cotg.\beta$ facile à construire graphiquement.

Le pôle Q s'obtiendra soit en portant $OQ = q = h\ cotg\ \beta$, soit en faisant la construction donnée plus haut. — On remarquera que le lieu des points Q est précisément le cercle de base du cylindre qui contiendrait l'hélice de striction de l'héliçoïde développable engendré par le plan a'b' projetant verticalement la droite donnée. (Voir héliçoïde développable)

Cet héliçoïde développable sera la développable asymptote de la surface gauche, comme étant l'enveloppe de ses plans tangents à l'infini.

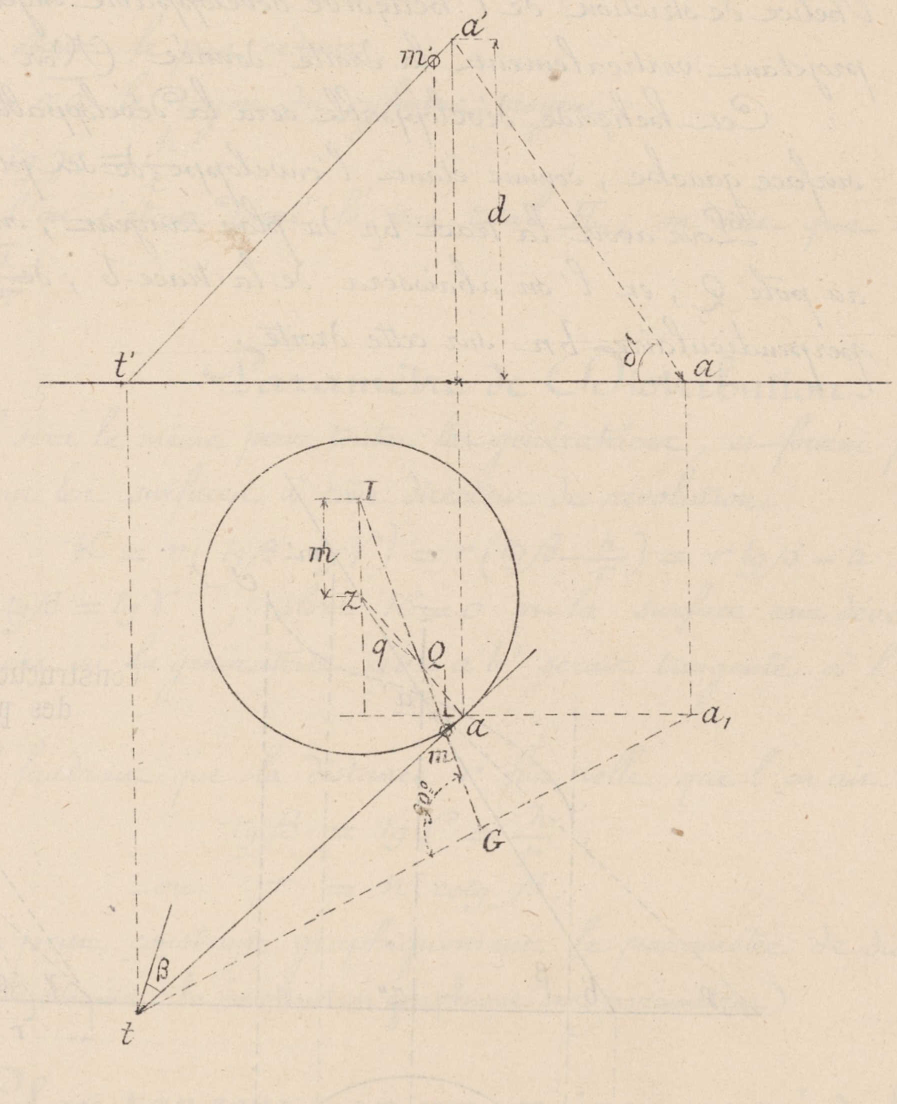
Pour avoir la trace bn du plan tangent, on joindra le point m au pôle Q, et l'on abaissera de la trace b, de la génératrice, une perpendiculaire bn sur cette droite.





Courbe d'ombre de l'Héliçoïde gauche.

Supposons les rayons lumineux parallèles entr'eux et parallèles au plan vertical, ce qui n'enlèvera rien à la généralité de la démonstration. _ Soit δ leur angle avec le plan horizontal. _ Soit a a' un point sur l'hélice de striction. _ at, a't' une génératrice quelconque faisant l'angle β avec le plan horizontal.



On mène un rayon lumineux a a, a'a', par le point a a', ce qui donne en ta, la trace horizontale du plan d'ombre de la génératrice.

Appliquons, en sens inverse, la construction précédente. Abaissons du pôle Q de la génératrice, une perpendiculaire sur ta, et nous aurons en m m' le point de contact.

Cette construction facile peut encore être simplifiée.

Prolongeons en effet cette perpendiculaire GQ, jusqu'en I où elle rencontre la perpendiculaire menée par le centre sur la projection horizontale du rayon lumineux.

Je dis que ZI est une quantité constante.

En effet: Les triangles ZIQ et taa_1 ont leurs côtés perpendiculaires, ils sont donc semblables et donnent:

$$\frac{\overline{IZ}}{\overline{ZQ}} = \frac{\overline{aa_1}}{\overline{ta_1}}.$$

Soit d la cote du point aa', on aura $ZQ = q = h.\operatorname{cotg}\beta$. (Paramètre de tangence)

$$\overline{aa_1} = d \operatorname{cotg}\delta \quad \text{et} \quad \overline{at} = d \operatorname{cotg}\beta.$$

donc: $$\overline{IZ} = \frac{d \operatorname{cotg}\delta \times h.\operatorname{cotg}\beta}{d \operatorname{cotg}\beta} = h.\operatorname{cotg}\delta \quad (\text{Constant})$$

La longueur $\overline{IZ} = m$, se nommera le paramètre d'ombre, et le point I sera le Centre de Rayonnement.

On aura des points d'ombre propre en projection horizontale en joignant le centre de rayonnement au pôle de chaque génératrice et prenant la rencontre de cette droite avec la génératrice.

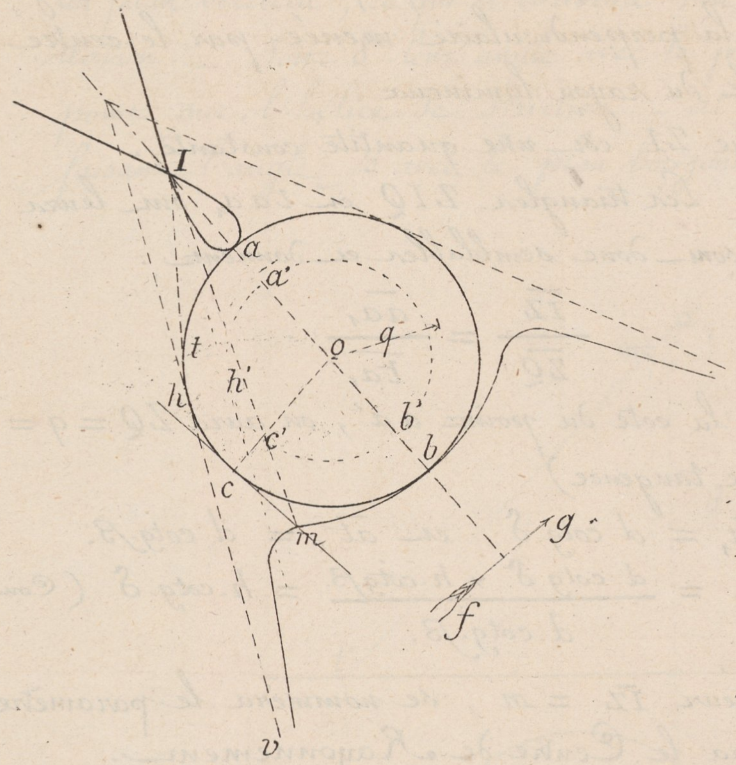
Le paramètre d'ombre, m, se construira graphiquement (voir sur l'épure, la construction graphique des paramètres).

La courbe d'ombre en projection horizontale peut affecter des formes différentes dépendant des valeurs relatives des paramètres, r, q et m. — Construisons-la dans le cas où m est plus grand que r.

Soit $o\,a\,b$, le cercle de rayon r, projection de l'hélice de striction. — $a'c'b'$ le cercle paramétrique décrit avec q pour rayon, et lieu des pôles des génératrices. — Soit encore fg, la projection horizontale d'un rayon lumineux, et I le centre de rayonnement pris sur une perpendiculaire à fg, et o une distance du centre $OI = m = h.\operatorname{Cotg}\delta$.

Supposons que le point I tombe en dehors du cercle de striction. ($m > r$).

On aura un point quelconque de l'ombre en prenant une



génératrice quelconque cm, — joignant le pôle c' de cette génératrice au centre de rayonnement et prolongeant en m jusqu'à la génératrice.

On voit que les points a et b situés sur le cercle de striction et sur la perpendiculaire OI au rayon lumineux appartiennent à la courbe, ainsi que le centre de rayonnement I. — Ce dernier point répond à la génératrice It menée par I tangente au cercle de rayon r.

Si l'on mène la tangente Ih' au cercle paramétrique, et si l'on considère la génératrice hv, parallèle à cette tangente, il y aura un point à l'infini sur cette droite. La courbe présentera la forme indiquée sur le croquis.

Si le point I est dans l'intérieur du cercle de rayon q, la courbe sera fermée, puisque la tangente Ih' ne sera plus possible.

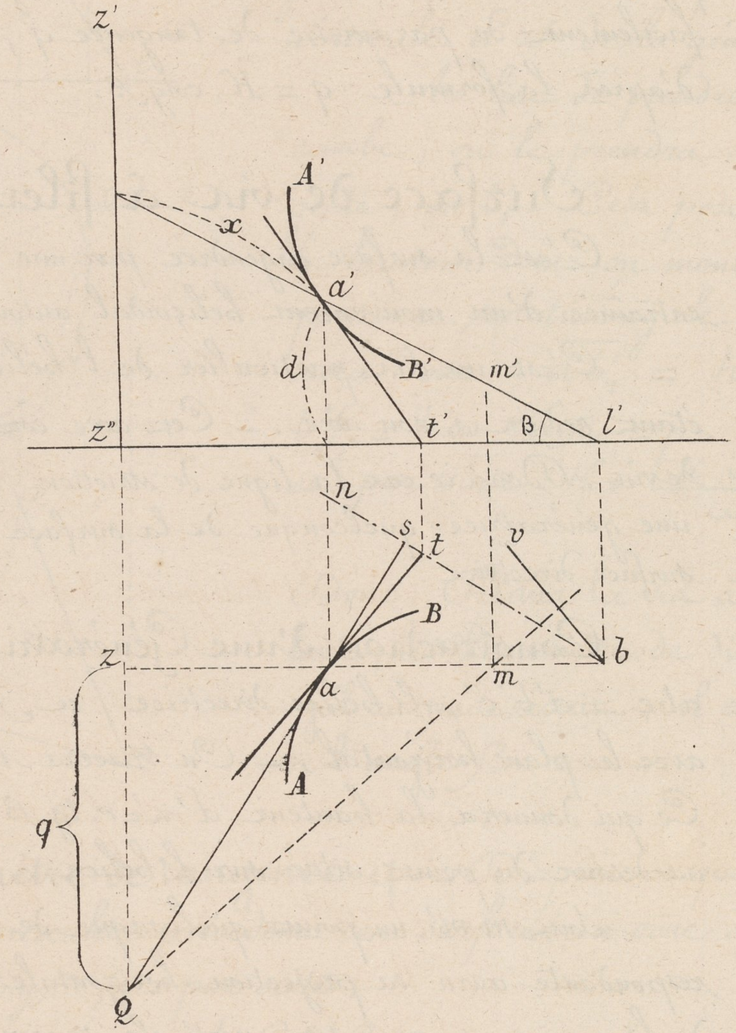
La courbe est symétrique par rapport à la droite OI perpendiculaire sur le rayon lumineux.

Surfaces à cône directeur de révolution dans le Cas particulier où la ligne de striction est un axe perpendiculaire au plan horizontal.

La surface est encore à Cône directeur de révolution, mais sa ligne de striction est une droite verticale $z - z''z'$. Il est nécessaire de donner une directrice, AB, $A'B'$. — Prenons la génératrice de front ab, $a'b'$. — Considérons : 1° le plan tangent au point aa' situé sur la directrice, et 2° le plan tangent en un point quelconque m, m'.

Au point $a\,a'$, la trace $b\,n$ du plan tangent passe par la trace b de la génératrice, et par celle, l, de la tangente à la directrice.

Abaissons du point a une perpendiculaire $a\,s$ sur cette trace $b\,n$, prenons son intersection Q avec la perpendiculaire ZQ, menée par le pied de l'axe, sur la projection horizontale de la génératrice, et calculons QZ.



Les deux triangles $n\,a\,b$, $z\,a\,Q$ sont semblables comme ayant les côtés perpendiculaires et donnent : $\dfrac{zQ}{ab} = \dfrac{z\,a}{an}$, d'où $zQ = \dfrac{ab \times za}{an}$;

Or : $ab = d\ \mathrm{Cotg.}\beta$ (En appelant d la cote du point $a\,a'$).

$za = x\,\underline{\underline{\mathrm{Cos.}}}\,\beta.$ =

En raisonnant comme ci-dessus, on a : $a\,n = d.\mathrm{Cos.}\beta.\mathrm{tg.}\alpha = \dfrac{d.\mathrm{Cos.}\beta.x}{K}$;

donc : $zQ = \dfrac{d.\mathrm{Cotg.}\beta. \times x.\ \mathrm{Cos.}\beta. \times K.}{d.\ \mathrm{Cos.}\beta.x} = K.\ \mathrm{Cotg.}\beta.$

Cette expression est indépendante de x et ne dépend que de l'angle β et du paramètre K qui est constant pour une même génératrice. Le point Q ainsi construit se nomme encore le **Pôle** de la génératrice.

Par conséquent, si pour un point $m.m'$ quelconque nous voulons la trace bv du plan tangent, cette droite sera perpendiculaire à la ligne mQ, qui joint le pôle de la génératrice et la projection horizontale du point. — Le point Q se construira graphiquement, et on déduira facilement du paramètre de tangence q, le paramètre de distribution K, d'après la formule $q = K.\cot g.\beta$. d'où $K = q.\operatorname{tg}.\beta$.

Surface de vis à filet triangulaire.

C'est la surface engendrée par une droite rencontrant un axe et entraînée d'un mouvement héliçoïdal autour de cet axe.

C'est un cas particulier de l'héliçoïde gauche, le cylindre noyau étant réduit à son axe. — Cet axe est la ligne de striction de la surface de vis. Dans ce cas la ligne de striction ne suffit plus pour déterminer une génératrice quelconque de la surface. Il faut donner en outre une surface directrice.

Construction d'une Génératrice. — Soit z, $z''z'$, l'axe ; $abc - a'b'c'$, l'hélice directrice, et β l'angle constant des génératrices avec le plan horizontal ; — On tracera la génératrice de front $az - a'z'$. Ce qui donnera la hauteur $d'z' = r.\operatorname{tg}.\beta$ du point situé sur l'axe au-dessus du point situé sur l'hélice.

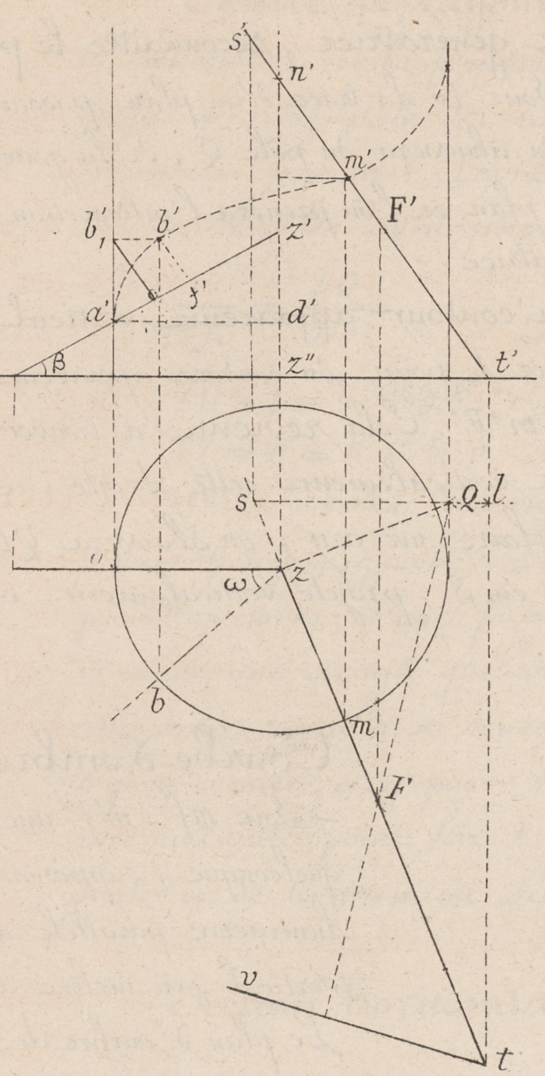
Soit $m\,m'$ un point quelconque de cette hélice. La génératrice correspondante aura sa projection horizontale mz, passant par le pied de l'axe, et sa projection verticale rencontrant l'axe au point n' situé à la hauteur constante $r.\operatorname{tg}.\beta$. audessus du point m'.

Paramètres de distribution et de tangence. —

La formule $K = \rho(\operatorname{tg}.\beta - \operatorname{tg}\gamma)$ n'est plus applicable, parce que $\rho = 0$ et $\operatorname{tg}.\gamma = \infty$. — Cherchons directement $K = \text{Lim.}\,\frac{p}{\sigma}$.

Soit za, $z'a'$, la génératrice de front, et zb la génératrice infiniment voisine ; faisant avec la première un angle σ, projeté horizontalement suivant ω.

Fig. 1.



On sait que l'on a $\sigma = \omega . \cos\beta$.

En raisonnant comme précédemment, on verra que la plus courte distance s'obtiendra en prenant le point bb' infiniment voisin de aa' et cherchant la distance $b'f'$ de sa projection verticale à la projection verticale $a'z'$ de la génératrice.

Au lieu de prendre b' sur la courbe, on le prendra sur sa tangente, en b'_1. Cela posé : $a'b'_1$ est la hauteur dont on monte sur l'hélice pour une rotation égale à ω ; on aura donc : $\overline{a'b'_1} = h\omega$, et $b'_1f' = h.\omega.\cos.\beta. = p$.

et par suite : $K = \dfrac{h.\omega.\cos\beta}{\omega.\cos\beta} = h$.

Donc : Dans la vis à filet triangulaire, le Paramètre de distribution est égal au pas réduit ; il est indépendant de l'angle β.

Paramètre de tangence q. — D'après ce qui a été vu pour le cas particulier précédent des surfaces à cône directeur ; on aura $q = K.\ \mathrm{Cotg}.\beta.$, et par suite :

$$q = h.\ \mathrm{Cotg}.\beta.$$

Il est le même que pour l'héliçoïde gauche.

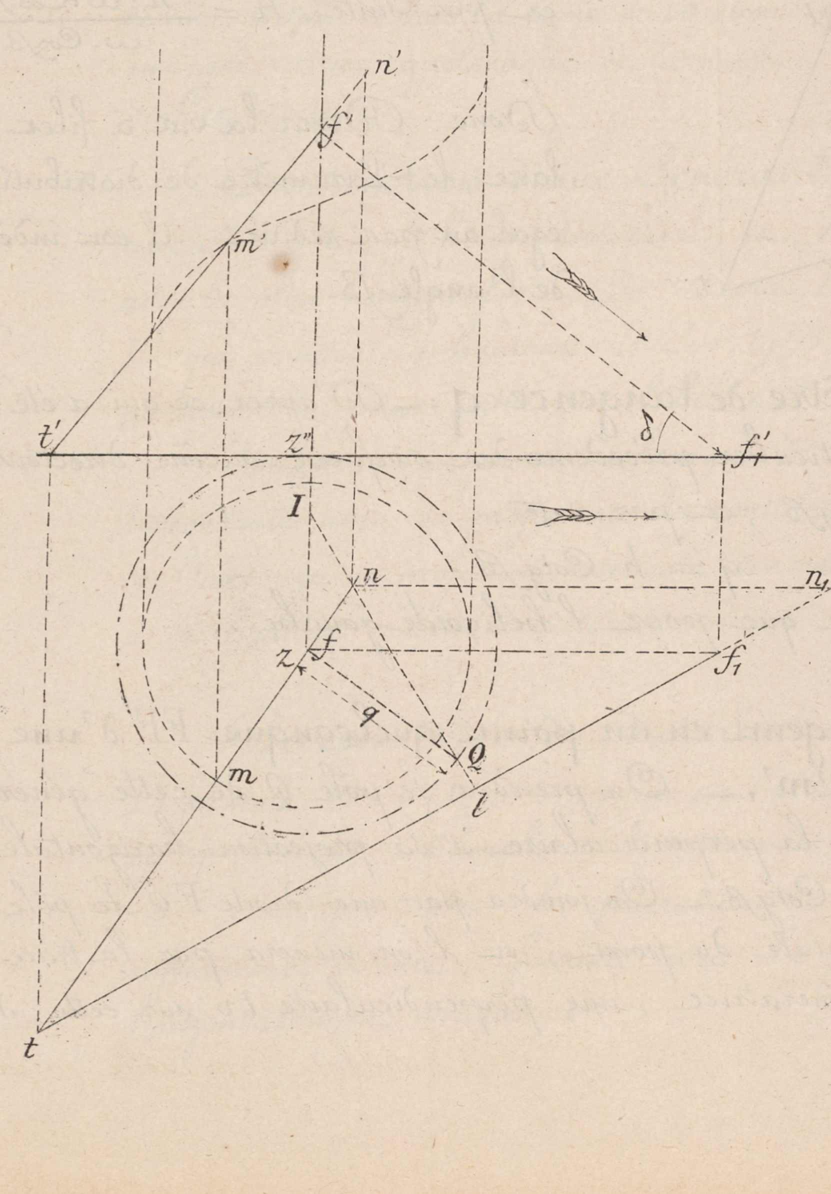
Plan tangent en un point quelconque FF' d'une génératrice zm - z'm'. — On prendra le pôle Q de cette génératrice en portant sur la perpendiculaire à sa projection horizontale, une distance $ZQ = h.\ \mathrm{Cotg}.\beta.$ — On joindra par une droite FQ le pôle à la projection horizontale du point ; et l'on menera par la trace horizontale t de la génératrice, une perpendiculaire tv sur cette droite ;

ce qui donnera la trace horizontale du plan tangent.

Un plan passe par une génératrice, reconnaître le point où il est tangent (fig. 1) — Soit $t\upsilon$ la trace d'un plan passant par la génératrice $mF - m'F'$. — On abaissera du pôle Q, de la génératrice une perpendiculaire sur la trace du plan et l'on prendra l'intersection F de cette perpendiculaire et de la génératrice.

Trouver des points du contour apparent vertical de la surface. (fig. 1). Soit à trouver le point du contour apparent vertical situé sur la génératrice $mF - m'F'$. Cela revient à trouver le point de tangence du plan projetant verticalement cette droite. Sa trace horizontale est tt', perpendiculaire sur xy ; on abaissera Ql, perpendiculaire sur tt' et l'on aura en S, projeté verticalement en S', le point cherché.

Fig. 2.



Courbe d'ombre (fig. 2).

— Soit $mf - m'f'$ une génératrice quelconque ; supposons le rayon lumineux parallèle au plan vertical, et incliné à l'angle δ. Le plan d'ombre de la génératrice aura pour trace horizontale tf_1, ombre portée par la génératrice sur le plan horizontal. — Pour avoir le point de tangence de ce plan, on abaissera du Pôle de la génératrice une perpendiculaire Ql, sur cette trace, et l'on obtiendra en nn', par recoupement avec la génératrice, le point d'ombre propre.

Il serait facile d'en déduire en n_1 un point de l'ombre portée par la surface sur le plan horizontal.

Centre de rayonnement. Prolongeons la droite nQ jusqu'en I, rencontre avec la perpendiculaire abaissée du pied de l'axe sur la projection horizontale des rayons lumineux, et calculons ZI que nous désignerons par m. Les 2 triangles IZQ et tZf_1 sont semblables, car ils ont les cotés perpendiculaires. On en déduit :

$$\frac{IZ}{Zf_1} = \frac{ZQ}{Zt} \quad ; \quad \overline{Zf_1} = \overline{Z''f'}\,\mathrm{Cotg}\,\delta . \qquad \overline{Zt} = \overline{Z''f'}\,\mathrm{Cotg}\,\beta .$$

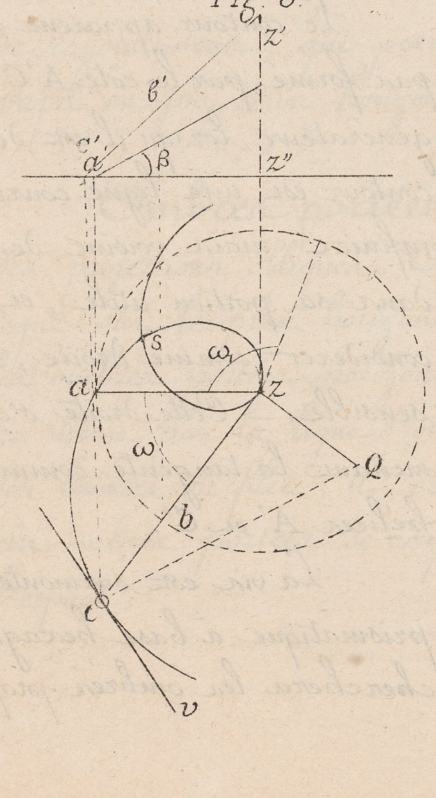
$$\overline{ZQ} = q = h.\,\mathrm{Cotg}\,\beta \quad , \text{ et par suite :}$$

$$IZ = m = h.\,\mathrm{Cotg}\,\delta \qquad (\text{Constant})$$

On se servira donc du point de rayonnement I, comme on l'a fait pour l'héliçoïde gauche. La courbe, lieu des points n, est engendrée géométriquement d'une façon très-simple. — Par un point fixe Z, on mène une sécante quelconque Zn, et une perpendiculaire ZQ à cette droite jusqu'à sa rencontre en Q avec un cercle ZQ ayant le point Z pour centre, et q pour rayon. On joint le point d'intersection Q avec un autre point fixe I, et le point n est à l'intersection de cette droite et de la première sécante.

Section horizontale de la Surface. (fig. 3). — Cherchons la section horizontale passant par le point $a\,a'$.

Fig. 3.



Soit bz, $b'z'$ une génératrice ; ω l'angle qu'elle fait en projection horizontale avec la génératrice $az, a'z'$, et cc' sa trace. — On aura, en désignant zc' par la lettre ρ :

$$\rho = r + \omega h.\,\mathrm{Cotg}\,\beta. ,$$

équation en coordonnées polaires d'une spirale d'Archimède.

ρ s'annule pour $\omega = -\dfrac{r\,tg\beta.}{h} = \omega_1$

Elle présente un premier point double, S ; elle en aurait une infinité d'autres.

La surface peut être considérée

comme engendrée par cette spirale se déplaçant héliçoïdalement. Les points doubles engendreront des lignes doubles de la surface et qui seront des hélices.

La trace du plan tangent en un point cc' est la tangente cv à la spirale qui passerait par ce point.

Menons la normale cQ et la sous-normale zQ, on sait que l'on a :

$$S^s\text{-normale} = \frac{d\rho}{d\omega} = h.\,\mathrm{Cotg.}\beta. = q,$$

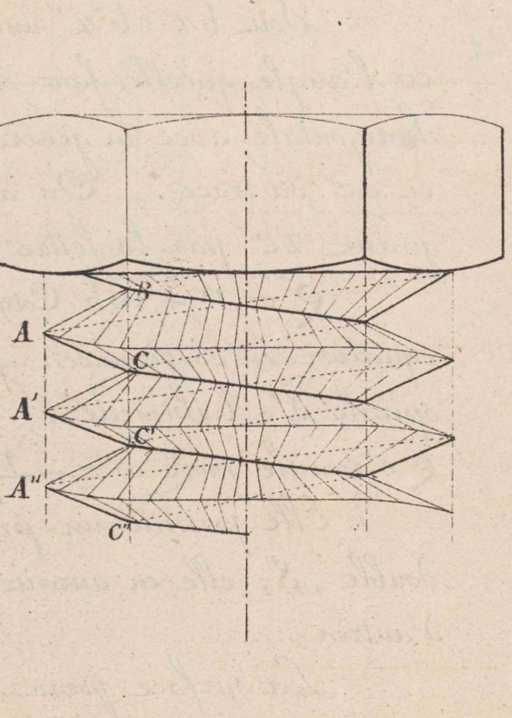
Ce qui permet d'établir d'une autre manière la propriété du pôle Q, d'être le point par lequel passent toutes les lignes de pente des plans tangents aux différents points de la génératrice correspondante à ce pôle.

Représentation d'une vis à filets triangulaires.

Sujet de la 6e Epure. — (Voir le Programme).

Un triangle ABC, ordinairement isocèle, se déplace héliçoïdalement de telle sorte que son plan passe toujours par l'axe du mouvement héliçoïdal.

La vis est à filet simple lorsque le pas est égal à la base BC du triangle. Chacun des côtés AB ou AC, engendre une portion de surface de vis à filet triangulaire. Les points A et C engendrent des hélices de même pas, mais de rayons différents qu'il est facile de tracer.



Le contour apparent vertical n'est pas formé par le côté A'C' du triangle générateur lorsqu'il est de front. Ce contour est une ligne courbe à branches infinies, mais voisine de son asymptote dans sa portion utile, et que l'on peut considérer comme droite, sans erreur sensible. — Cette droite s'obtiendra en menant la tangente commune aux hélices A' et C'.

La vis est surmontée d'une tête prismatique à base hexagonale. On cherchera les ombres propres de la surface, l'ombre portée par la tête prismatique sur les filets et les ombres portées par les filets les uns sur les autres.

A cet effet, on prendra le plan horizontal comme plan auxiliaire d'ombres portées. — On choisira sur les grandes et les petites hélices des points équidistants répondant chacun à une même position du triangle générateur, on les numérotera soigneusement et on en cherchera les ombres portées sur le plan horizontal. En joignant les ombres des points appartenant à une même hélice, on aura l'ombre portée de cette hélice. — La courbe ainsi obtenue sera une **cycloïde**. — En joignant par des droites les ombres portées par tous les points se répondant, mais situés les uns sur la grande et les autres sur la petite hélice, on aura les ombres portées par les génératrices de la surface. — Prenant l'enveloppe de ces droites, on aura l'ombre portée par la vis sur le plan horizontal. Il pourra se faire que la courbe enveloppe ainsi obtenue soit tangente aux droites en dehors des portions utiles de ces dernières. Dans ce cas l'ombre portée sera limitée aux cycloïdes d'ombre des grandes hélices; sinon l'ombre portée horizontalement sera plus complexe, et en remontant par des rayons lumineux inverses, des points de contact de l'enveloppe, aux points situés sur les génératrices dans l'espace, on en déduira l'ombre propre de la vis.

Comme vérification on appliquera la construction par le centre de rayonnement, qui permet de trouver facilement la courbe d'ombre propre en projection horizontale.

Ombres portées sur la Vis. — On appliquera la méthode des projections obliques. On cherchera l'ombre portée par la tête prismatique sur le plan horizontal, et comme on aura trouvé précédemment les ombres portées horizontalement par les hélices, par les génératrices, et même par la ligne d'ombre propre de la surface, si elle existe dans les limites du filet, il sera facile de remonter des points où toutes ces ombres portées se coupent, aux points d'ombres portées dans l'espace.

Héliçoïde gauche à Plan Directeur.

C'est la surface engendrée par une droite entraînée dans un mouvement héliçoïdal, autour d'un axe qui lui est perpendiculaire sans la rencontrer.

On voit que c'est un cas particulier de l'héliçoïde gauche.

Les génératrices sont tangentes à un cylindre noyau. Leur point de tangence décrit sur le cylindre une hélice qui est à la fois la ligne de striction et le contour apparent horizontal de la surface.

Paramètre de Distribution. — Soit γ l'angle de l'hélice de striction avec le plan horizontal ; — h, le pas réduit ; — r le rayon du cylindre noyau.

On a : $\quad tg.\, \gamma = \dfrac{h}{r}$.

On aura $\quad K = r\,(tg.\beta - tg\,\gamma) \quad = -r\, tg.\,\gamma \; = -h$.

Le paramètre de tangence $\;q = r\; cotg.\,\beta\;$ devient infini.

La trace du plan tangent s'obtiendra en appliquant le théorème donné pour les surfaces à plan directeur. Nous savons que : — le pied de l'axe, — la projection du point, — la trace horizontale de la tangente à la ligne de striction — le point de la trace horizontale du plan tangent situé sur la normale à la ligne de striction —,

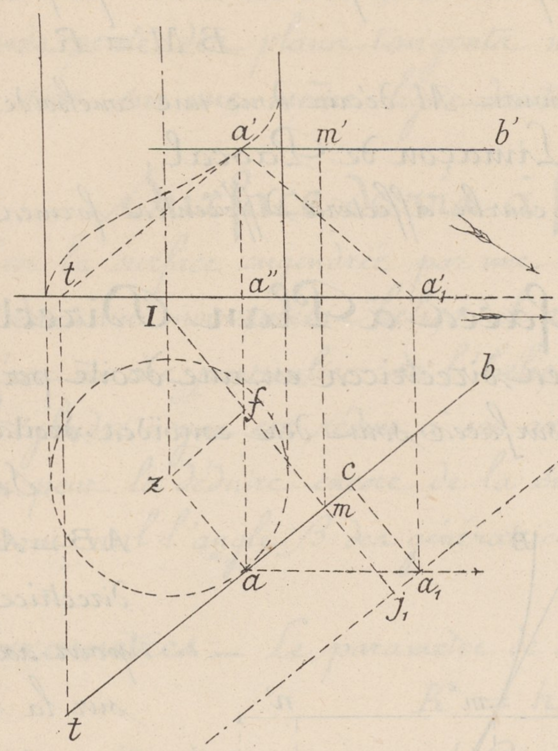
Sont sur un même cercle.

Courbe d'ombre. — Soit $ab - a'b'$ une génératrice quelconque. Le rayon lumineux est parallèle au plan vertical et incliné à l'angle δ.

Soit $a_1 b_1$ la trace horizontale du plan d'ombre de la génératrice.

En généralisant le tracé géométrique donné pour l'héliçoïde gauche, on prendra le point I, à une distance du centre $m = ZI = h\ Cotg.\,\delta$ sur une perpendiculaire au rayon lumineux. Ce sera le point de rayonnement : On joindra le point I au pôle de la génératrice ; mais ce pôle est situé à l'infini sur une perpendiculaire à cette génératrice. Cela reviendra donc à mener par le point I une perpendiculaire sur la génératrice et à prendre son intersection m avec cette génératrice.

On peut démontrer directement que la perpendiculaire $m\,v$, menée



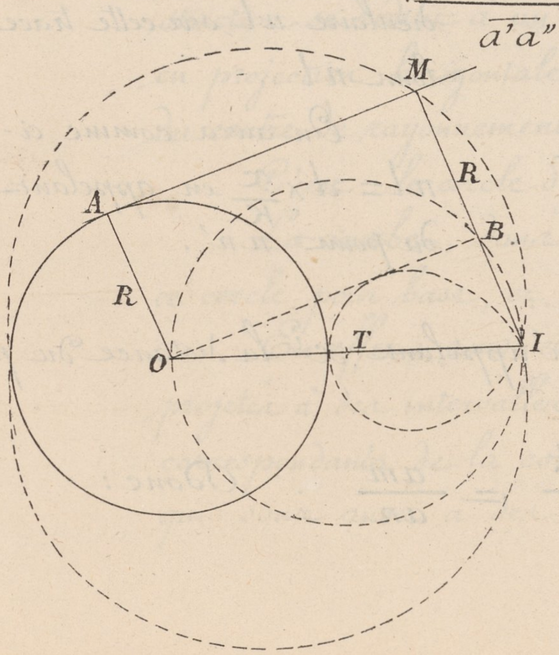
sur la trace $a_1 b_1$ du plan tangent passe par le point fixe I. En effet : Les 2 triangles ZIf et aa_1c sont semblables, et donnent :

$$\frac{ZI}{Zf} = \frac{aa_1}{ca_1} \quad ; \text{ or } \quad Zf = am \quad ; \text{ c'est l'} x \text{ du point } m.$$

$$ca_1 = \overline{a'a''}\ \mathrm{tg.}\ \alpha = \frac{\overline{a'a''}.x}{K}, \text{ et puisque } K = h,$$

$$ca_1 = \frac{\overline{a'a''}.x}{h}, \quad \text{et} \quad aa_1 = a'a''.\ \mathrm{Cotg.}\ \delta,$$

$$\text{donc} \qquad ZI = \frac{x \times \overline{a'a''}\ \mathrm{Cotg}\ \delta}{\overline{a'a''}\ \dfrac{x}{h}} = h.\ \mathrm{Cotg.}\ \delta \qquad \text{(Constant)}$$



La courbe, en projection horizontale, a une génération géométrique très-simple. C'est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe I sur les tangentes à un cercle.

Il est facile de reconnaître la nature de cette courbe. — En effet, soit O, le centre du cercle fixe de rayon $OA = R$, et I, le point fixe.

Prenons un point M du lieu.

Décrivons le cercle sur OI comme

diamètre, et prenons le point B où la perpendiculaire IM rencontre ce cercle.

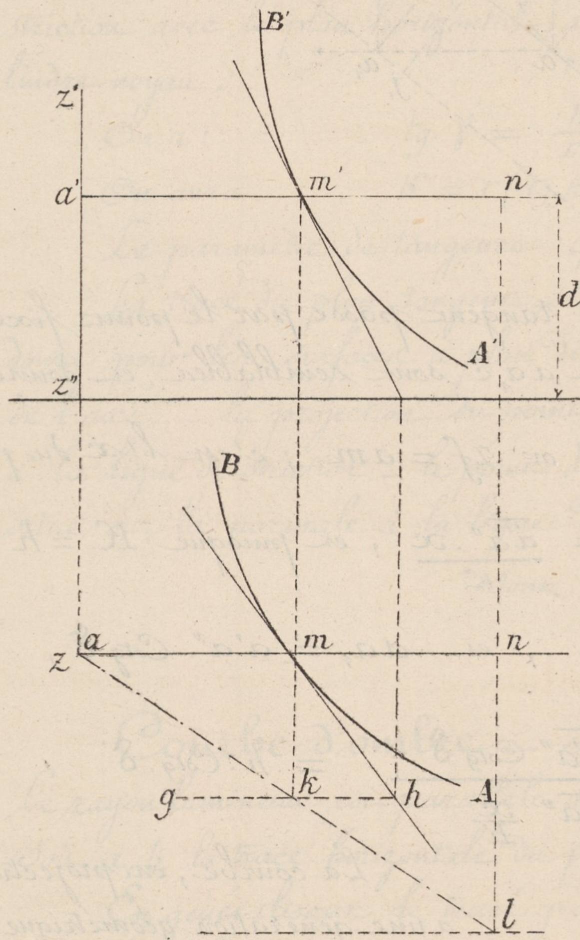
On a : $$BM = R.$$

Le point M décrit donc une conchoïde du cercle OI, connue sous le nom de Limaçon de Pascal.

Cette courbe affectera différentes formes suivant la position du point I.

Surfaces à Plan Directeur. — Cas particulier où l'une des directrices est une droite perpendiculaire au plan directeur.

Ces surfaces sont des conoïdes droits.



Soit Z, Z''Z' une droite verticale, et AB — A'B' une courbe servant de directrice à un conoïde ayant Z, Z''Z' pour axe. — En un point m m' pris sur la directrice, le plan tangent a pour trace horizontale une droite gh, parallèle à am et passant par la trace horizontale h de la tangente en m à la directrice. — Abaissons mK perpendiculaire sur cette trace.

Soit n n' un autre point situé à la distance x du point central a situé sur l'axe ; et soit lt la trace du plan tangent en ce point.

Abaissons de même la perpendiculaire nl sur cette trace, et calculons nl.

On aura comme ci-dessus :
$$nl = d \times \frac{x}{K}$$ en appelant d la cote du point n n'.

On aurait eu de même :
$$mk = \frac{d \times x'}{K},$$ en appelant x' la distance du point m.

Et par suite :
$$\frac{mk}{ml} = \frac{am}{an}. \quad \text{Donc :}$$

Dans un conoïde droit, les traces horizontales des lignes de plus grande pente des plans tangents menées par les points de tangence sont sur une même ligne droite passant par le pied de l'axe.

Surface de vis à filet carré.

C'est la surface engendrée par une droite rencontrant un axe et entraînée dans un mouvement hélicoïdal autour de cet axe.

C'est un cas particulier de l'hélicoïde à plan directeur.

Le cylindre noyau est réduit à son axe.

On peut la déduire encore de la surface de vis à filet triangulaire en supposant nul l'angle β des génératrices et du plan horizontal.

Paramètres. — Le paramètre de distribution sera encore :

$$K = h.$$

Le paramètre de tangence $q = h.\text{Cotg}.\beta$ devient infini.

Le paramètre d'ombre $m = h.\text{Cotg}\,\delta$ reste le même que pour les autres surfaces hélicoïdes.

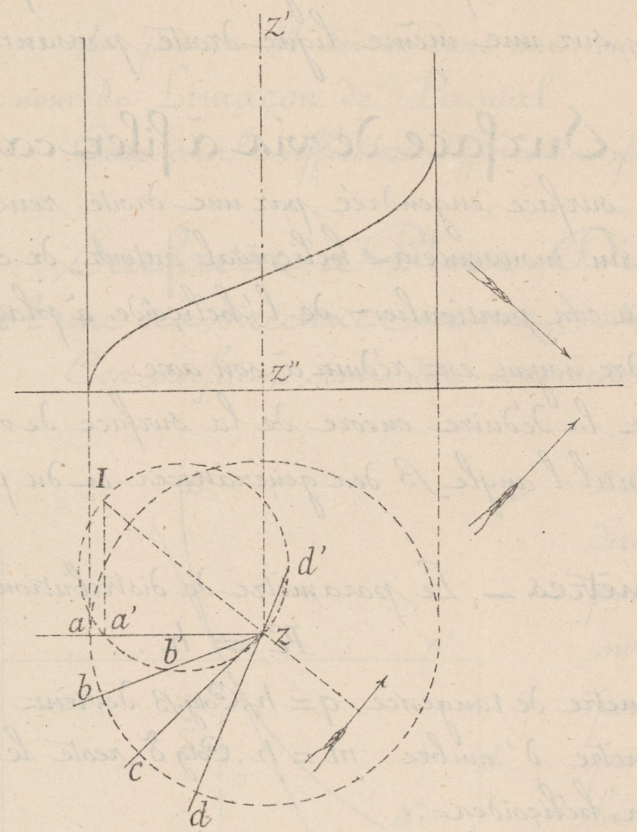
Plan tangent. — Le plan tangent se construira en appliquant ce qui vient d'être dit pour les conoïdes droits. On se servira donc de la tangente à l'hélice directrice.

Courbe d'ombre. — Déduisant sa construction de celle donnée pour l'hélicoïde à plan directeur, Le cercle projection de l'hélice de striction se réduit à un point qui est le pied de l'axe ; — Et la courbe, en projection horizontale est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de rayonnement Q, sur les droites passant par le point z.

C'est le cercle décrit sur zQ comme diamètre.

La courbe, dans l'espace, est l'intersection du cylindre qui aurait ce cercle pour base, et de la surface de vis. Je dis que c'est une hélice.

En effet ; considérons sur l'hélice directrice des points $a, b, c\ldots$ projetés à des intervalles égaux sur la circonférence de base. Les points correspondants de la courbe d'ombre seront projetés en $a'b'c''\ldots$ qui sont aussi à des intervalles égaux sur la seconde circonférence



De plus, les hauteurs successives dont se sont élevés les points $a' b' c' \ldots$ sont égales et par suite la courbe dans l'espace est une hélice.

Son pas est moitié de celui de l'hélice directrice, car les points $a' b' c'$ font deux tours quand les points $a . b . c .$ n'en font qu'un.

Contour apparent vertical. —

On l'obtiendra comme cas particulier du problème précédent ; — on supposera que les rayons lumineux, qui deviennent, ici, des rayons visuels, sont perpendiculaires au plan vertical.

Le paramètre d'ombre $m = h . \operatorname{Cotg} \delta$, puisque $\delta = 0$, devient infini.

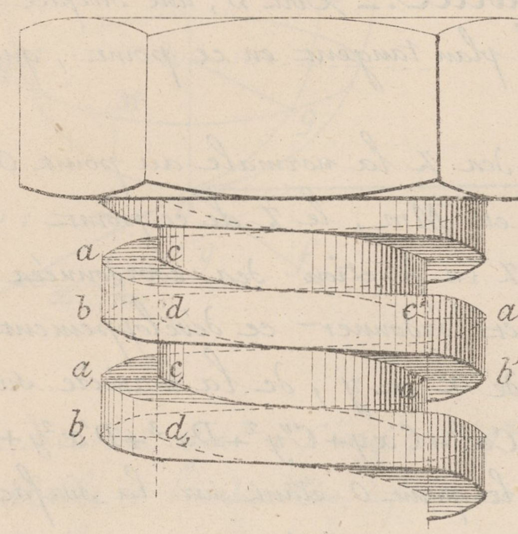
Le centre de rayonnement I est rejeté à l'infini sur une parallèle à la ligne de terre ; et les pieds des perpendiculaires abaissées sur les projections des génératrices, sont à l'infini sur ces droites.

Le contour apparent vertical est donc tout entier à l'infini, c'est-à-dire qu'il n'existe pas.

Ce résultat se prévoyait facilement, puisque les plans projetant verticalement les génératrices, étant parallèles au plan horizontal qui est le plan directeur, sont tangents à l'infini.

Représentation d'une vis à filets carrés.

— Un carré $a\, b\, c\, d$ qui se déplace héliçoïdalement de telle sorte que son plan passe toujours par l'axe du mouvement héliçoïdal, engendre une vis à filets carrés. — La vis est à filets simple lorsque le pas est égal à la hauteur, ab, du carré.



On représentera les grandes hélices a a' — b b' et les petites hélices c c' — d d'. La vis fait saillie sur un noyau cylindrique.

Les ombres se tracent facilement en ayant recours à la méthode des projections obliques.