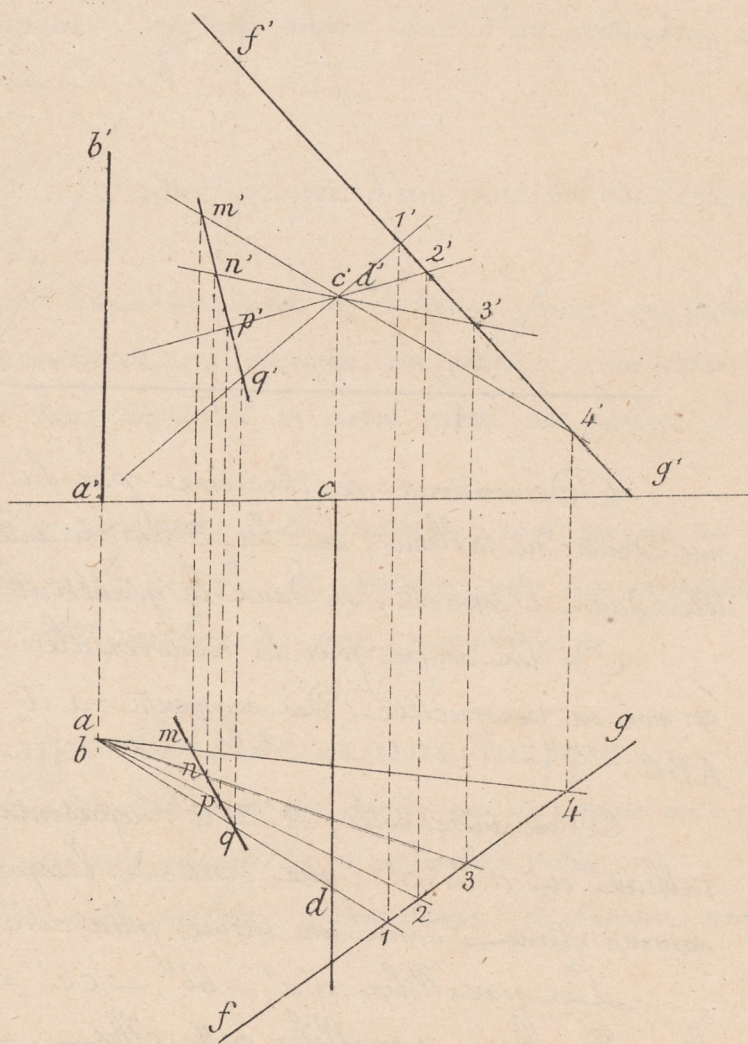


doivent concourir, en perspective, C. G. F. D.

Double Génération de l'Hyperboloïde.

Théorème. Toute droite qui rencontre 3 génératrices rencontre toutes les autres.

Soient les 3 Directrices que nous prendrons : la 1^{re} $ab - a'b -$ (verticale) ; la 2^e, $cd, c'd'$, perpendiculaire au plan vertical, et la 3^e, $fg, f'g'$ quelconque.



Toutes les génératrices, en projection horizontale, divergeront du point a , et en projection verticale, du point c' .

Menons 4 génératrices quelconques, en projection verticale $c'1' - c'2' - c'3' - c'4'$, et en projection horizontale $a1 - a2 - a3 - a4$. — Coupons la projection verticale par une transversale $m'n'p'q'...$

prenons les 2 points $m'm$, $q'q$, situés sur la génératrice 4, et joignons $m.q$.

Si nous menons les lignes de rappel par les points intermédiaires n' et p' , jusqu'à la droite $m.q$, les segments $m.n$, $n.p$, $p.q$, sont proportionnels aux segments $m'n'$, $p'q'$; mais d'autre part les segments 1. 2. 3. 4 sont proportionnels à $1'2'3'4'$, par conséquent si l'on joignait les points $4m$, $3n$, $2p$, $1q$, ces lignes seraient concourantes au même point a .

Donc : 1^o Les 4 points $m m'$, $n n'$, $p p'$, $q q'$, sont en ligne droite sur leurs deux projections et par conséquent en ligne droite dans l'espace.

2^o Ces points seront sur les 4 génératrices, et par suite, toute droite $m.n.p$, $m'n'p'$, qui rencontre les 3 premières, rencontre aussi la 4^e.

Remarque. Cette démonstration est fondée sur l'existence des 2 points de divergence a et c' .

Si les 3 directrices sont quelconques, on projettera sur le plan horizontal à l'aide de projetantes parallèles à la 1^{re} Directrice, et sur le plan vertical, à l'aide de projetantes parallèles à la 2^e Directrice. — On retrouvera, dès lors, 2 points de divergence, et la démonstration se fera comme ci-dessus. — Elle est donc générale.

Nous en déduisons les propriétés suivantes de l'hyperboloïde à une nappe.

Théorème 1. — L'hyperboloïde est la surface engendrée par une génératrice rectiligne qui s'appuie sur 3 directrices rectilignes non parallèles à un même plan.

Théorème 2. — Si l'on prend 3 génératrices quelconques de ce premier système, pour directrices d'un nouvel hyperboloïde, cette nouvelle surface gauche se confondra avec la première. — Il existe donc sur la surface deux systèmes de génératrices rectilignes.

Théorème 3. — Deux génératrices de système différent se

rencontrent toujours, à moins qu'elles ne soient parallèles. En tout cas, elles sont toujours dans un même plan.

Deux génératrices d'un même système ne se rencontrent jamais.

En effet, les génératrices divergent toutes en projection horizontale, du point a , et en projection verticale, du point c' ; or comme ces deux points ne sont pas sur une même ligne de rappel, ces génératrices ne se rencontrent pas dans l'espace.

Théorème 4. — Par un point de la surface il passe deux génératrices de système différents. Ces deux génératrices définissent le plan tangent en ce point.

Si le point est à l'infini, les deux génératrices sont parallèles; donc: le plan passant par 2 génératrices parallèles, est tangent à l'infini.

Théorème 5. — Tout plan passant par une génératrice d'un système contient une génératrice de l'autre système, et est tangent au point d'intersection de ces 2 génératrices.

En se fondant sur ces théorèmes, il est facile de résoudre pour l'Hyperboloïde les problèmes sur les plans tangents ou sur les ombres.

Raccordement des Surfaces gauches.

Théorème. — La connaissance de 3 plans tangents en 3 points A, B, C d'une génératrice d'une surface gauche, suffit pour en déterminer le point central, le paramètre de distribution et le plan tangent en tout autre point. Supposons cette génératrice perpendiculaire au plan vertical. Elle se projette verticalement toute entière en un point m' .

Soient $m'a'$, $m'b'$, $m'c'$ les traces verticales des 3 plans tangents aux points A, B et C .

Les distances de ces points entre eux sont mesurées en vraie grandeur sur