

rencontrent toujours, à moins qu'elles ne soient parallèles. En tout cas, elles sont toujours dans un même plan.

Deux génératrices d'un même système ne se rencontrent jamais.

En effet, les génératrices divergent toutes en projection horizontale, du point a , et en projection verticale, du point c' ; or comme ces deux points ne sont pas sur une même ligne de rappel, ces génératrices ne se rencontrent pas dans l'espace.

Théorème 4. — Par un point de la surface il passe deux génératrices de système différents. Ces deux génératrices définissent le plan tangent en ce point.

Si le point est à l'infini, les deux génératrices sont parallèles; donc: le plan passant par 2 génératrices parallèles, est tangent à l'infini.

Théorème 5. — Tout plan passant par une génératrice d'un système contient une génératrice de l'autre système, et est tangent au point d'intersection de ces 2 génératrices.

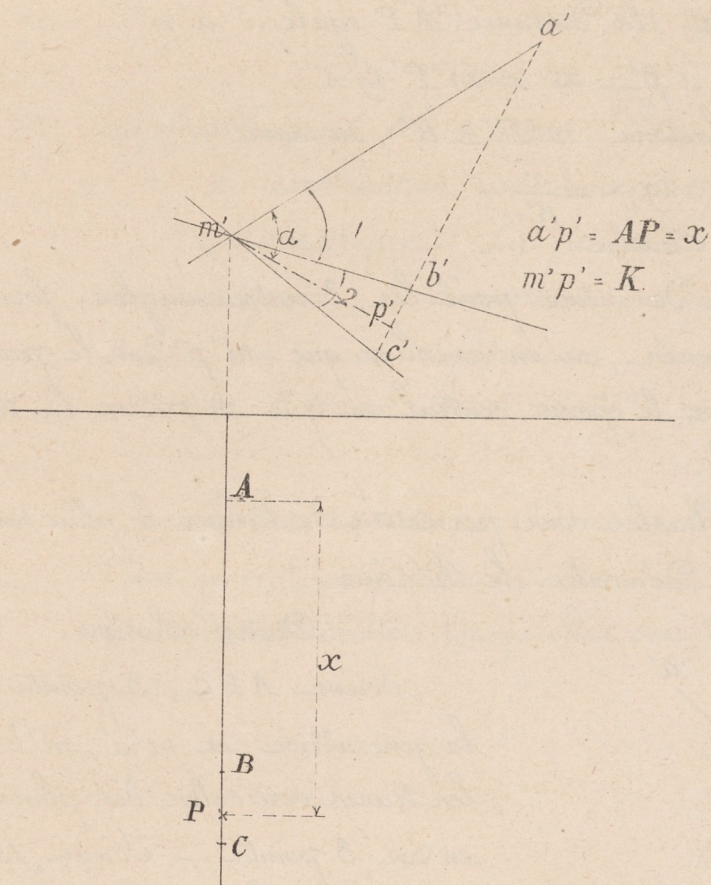
En se fondant sur ces théorèmes, il est facile de résoudre pour l'Hyperboloïde les problèmes sur les plans tangents ou sur les ombres.

Raccordement des Surfaces gauches.

Théorème. — La connaissance de 3 plans tangents en 3 points A, B, C d'une génératrice d'une surface gauche, suffit pour en déterminer le point central, le paramètre de distribution et le plan tangent en tout autre point. Supposons cette génératrice perpendiculaire au plan vertical. Elle se projette verticalement toute entière en un point m' .

Soient $m'a'$, $m'b'$, $m'c'$ les traces verticales des 3 plans tangents aux points A, B et C .

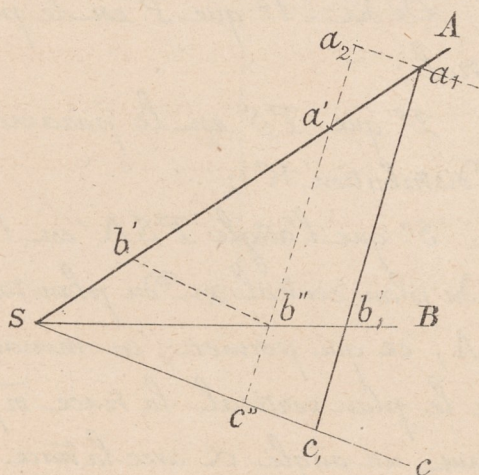
Les distances de ces points entre eux sont mesurées en vraie grandeur sur



le plan horizontal, en les angles des plans tangents entre eux sous mesurés en 1 et 2 sur le plan vertical, par les angles formés par les traces. Inscrivons sur les 3 droites du plan vertical $a'm' - b'm' - c'm'$, une sécante $a'c'$ telle que les deux segments $a'b' - b'c'$ soient égaux aux longueurs horizontales $AB - BC$. Ce problème a une solution et une seule.

Abaissons $m'p'$ perpendiculaire sur $a'c'$; je dis : 1° que $m'p'$ est la trace verticale du plan central. — 2° que $m'p'$ est la longueur du paramètre de distribution, K . — 3° Que le point central, P , s'obtiendra en portant sur la génératrice une longueur $CP = c'p'$. — En effet, soit α l'angle

Problème. — Inscire sur 3 droites concourantes $SA . SB . SC$, une droite ayant des segments donnés.



Soient $a . b . c$, la droite et les segments de cette droite. — Sur SA portons la droite donnée $a b c$ en $S . b' . a'$. — (Le point a' répondant à A est placé le plus loin du point S) — Par b' menons une parallèle $b'b''$ à SC — et joignons $b''a'$. Nous aurons en $a'b''c''$ la direction de la droite cherchée. — Il ne restera plus qu'à la mettre de longueur par un déplacement parallèle; ce qui se fera, en prenant $c''a_2 = ca$, et menant par a_2 la parallèle a_2a_1 à SC .

On aura en $a_1 b_1 c_1$ la droite demandée.

$a'm'p'$, c'est-à-dire l'angle du plan tangent en A , avec le plan $M'P'$; on aura, en appelant x la distance AP égale à $a'p'$

$$a'p' = x = m'P' \operatorname{tg} \alpha.$$

Donc, si nous faisons $m'P' = K$, on aura :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{K},$$

ce qui est la formule de Chasles.

Comme il en est de même pour les 3 autres angles formés par les 3 plans tangents donnés, on en conclut que $m'p'$ est le paramètre de distribution, que P est le point central et que $m'p'$ est la trace verticale du plan central.

La formule de Chasles nous permettra de trouver le plan tangent en tout autre point, ce qui démontre le théorème.

Autre solution.

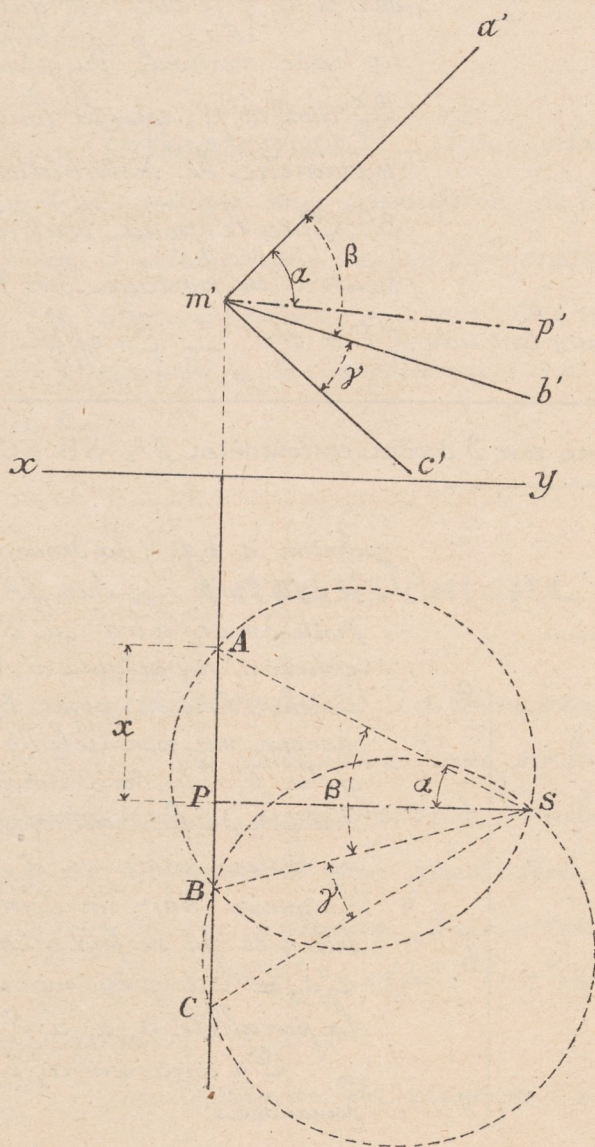
Soient ABC , 3 points pris sur la génératrice, et $m'a'$, $m'b'$, $m'c'$ les traces verticales des plans tangents en ces 3 points. — Soient β et γ les angles formés par ces plans entre eux.

Sur AB décrivons un segment capable de l'angle β , et sur BC un segment capable de l'angle γ . Ces 2 arcs de cercle se coupent en S . Abaissons SP perpendiculaire sur AC .

De là : 1° que P est le point central;

2° que PS est le paramètre de distribution K ;

3° que l'angle PSA est l'angle α du plan central et du plan tangent en A , ce qui permet, en menant sur le plan vertical la trace $m'p'$ faisant un angle α avec la trace $m'a'$, d'obtenir la trace verticale du plan central



En effet, on a sur le plan horizontal

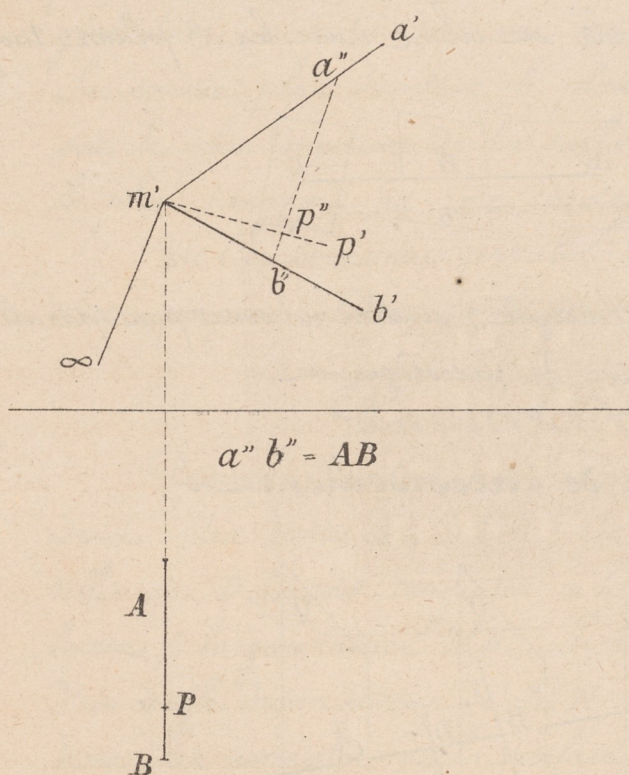
$$\overline{PA} = x = PS \cdot \operatorname{tg} \alpha, \text{ d'où}$$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\overline{PS}}$, ce qui est la formule de Chasles, applicable pour les 2 autres plans tangents.

La construction est donc justifiée.

Remarque. La première construction est plus facile à appliquer sur une épreuve. — En reportant sur une bande de papier les trois distances A.B.C, on arrive rapidement, sans construction géométrique à l'inscrire entre les 3 traces $m'a' - m'b' - m'c'$.

Théorème. — Deux surfaces gauches se raccordent tout le long d'une génératrice, c'est-à-dire ont mêmes plans tangents en tous les points de cette droite, lorsqu'elles ont 3 plans tangents communs en 3 points.



En effet, puisque 3 plans tangents en 3 points suffisent pour déterminer tous les autres, il en résulte que les deux surfaces auront même point central, même paramètre, et par suite mêmes plans tangents en tous les points. C.Q.F.D.

Remarque 1. — Parmi ces 3 plans on peut compter le plan tangent à l'infini.

En effet, la connaissance du plan tangent à l'infini entraîne celle de la direction du plan central, qui, nous le savons, lui est perpendiculaire. Si nous refaisons la construction graphique précédente, nous aurons: en $m'a'$ la trace verticale du plan tangent en A; en $m'b'$ celle du plan tangent en B; en $m'\infty$ celle du plan tangent à l'infini.

La trace verticale du plan central

sera donc $m'p'$ perpendiculaire à $m'\infty$.

On inscrira entre les droites $a'm'$ et $b'm'$ une sécante $a''b''$ perpendiculaire à $m'p'$ et égale en longueur à AB .

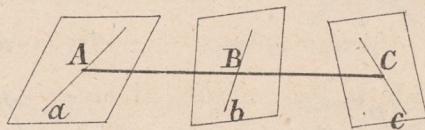
On aura en $m'p''$ le paramètre K . Puis, reportant la longueur $b''p''$ en BP , cela donnera le point central.

Remarque 2. — Deux surfaces gauches ayant mêmes plans tangents en 2 points d'une génératrice et même plan tangent à leur cône directeur, ou même plan directeur, se raccorderont tout le long de cette génératrice, puisque ces plans sont parallèles au plan tangent à l'infini.

Surfaces gauches de raccordement.

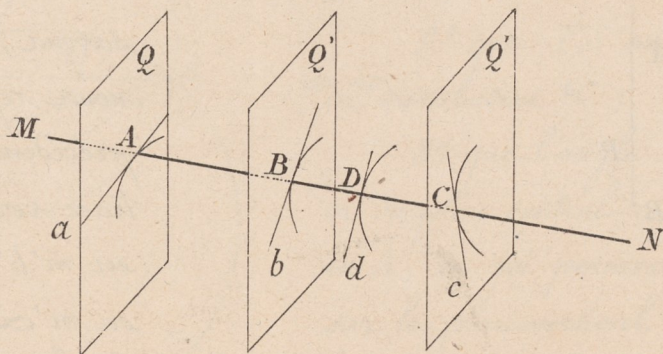
1°. Hyperboloïde de raccordement.

Soient A, B, C , 3 points d'une génératrice et 3 droites Aa , Bb , Cc , passant par ces points et situés dans les 3 plans tangents.



Ces 3 tangentes définissent, si elles ne sont pas parallèles à un même plan, un hyperboloïde de raccordement.

2°. Paraboloïde de raccordement.



Si nous choisissons les 3 tangentes parallèles à un même plan,