

# Helicoïdes réglés.

181.

Avant d'aborder la Théorie des Helicoïdes, nous étudierons quelques propriétés des surfaces à plan directeur horizontal, ou à cône directeur de révolution et à axe vertical, définies par leur ligne de striction.

Surface gauche à plan directeur, définie par sa ligne de striction.

Théorème de M. O. Bonnet. — Dans une surface à plan directeur horizontal, dont on connaît la ligne de striction :

- 1°. La projection horizontale d'un point  $m$  d'une génératrice ;
  - 2°. Le centre de courbure de la projection horizontale de la ligne de striction, au point où la génératrice précédente est tangente à cette ligne en projection ;
  - 3°. La trace horizontale de la tangente à la ligne de striction de l'espace, au point où elle est rencontrée par la génératrice ;
  - 4°. Le point où la trace horizontale du plan tangent rencontre la normale à la ligne de striction projetée horizontalement :
- Sont sur un même cercle.

Nous savons que lorsque le plan directeur est horizontal, la ligne de striction est le contour apparent horizontal de la surface.

Soit  $AB - A'B'$  la ligne de striction ; les génératrices seront donc tangentes à cette ligne, en projection horizontale.

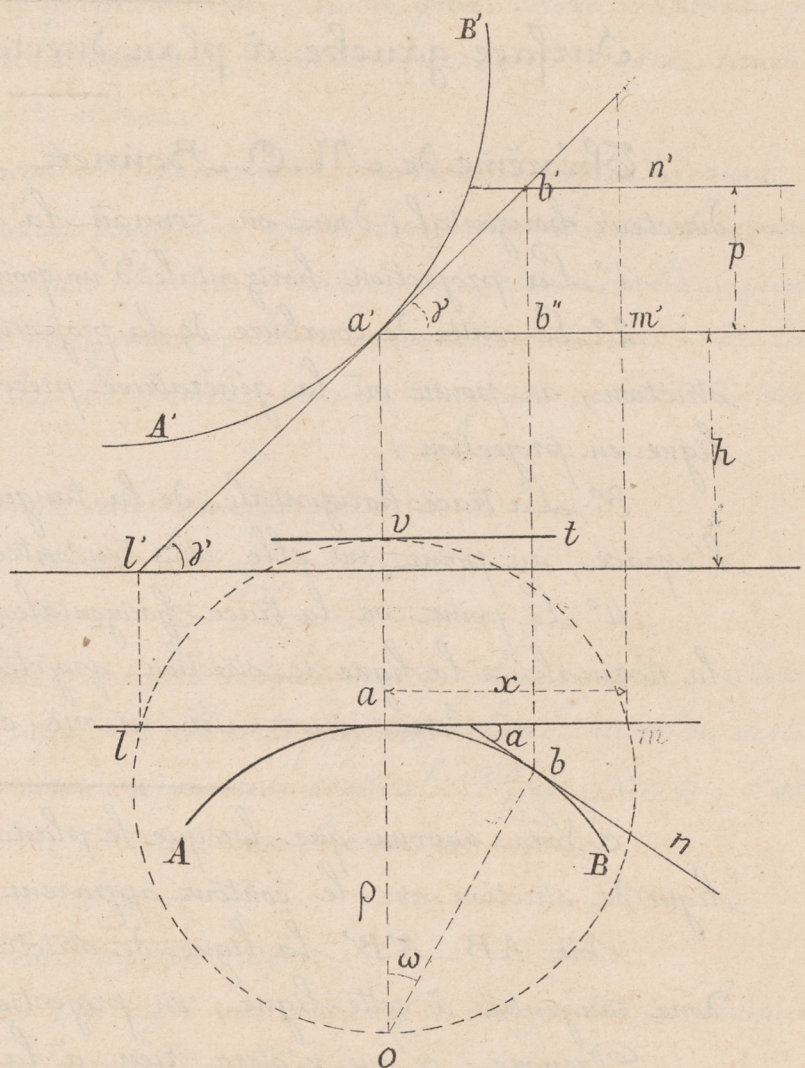
Prenons, ce qui n'ôtera rien à la généralité de la démonstration, le point  $aa'$  pour lequel la tangente est parallèle à la ligne de terre, car si le point est quelconque on pourra toujours prendre un nouveau plan vertical parallèle à la tangente en ce point. Nous aurons en  $am, a'm'$  une génératrice. — La génératrice infiniment voisine serait  $bn, b'n'$ . — Menons les normales  $ao - bo$ , ce qui donne en  $O$ , le centre de courbure. — Prenons la trace horizontale  $ll'$  de la tangente à la ligne de striction au point  $aa'$ .

Supposons que le plan tangent en  $mm'$  soit construit ; soit  $vt$

sa trace horizontale parallèle à  $am$ . — Et soit  $v$  le point de cette trace situé sur le prolongement de la normale  $oa$ .

Le point  $a$  étant le point central, le plan central, en  $a$  est perpendiculaire au plan directeur ; — c'est le plan projetant horizontalement  $am$ .

Le point  $m$  est à une distance  $x$ , du point central, mesurée en vraie grandeur en  $am$ .



Soit  $\alpha$  l'angle du plan tangent en  $m$  avec le plan central, il est facile de voir que si  $h$  est la cote du point  $a a'$ , on aura

$$\overline{av} = h \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Or, d'après la formule de Chasles,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\kappa}$

donc :

$$\overline{av} = h \times \frac{x}{\kappa}.$$

Se dit que les 4 points  $l, v, m, o$  sont sur un même cercle; il suffit pour cela de démontrer que l'on a :

$$\overline{av} \times \overline{ao} = \overline{al} \times \overline{am}.$$

Nous évaluerons ces quantités et nous prouverons que nous arrivons à une identité.

Soit  $\gamma$  l'angle de la tangente  $a'l'$ , avec la ligne de terre, on aura :

$$\overline{al} = h \cotg \gamma, \quad am = x, \quad av = \frac{hx}{K}.$$

$\overline{ao} = \rho$ . (rayon de courbure) et par suite, en remplaçant dans les produits,

$$\frac{hx}{K} \times \rho = h \cdot \cotg \gamma \times x.$$

Supprimons les facteurs communs, il suffira de prouver que :

$$\frac{\rho}{K} = \cotg \gamma, \quad \text{ou que } K = \rho \cdot \tg \gamma.$$

Évaluons le paramètre de distribution  $K$ ; on a :

$$K = \lim \frac{P}{\sigma}.$$

Sur la figure :  $p = \overline{b'b''} = \overline{a'b''} \cdot \tg \gamma.$

En négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, on peut prendre

$$a'b'' = \text{arc } \overline{ab} = \int \omega.$$

L'angle  $\sigma$  des 2 génératrices infiniment voisines se mesure en projection horizontale et est égal à  $\omega$ .

On aura donc :

$$K = \frac{P}{\sigma} = \frac{\rho \omega \cdot \tg \gamma}{\omega} = \rho \cdot \tg \gamma. \text{ ce qu'il fallait prouver}$$

Nous obtenons une identité et le théorème est démontré.

Remarque. — Le paramètre de distribution  $K$  a pour expression

$$K = \rho \cdot \tg \gamma,$$

$\rho$  et  $\gamma$  ayant le sens que nous venons de voir dans la démonstration précédente.

Discussion de l'Expression  $K = \rho \tg \gamma$ .

1°. Pour  $\tg \gamma = 0$ , et  $\gamma = 0$ , c'est-à-dire pour le point le plus haut ou le plus bas de la ligne de striction. — On aura :

$$K = 0, \quad \text{et } \tg \alpha = \frac{x}{K} = \infty.$$



Se dit que les 4 points  $l, v, m, o$  sont sur un même cercle; il suffit pour cela de démontrer que l'on a :

$$\overline{av} \times \overline{ao} = \overline{al} \times \overline{am} .$$

Nous évaluerons ces quantités et nous prouverons que nous arrivons à une identité.

Soit  $\gamma$  l'angle de la tangente  $a'l'$ , avec la ligne de terre, on aura :

$$\overline{al} = h \cotg \gamma , \quad am = x , \quad av = \frac{hx}{K} .$$

$\overline{ao} = \rho$ . (rayon de courbure) et par suite, en remplaçant dans les produits,

$$\frac{hx}{K} \times \rho = h \cdot \cotg \gamma \times x .$$

Supprimons les facteurs communs, il suffira de prouver que :

$$\frac{\rho}{K} = \cotg \gamma , \quad \text{ou que } K = \rho \cdot \tg \gamma .$$

Évaluons le paramètre de distribution  $K$ ; on a :

$$K = \lim \frac{P}{\sigma} .$$

Sur la figure :  $p = \overline{b'b''} = \overline{a'b''} \cdot \tg \gamma$ .

En négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, on peut prendre

$$a'b'' = \text{arc } \overline{ab} = \rho \omega .$$

L'angle  $\sigma$  des 2 génératrices infiniment voisines se mesure en projection horizontale et est égal à  $\omega$ .

On aura donc :

$$K = \frac{P}{\sigma} = \frac{\rho \omega \cdot \tg \gamma}{\omega} = \rho \cdot \tg \gamma . \text{ ce qu'il fallait prouver}$$

Nous obtenons une identité et le théorème est démontré.

Remarque. — Le paramètre de distribution  $K$  a pour expression

$$K = \rho \cdot \tg \gamma ,$$

$\rho$  et  $\gamma$  ayant le sens que nous venons de voir dans la démonstration précédente.

Discussion de l'Expression  $K = \rho \tg \gamma$ .

1°. Pour  $\tg \gamma = 0$ , et  $\gamma = 0$ , c'est-à-dire pour le point le plus haut ou le plus bas de la ligne de section. — On aura :

$$K = 0 , \quad \text{et } \tg \alpha = \frac{x}{K} = \infty .$$

Le plan tangent sera le même en tout les points et à l'infini.  
On aura une génératrice singulière.

2°. Supposons que l'on ait :  $\text{tg } \gamma = \infty$ .

Pour ce point, la tangente à la ligne de striction dans l'espace est verticale ; — mais alors la projection horizontale présente un rebroussement, et  $\rho$  peut être nul : on aurait dans ce cas :

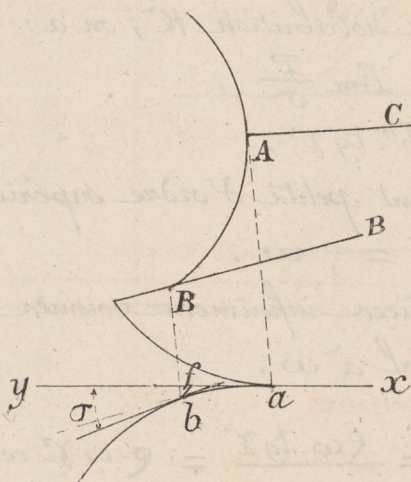
$K = 0 \times \infty$  ; forme indéterminée. Est-ce possible ?

Soit  $AB$  la courbe de l'espace ; —  $ab$  sa projection tangente en  $a$ , avec un rebroussement à la trace  $XY$  du plan osculateur.

Soit  $AC$  et  $BD$ , 2 génératrices de la surface, leur distance est mesurée par l'arc  $AB = \theta$  de l'espace et est du 1<sup>er</sup> ordre ; leur angle  $\sigma$  est mesuré horizontalement par l'angle de  $XY$  et de la tangente au point  $b$ .

Abaissons  $bf$  perpendiculaire sur  $XY$ .

On aura :  $bf = ab \times \sigma$  et  $\sigma = \frac{bf}{ab}$ .



$bf$  est du 3<sup>e</sup> ordre. C'est la distance d'un point d'une courbe à son plan osculateur.

$ab$ , projection de  $AB$ , est du 2<sup>e</sup> ordre, puisque la tangente en  $A$  est verticale. —  $ab$  est la distance d'un point de la courbe à sa tangente. — Donc  $\sigma$  est du 1<sup>er</sup> ordre et le rapport  $K = \frac{\rho}{\sigma}$  est fini. — Donc :

La génératrice répondant au point où la tangente à la ligne de striction est verticale, n'est pas singulière.

3°.  $\rho = \infty$ . — La ligne de striction présente une inflexion en projection horizontale. Le plan osculateur de la courbe de l'espace est vertical ; —  $\rho = \infty$   $\text{tg } \gamma$  est fini, et

$$K = \rho \text{tg } \gamma = \infty \quad \text{—} \quad \text{tg } \alpha = \frac{x}{K} = 0.$$

Le plan tangent est le même en tout les points et au point central. — La génératrice est encore singulière.

## Surfaces à Cône directeur de révolution, définies par leur ligne de striction. —

### Expression du Paramètre de distribution.

Supposons que l'axe du cône soit vertical : — On sait que dans ce cas, la ligne de striction est encore la ligne de contour apparent horizontale.

Soit  $\beta$  l'angle constant des génératrices avec le plan horizontal, en  $\gamma$  l'angle formé avec le plan horizontal par la tangente à la ligne de striction au point où elle rencontre une génératrice ; —  $\rho$  le rayon de courbure de la ligne de striction en projection horizontale. Je dirai que l'on aura :  $K = \rho (\tan \beta - \tan \gamma)$ .

Pour le démontrer, supposons le plan vertical parallèle à la génératrice considérée.

Soit  $AB$ ,  $A'B'$  la ligne de striction ;  $a, a'$  un point de cette ligne ;

$at$ ,  $a't'$  la tangente en ce point ;  $\gamma$  son angle avec le plan horizontal ;

$am$ ,  $a'm'$  une génératrice, et  $\beta$  son angle avec le plan horizontal.

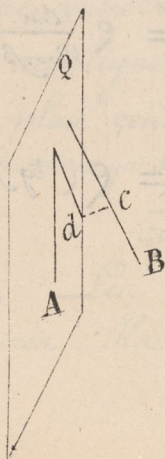
Il faut évaluer

$$K = \lim. \frac{p \text{ (plus courte distance)}}{\sigma \text{ (angle de 2 génératrices voisines)}}$$

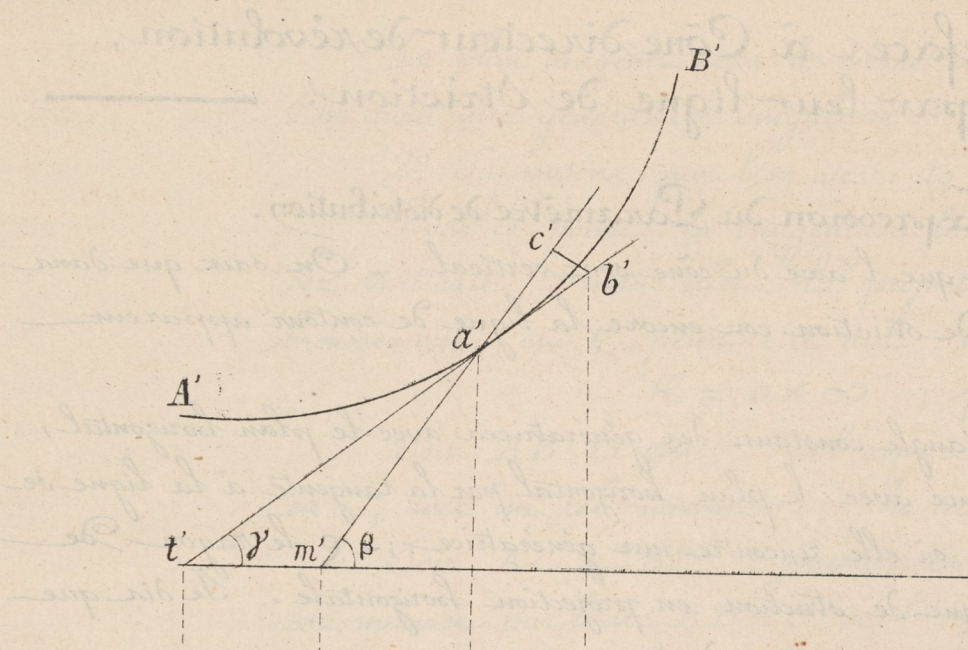
Soit  $bn$  la génératrice infiniment voisine, —  $\omega$  leur angle en projection horizontale : Nous avons vu à l'occasion du rayon de courbure de l'hélice, que l'angle  $\sigma$  de l'espace avait pour expression :

$$\sigma = \omega \cdot \cos \beta.$$

Évaluons la plus courte distance  $p$ . Il suffit pour cela d'évaluer la distance d'un point  $C$  de l'une des droites, au plan  $Q$  mené par l'autre et parallèlement à la première.



Or, dans le cas actuel, le plan mené par la génératrice  $am$   $a'm'$ , parallèlement à la génératrice infiniment voisine est tangent à l'infini, et,



Nous prendrons sur la génératrice infiniment voisine, le point  $b$  où elle rencontre les lignes de striction. Sa projection verticale sera  $b'$ , située, en négligeant d'infiniment petite d'ordre supérieur sur la tangente  $b't'$  au lieu d'être sur la courbe.

de la génératrice, est la plus courte distance cherchée.

$$b'c' = \overline{a'b'} \cdot \sin.(\beta - \gamma) ;$$

$$\overline{a'b} = \frac{\overline{ab}}{\cos \gamma}, \text{ et par suite,}$$

$$\overline{b'e'} = p = \frac{\overline{ab} \cdot \sin(\beta - \gamma)}{\cos \gamma}$$

Main  $\overline{ab} = wq$  ; June

$$K = \frac{p}{\sigma} = \frac{\omega R \cdot \sin(\beta - \gamma)}{\cos \gamma \cdot \omega \cos \beta} = R \cdot \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cdot \cos \gamma}$$

$$K = \rho \cdot \frac{\sin \beta \cdot \cos \gamma - \cos \beta \cdot \sin \gamma}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} = \rho (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma)$$

C. G. F. D.

Discussion. — 1°  $\text{tg} \beta = \text{tg} \gamma$ .

La génératrice est tangente à la ligne de striction.

$K = 0$ . Le plan tangent est le même en tous les points et à l'infini. La génératrice est singulière.

Pour le point central, le plan tangent est indéterminé.

2°  $\text{tg} \beta = \infty$ . Impossible, puisque l'angle  $\beta$  est constant.

3°  $\text{tg} \gamma = 0$ . La tangente à la ligne de striction est verticale. Cette ligne présente un rebroussement en projection horizontale, et  $\rho$  peut être nul, ce qui donnerait  $K = 0 \times \infty$ , (forme indéterminée). — On verra comme ci-dessus, que  $p$  et  $\sigma$  sont de même ordre et que  $K = \lim \frac{p}{\sigma}$  a une valeur finie. On n'a donc pas pour ce point de génératrice singulière.

4°  $\rho = \infty$ .

La courbe de striction présente une inflexion en projection horizontale. Son plan osculateur est vertical.

$$K = \infty \quad \text{tg} \alpha = 0 :$$

Le plan tangent est le même en tous les points et au point central. La génératrice est singulière.

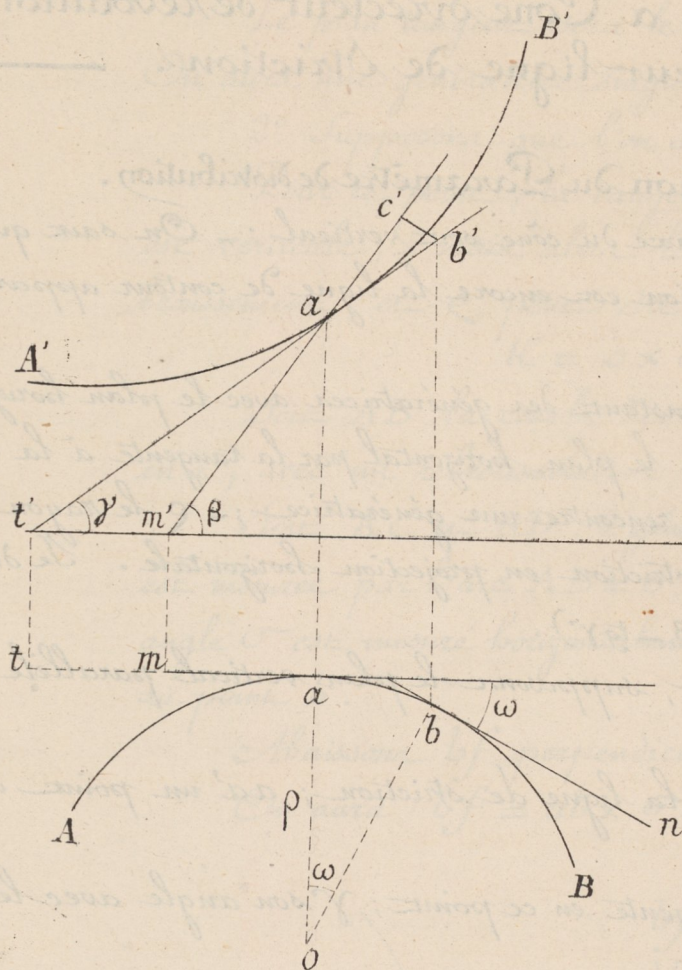
### Plan tangent en un point $cc'$ d'une Génératrice.

Soit  $md$ , la trace horizontale de ce plan. Elle passera par la trace horizontale  $m$  de la génératrice. — Abaissons du point  $c$ , projection du point, une perpendiculaire sur cette trace, et soit  $Q$  le point où elle rencontre la normale à la ligne de striction. — Soit  $O$  le centre de courbure, et  $\rho$  le rayon de courbure de la ligne de striction au point  $a$ . Calculons la distance  $OQ = q$ .

Si nous menons  $cd$  perpendiculaire sur  $mc$ , cette ligne peut être considérée comme la trace horizontale du plan  $d c' f'$  qui déterminerait le rectiligne du dièdre formé par le plan projetant la génératrice (c'est le plan central) et par le plan tangent au point  $cc'$ . — Effectuons la construction connue qui donnerait cet angle  $\alpha$ . — Nous aurons, en appelant  $d$ , la cote du point  $cc'$  :

$$\overline{cd} = \overline{cf'} \cdot \text{tg} \alpha = c'f' \cdot \text{tg} \alpha = d \cos \beta \cdot \text{tg} \alpha.$$

Les 2 triangles  $cdm$  et  $acQ$  ont leurs côtés perpendiculaires. Ils sont semblables et donnent  $\frac{aQ}{mc} = \frac{ac}{cd}$ , d'où l'on tire :



perpendiculaire au plan central; par suite, comme ce dernier est le plan projetant horizontalement  $am$ , c'est le plan  $a'm'$  projetant verticalement la génératrice, et projeté tout entier suivant sa trace verticale  $m'a'$ .

Nous prendrons sur la génératrice infiniment voisine, le point  $b$  où elle rencontre les lignes de striction. Sa projection verticale sera  $b'$ , située, en négligeant d'ordre infiniment petit d'ordre supérieur sur la tangente  $b't'$  au lieu d'être sur la courbe.

La perpendiculaire  $b'c'$  abaissée sur la projection verticale

de la génératrice, est la plus courte distance cherchée.

On a:  $b'c' = \overline{a'b'} \cdot \sin(\beta - \gamma);$

Mais  $\overline{a'b} = \frac{\overline{ab}}{\cos \gamma};$  en par suite,

$$\overline{b'c'} = p = \frac{\overline{ab} \cdot \sin(\beta - \gamma)}{\cos \gamma}$$

Mais

$$\overline{ab} = \omega \rho; \text{ donc:}$$

$$K = \frac{p}{\sigma} = \frac{\omega \rho \cdot \sin(\beta - \gamma)}{\cos \gamma \times \omega \cos \beta} = \rho \cdot \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma}$$

$$K = \rho \cdot \frac{\sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma}{\cos \beta \cos \gamma} = \rho (\tan \beta - \tan \gamma).$$

C. Q. F. D.

Discussion. — 1°  $\text{tg. } \beta = \text{tg. } \gamma$ .

La génératrice est tangente à la ligne de striction.

$K = 0$ . Le plan tangent est le même en tous les points et à l'infini. La génératrice est singulière.

Pour le point central, le plan tangent est indéterminé.

2°  $\text{tg. } \beta = \infty$ . Impossible, puisque l'angle  $\beta$  est constant.

3°  $\text{tg. } \gamma = 0$ . La tangente à la ligne de striction est verticale. Cette ligne présente un rebroussement en projection horizontale, et  $\rho$  peut être nul, ce qui donnerait  $K = 0 \times \infty$ , (forme indéterminée). — On verra comme ci-dessus, que  $p$  et  $\sigma$  sont de même ordre et que  $K = \lim. \frac{p}{\sigma}$  a une valeur finie. On n'a donc pas pour ce point de génératrice singulière.

4°  $\rho = \infty$ .

La courbe de striction présente une inflexion en projection horizontale. Son plan osculateur est vertical.

$$K = \infty \quad \text{tg. } \alpha = 0 :$$

Le plan tangent est le même en tous les points et au point central. La génératrice est singulière.

### Plan tangent en un point $cc'$ d'une Génératrice.

Soit  $md$ , la trace horizontale de ce plan. Elle passera par la trace horizontale  $m$  de la génératrice. — Abaissons du point  $c$ , projection du point, une perpendiculaire sur cette trace, et soit  $Q$  le point où elle rencontre la normale à la ligne de striction. — Soit  $O$  le centre de courbure, et  $\rho$  le rayon de courbure de la ligne de striction au point  $a$ . Calculons la distance  $OQ = q$ .

Si nous menons  $cd$  perpendiculaire sur  $mc$ , cette ligne peut être considérée comme la trace horizontale du plan  $d'c'f'$  qui déterminerait le rectiligne du dièdre formé par le plan projetant la génératrice (c'est le plan central) et par le plan tangent au point  $cc'$ . — Effectuons la construction connue qui donnerait cet angle  $\alpha$ . — Nous aurons, en appelant  $d$ , la cote du point  $cc'$  :

$$\overline{cd} = \overline{cf'} \cdot \text{tg. } \alpha = c'f' \cdot \text{tg. } \alpha = d \cos. \beta \cdot \text{tg. } \alpha.$$

Les 2 triangles  $cdm$  et  $acQ$  ont leurs côtés perpendiculaires. Ils sont semblables et donnent  $\frac{aQ}{mc} = \frac{ac}{cd}$ , d'où l'on tire :

$$\overline{aQ} = \frac{\overline{ac} \times \overline{mc}}{cd} = \frac{x \cdot \cos. \beta \times d \cdot \cotg. \beta}{d \cdot \cos. \beta \cdot \tg. \alpha} = \frac{x \cdot \cotg. \beta}{\tg. \alpha}$$

Mais d'après la formule de Chablen

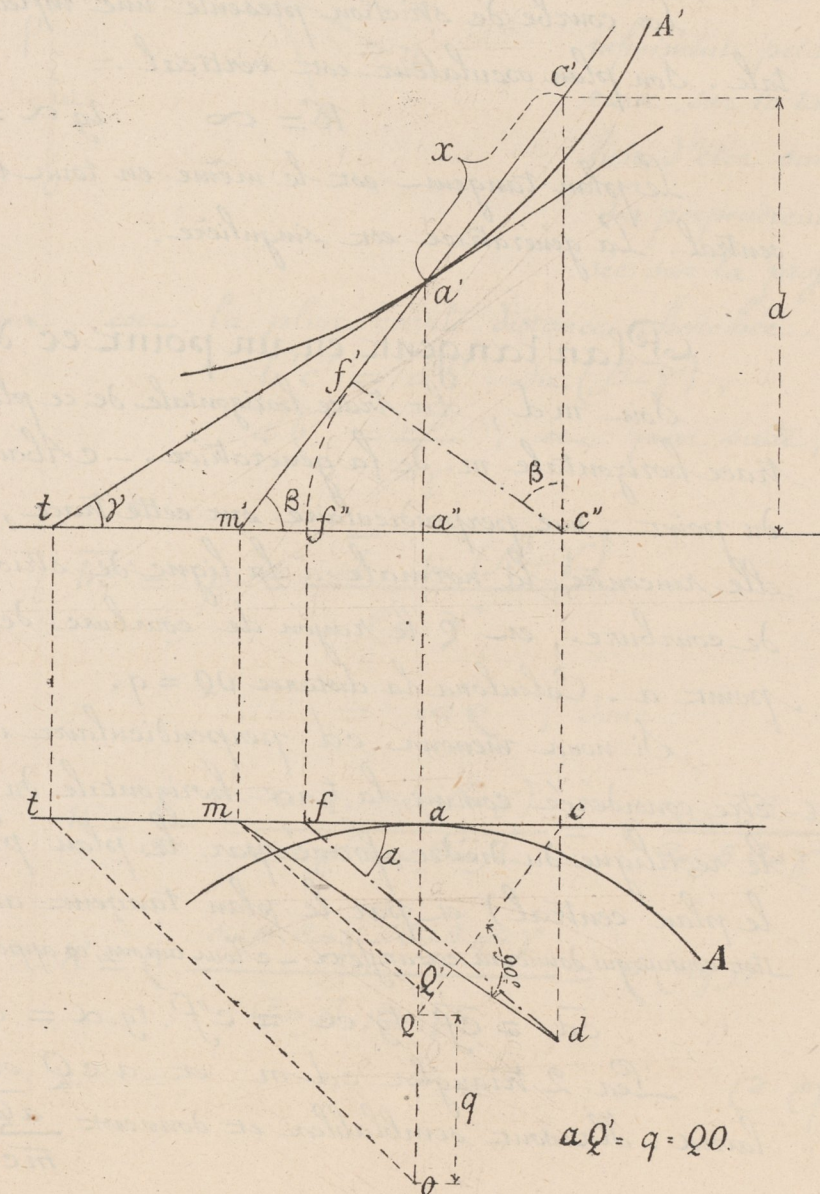
$$\tg. \alpha = \frac{x}{R} \text{ et nous aurons } R = \varrho (\tg. \beta - \tg. \gamma)$$

par conséquent

$$aQ = \frac{x \cdot \cotg. \beta}{\frac{x}{\varrho (\tg. \beta - \tg. \gamma)}} = \frac{\varrho (\tg. \beta - \tg. \gamma)}{\tg. \beta} = \varrho \left(1 - \frac{\tg. \gamma}{\tg. \beta}\right)$$

$$oQ = \varrho - aQ = \varrho \cdot \frac{\tg. \gamma}{\tg. \beta},$$

quantité constante pour tous les points d'une même génératrice.



Le point  $Q$  se nomme le Pôle de la génératrice  $am$  - La distance  $OQ = q$  se nomme le paramètre de tangence.

On le construira géométriquement, en joignant au centre de courbure la trace  $t$  de la tangente à la ligne de striction, menant par la trace  $m$  de la génératrice une parallèle à la ligne ainsi construite, et prenant son intersection  $Q'$  avec la normale. - Reportant la distance à  $Q'$  de  $O$  en  $Q$ , on aura le Pôle.

En effet, il est facile de voir que

$$\frac{\text{tg. } \gamma}{\text{tg. } \beta} = \frac{a''m'}{a''t'} = \frac{am}{at} = \frac{aQ'}{aO},$$

et par suite:  $\overline{aQ'} = \rho \cdot \frac{\text{tg. } \gamma}{\text{tg. } \beta}$

Ayant le pôle, les problèmes sur les plans tangents deviennent très-simples.

1°. Plan tangent par un point d'une génératrice.

On joint le Pôle de la génératrice et la projection du point. Puis on mène par la trace de la génératrice, une perpendiculaire sur la droite ainsi menée: on a la trace horizontale du plan tangent.

2°. Un plan contient une génératrice; - Trouver le point où il est tangent.

Du pôle, on abaisse une perpendiculaire sur la trace du plan, et le point de rencontre avec la génératrice, donne le point de tangence, etc.

## Hélicoïde gauche quelconque

C'est la surface engendrée par une droite entraînée dans un mouvement hélicoïdal, lorsque cette droite ne rencontre pas l'axe du mouvement.

Soit  $ab - a'b'$  la droite lorsqu'elle est de front, - et  $h$  le pas réduit du mouvement hélicoïdal;  $Z - Z''Z'$  l'axe du mouvement hélicoïdal.

Si nous menons la plus courte distance  $Za$ , de l'axe et de la droite, et si nous considérons le cylindre qui aurait  $Za$  pour rayon; la droite est et restera tangente à ce cylindre, qui sera le noyau de la surface.