

sera donc $m'p'$ perpendiculaire à $m'\infty$.

On inscrira entre les droites $a'm'$ et $b'm'$ une sécante $a''b''$ perpendiculaire à $m'p'$ et égale en longueur à AB .

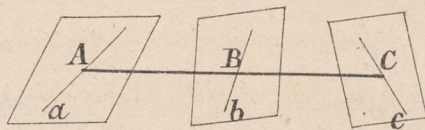
On aura en $m'p''$ le paramètre K . Puis, reportant la longueur $b''p''$ en BP , cela donnera le point central.

Remarque 2. — Deux surfaces gauches ayant mêmes plans tangents en 2 points d'une génératrice et même plan tangent à leur cône directeur, ou même plan directeur, se raccorderont tout le long de cette génératrice, puisque ces plans sont parallèles au plan tangent à l'infini.

Surfaces gauches de raccordement.

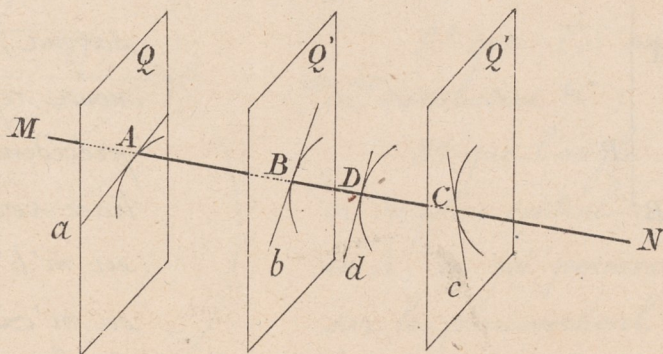
1°. Hyperboloïde de raccordement.

Soient A, B, C , 3 points d'une génératrice et 3 droites Aa , Bb , Cc , passant par ces points et situés dans les 3 plans tangents.



Ces 3 tangentes définissent, si elles ne sont pas parallèles à un même plan, un hyperboloïde de raccordement.

2°. Paraboloïde de raccordement.



Si nous choisissons les 3 tangentes parallèles à un même plan,

ce qui sera facile en prenant comme directrices 3 sections faites dans les plans tangents, par 3 plans parallèles Q, Q', Q'' nous aurons un paraboloides.

Si les plans Q, Q', Q'' sont obliques à la génératrice, le paraboloides sera oblique. Mais si ces plans sont perpendiculaires à la génératrice, le paraboloides sera droit, puisqu'il aura un plan Directeur Q' perpendiculaire à la droite MN , qui pour lui sera une directrice.

Plans Directeurs de tout paraboloides de raccordement.

Le 1^{er} plan directeur sera le plan Q' auquel sont parallèles les 3 tangentes choisies. L'autre sera le plan parallèle au plan tangent à l'infini sur la génératrice de raccordement. — Par conséquent tous les paraboloïdes de raccordement ont un même plan directeur, qui est ce plan tangent à l'infini.

Conséquences. — Pour définir un paraboloides de raccordement on prendra comme directrices 2 tangentes à la surface en deux points de la génératrice, c'est-à-dire une droite dans chacun des 2 plans tangents. Et comme plan directeur le plan tangent à l'infini, c'est-à-dire soit le plan directeur de la surface, si elle est à plan directeur; soit le plan tangent au cône directeur.

Si l'on veut un paraboloides droit, on prendra les tangentes directrices perpendiculaires à la génératrice.

Paraboloides des Normales.

Prenons (figure précédente) le paraboloides de raccordement quand il est droit. Les droites Aa, Bb, Cc , et toutes les génératrices du 2^e système, telles que Dd sont tangentes à la surface et, de plus, sont perpendiculaires à la génératrice MN . Si l'on faisait tourner tout le paraboloides d'un angle droit autour de MN comme charnière, ces tangentes deviendraient les normales de la surface aux différents points $ABCD \dots$ de la génératrice.

Donc: Les normales aux différents points d'une génératrice d'une surface gauche forment un paraboloides que l'on nomme le paraboloides des normales.

Ligne de Striction.

La ligne de Striction d'une surface gauche est le lieu géométrique des points centraux de cette surface.

C'est le lieu des points de tangence des plans tangents perpendiculaires aux plans tangents à l'infini.

Si la surface est à plan directeur, c'est le lieu des contacts des plans tangents perpendiculaires à ce plan directeur.

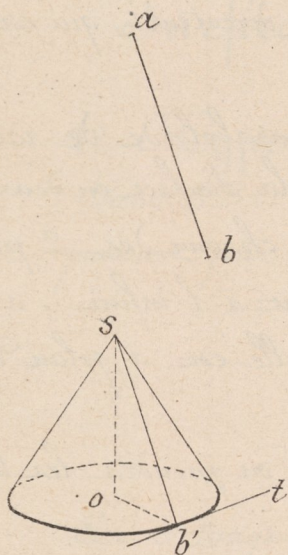
Théorème. — Dans les surfaces à plan directeur horizontal ou à cône directeur de révolution, dont l'axe est vertical, la ligne de Striction est la ligne de contour apparent de la surface sur le plan horizontal.

Pour les surfaces à plan directeur, cela résulte de ce qui précède : Démontrons-le pour les surfaces à cône directeur de révolution.

Soit ab une génératrice et $s b'$ la génératrice correspondante du cône directeur. Le plan tangent $s b' t$ au cône est parallèle au plan tangent à l'infini (plan asymptotique).

Or, le cône étant de révolution, le plan projetant la génératrice $s b'$ sur le plan de base, est perpendiculaire au plan tangent; il en est donc de même pour la génératrice ab de la surface, c'est-à-dire que le plan

mené par cette droite, perpendiculairement au plan asymptotique est perpendiculaire au plan horizontal. C'est donc un plan de contour apparent. Mais ce plan est le plan central et le point central en est le point de contact. Donc le lieu des points centraux est la ligne de contour apparent de la surface. C. Q. F. D.



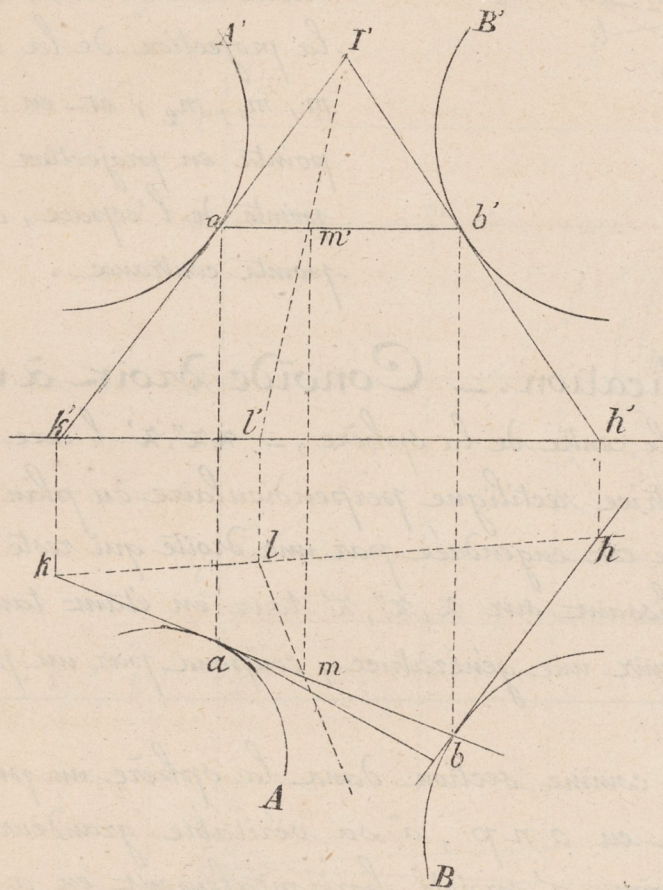
Développable asymptote d'une surface gauche.

C'est la surface enveloppe des plans asymptotiques de la surface, c'est-à-dire de ses plans tangents à l'infini.

On voit que la surface gauche et sa développable asymptote ont même cône directeur.

Application. - Mener le plan tangent en un point m m'
d'une surface gauche à plan directeur, définie par 2 courbes directrices
 AA' et BB' .

Supposons le plan directeur horizontal. Soit $ab, a'b'$ une génératrice obtenue en coupant les 2 directrices par un plan horizontal. Soit m, m' un point sur cette génératrice.



Le parabolôide de raccorde-
ment aura pour plan directeur
le plan horizontal. On pourra
lui prendre comme directrices, les
2 tangentes $a'k$, $a'k'$ et bh , $b'h'$,
aux deux directrices. —

De là nous rentrons pour
le paraboloïde dans un problème
connu.

On joindra m' au point de divergence I' en projection verticale.

On prendra la trace horizon-
tale $kh, k'h'$ du paraboloïde. —

On aura la génératrice du 2.^e système $m'l'$, ml . Le plan tangent est défini par la génératrice ma , $m'a'$ et ml , $m'l'$.

Remarque. Au lieu de prendre pour directrice du paraboléide les 2 tangentes aux courbes, on aurait pu prendre 2 droites de front des plans tangents en $a a'$ et $b b'$. Le 2^e plan directeur eût été le plan vertical, et l'on aurait eu aussi un point de divergence en projection horizontale, ce qui aurait pu apporter des simplifications.

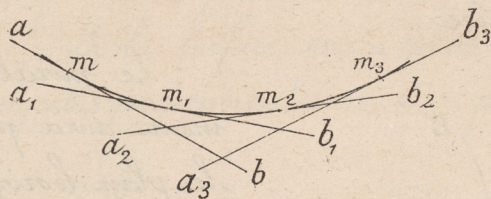
Recherche du Point central.

Dans le cas actuel, c'est le point de la génératrice pour laquelle le plan tangent est perpendiculaire au plan horizontal.

On mènera donc le plan projetant horizontalement la droite $ab, a'b,$

et l'on cherchera le point où il est tangent. (Problème connu).

On sait, de plus, que c'est un point du contour apparent horizontal de la surface; on pourra donc, en prenant l'enveloppe des génératrices en projection horizontale, déterminer ce contour; ce qui donnera la projection de la ligne de striction m, m_1, m_2 ; et en remontant des points en projection horizontale aux points de l'espace, on aura tous les points centraux.



2^e Application. — Conoïde droit à noyau sphérique.

Soit oo' le centre de la sphère, — z, z'', z' l'axe du conoïde, c'est-à-dire sa directrice rectiligne perpendiculaire au plan horizontal.

La surface est engendrée par une droite qui reste horizontale, et qui se déplace en glissant sur z, z'', z' tout en étant tangente à la sphère.

Pour obtenir une génératrice, coupons par un plan horizontal $a'm'n'$.

Il donne comme section dans la sphère un petit cercle projeté horizontalement en onp , à sa véritable grandeur. — Il coupe l'axe en un point a' projeté horizontalement en a, z , pied de l'axe.

Menons les 2 tangentes zn, zp au petit cercle, et nous aurons en $an, a'n'$ en $ap, a'p'$, 2 génératrices de la surface.

Plan tangent en un point $m m'$.

Prenons pour directrices d'un paraboloides de raccordement : 1^o l'axe du conoïde, 2^o Une droite quelconque du plan tangent à la sphère en nn' . (Puisque le plan tangent à la sphère en nn' l'est aussi au conoïde). — Prenons de préférence la ligne de front de ce plan tangent, c'est-à-dire la tangente $n't', nt$, au petit cercle de front passant par le point nn' .

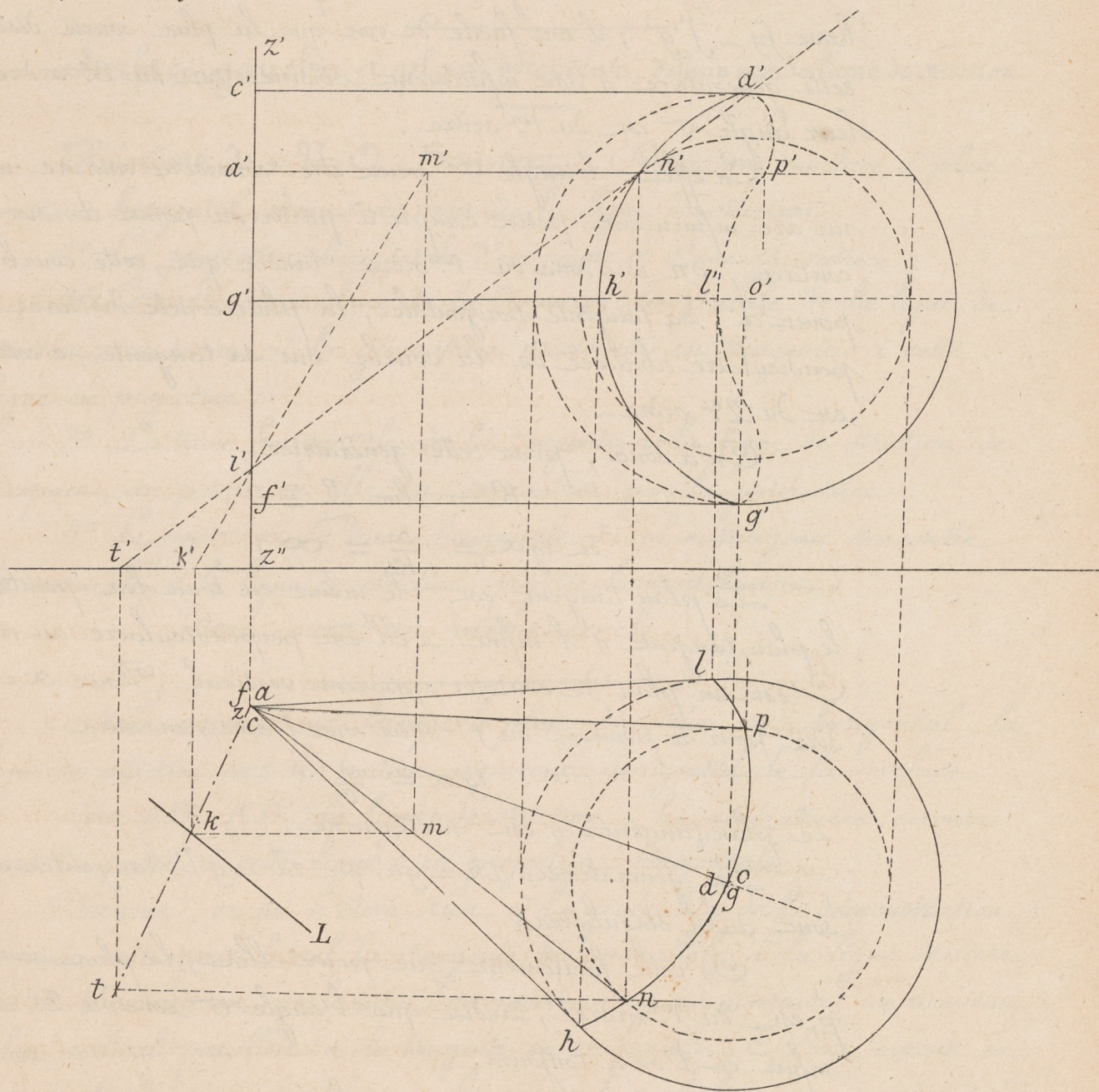
Le plan horizontal est le 1^{er} plan directeur du paraboloides; et

le plan vertical, grâce au choix de cette tangente de front, en est le second.

La trace horizontale du paraboloides est $tx - tx'' -$

Le point de divergence en projection verticale est I' . On a donc la génératrice de 2^e système du point $m m'$ en $m' i' k' - m k$.

En menant par la trace horizontale k de cette génératrice, une parallèle KL à la génératrice am , on aura la trace horizontale du plan tangent.



Ligne de Striction.

C'est l'axe tx, tx'', tx' du Conoïde.

Génératrices singulières.

On nomme ainsi des génératrices qui ont le même plan tangent en tous leurs points. — D'après la formule de Chasles, elles seront caractérisées par ce fait que le paramètre de distribution K y doit être nul ou infini.

Or, prenons la génératrice la plus haute $cd - c'd'$, et la plus basse $fg - f'g'$; il est facile de voir que la plus courte distance p de cette génératrice à son infiniment voisine est du 2.^e ordre tandis que leur angle σ est du 1.^{er} ordre.

En effet: l'angle σ peut être considéré comme mesuré par un arc infiniment petit compté à partir du point d sur la courbe de contact, on est donc du 1.^{er} ordre, tandis que, cette courbe ayant au point d , sa tangente horizontale, la plus courte distance est la perpendiculaire abaissée de la courbe sur sa tangente, c'est-à-dire est du 2.^e ordre.

On a donc, pour cette génératrice,

$$K = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{p}{\sigma} = 0,$$

$$\text{et } \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{K} = \infty.$$

Le plan tangent est le même en tous les points; c'est aussi le plan tangent à l'infini. — Il est perpendiculaire au plan vertical. C'est un plan de contour apparent vertical. Pour $x = 0$, c'est-à-dire pour le point c' ou f' situé sur l'axe, on aura :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0}{0}.$$

Le plan tangent y est indéterminé.

Les génératrices $zh - gh'$ et $zl - g'l'$ tangentes à l'équateur, sont aussi singulières.

On voit facilement que pour elles, la plus courte distance, p , est du 1.^{er} ordre, tandis que l'angle σ est du 2.^e. — Donc, K est infini et l'on a toujours :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\infty} = 0, \text{ sauf pour } x = \infty.$$

Le plan tangent est partout le même qu'au point central. Il est perpendiculaire au plan horizontal; c'est un plan de contour apparent horizontal.