

Surfaces gauches.

157.

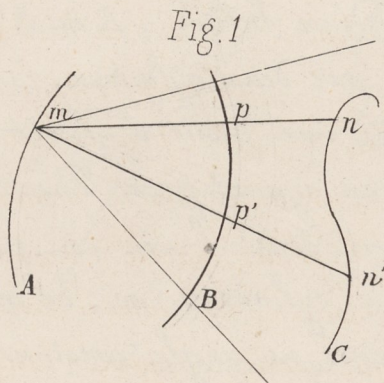
Nous avons ainsi défini celles qui n'ont pas le même plan tangent tout le long d'une même génératrice.

Génération des Surfaces gauches.

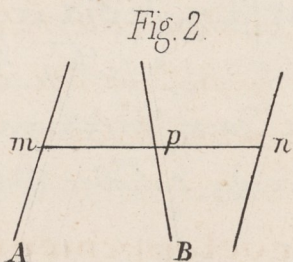
I. Surfaces définies par 3 Directrices, A, B, C .

Pour obtenir une génératrice quelconque, soit m un point pris sur A .

Construisons le cône ayant m pour sommet, et la courbe B pour directrice. — Prenons les points $n, n', \dots$ où ce cône est rencontré par la courbe C , et nous aurons en $m p n - m p' n' \dots$ des génératrices de la surface.



Hyperboloïde. — Si les 3 Directrices sont 3 droites non parallèles à un même plan, la surface devient un hyperboloïde à une nappe, (Fig. 2).

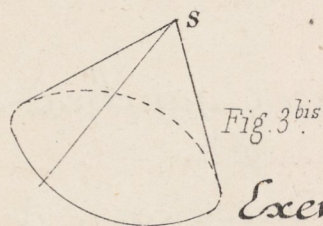
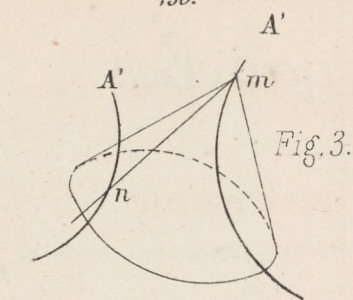


II. Surfaces à 3 noyaux. — On peut se donner comme Directrices 3 surfaces noyau A, B, C , et assujettir la génératrice à être tangente à ces noyaux.

III. Surfaces à 1 courbe directrice et 2 noyaux.

IV. Surfaces à 2 courbes directrices et 1 noyau.

V. Surfaces à Cône Directeur, et à 2 Directrices.



Exemples de surfaces à 2 directrices et un cône directeur:

Fig. 4.

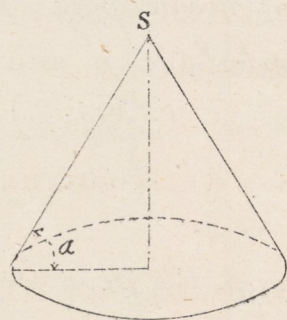
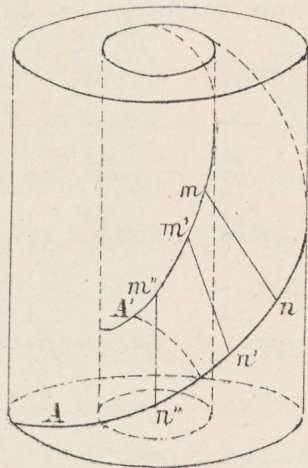
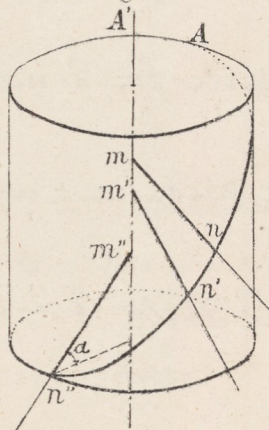


Fig. 5



Pour construire une génératrice quelconque de la surface, soit m , un point de la 1^{re} Directrice (fig 3). Transportons, parallèlement à lui-même et ayant son sommet en ce point, le cône directeur (fig. 3^{bis}). Il coupera en n , la 2^e Directrice. La droite mn sera une génératrice de la surface.

(a) Hélicoïde gauche quelconque (fig. 4) —

Deux hélices, A et A' , de même pas, sont tracées sur deux cylindres concentriques. — On assujettit une droite à glisser sur ces deux directrices en ayant pour directeur S un cône de révolution dont l'axe est parallèle à l'axe des deux cylindres, ou, ce qui revient au même, en faisant un angle constant α , avec le plan horizontal.

(b) Surface de vis à filet triangulaire (Fig. 5)

Les deux directrices sont: 1^o une hélice A ; 2^o L'axe du cylindre sur lequel est tracée l'hélice.

Le cône directeur est de révolution; son axe est parallèle à l'axe du cylindre de l'hélice.

On voit facilement que cette surface est un cas particulier de l'hélicoïde gauche quelconque.

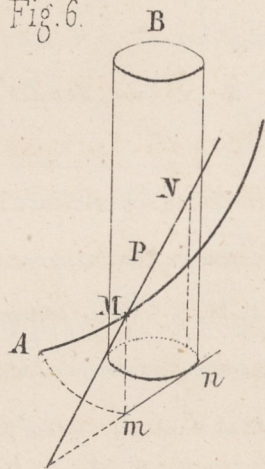
Elle répond au cas où la 2^e directrice A' serait tracée sur un cylindre de rayon nul.

VI. Surface à 1 Directrice, 1 noyau. et 1 cône directeur.

Exemple: Hélicoïde gauche quelconque (2^e Définition)
(Fig. 6).

La Directrice est une hélice A . Le noyau est un cylindre B ayant même axe que l'hélice.

Fig. 6.



Le cône est de révolution; les génératrices seront un angle constant avec le plan de base du cylindre, tout en étant tangenten au noyau cylindrique B .

On voit facilement que cette définition de l'hélicoïde gauche rentre dans la précédente, en remarquant qu'un point quelconque P de la génératrice entraîne dans le mouvement hélicoïdal décrit, une hélice de même pas que l'hélice A , que l'on peut prendre ces deux hélices pour directrices et se passer du noyau.

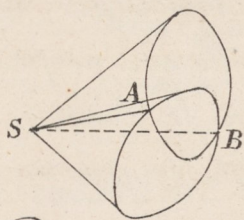
Si l'on prend un 3^e point N , sur la génératrice, il engendrera, lui aussi, une hélice ayant même axe et même pas que les deux autres; on peut donc dire encore:

(3^e Définition) L'hélicoïde gauche est engendré par une droite qui glisse sur 3 hélices de même axe et de même pas.

VII. Surfaces à deux cônes directeurs et une directrice.

Fig. 7

(Fig. 7)



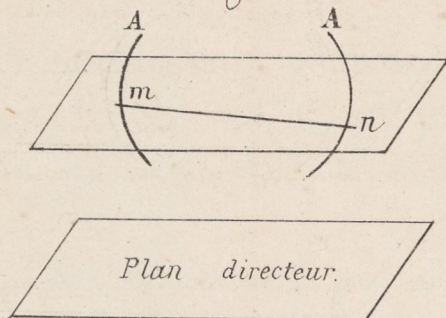
Les génératrices devant être parallèles à la fois aux deux cônes, seront parallèles aux droites $SA, SB, \dots$ d'intersection de ces deux cônes.

Dans ce cas la surface est formée de 1, 2, 3, ... cylindres.

VIII. Surfaces à 1 Plan Directeur, et deux Directrices (Courbes ou Noyaux).

La génératrice est assujettie à rencontrer les deux directrices courbes ou à être tangente avec 2 Directrices noyaux; tout en restant

Fig. 8.



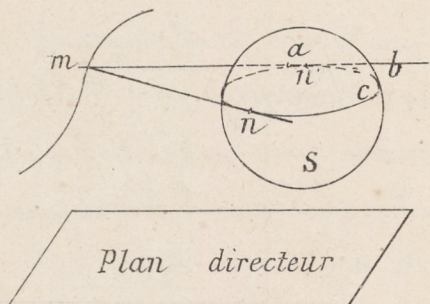
parallèle au plan directeur.

Ces surfaces se rencontrent souvent en construction. Le plan directeur est ordinairement horizontal.

Pour obtenir une génératrice, soit m un point de la 1^{re} directrice courbe (fig. 8).

On mène par ce point un plan parallèle au plan directeur. Il rencontre la 2^e directrice en un point n . — La droite mn est la génératrice.

Fig. 9

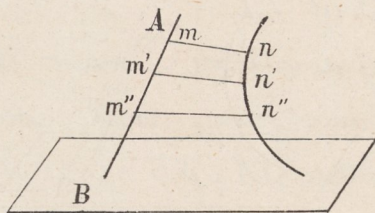


Si la 2^e Directrice est un noyau, S , le plan auxiliaire le coupera suivant une courbe a, b, c (fig. 9). — Du point m on mènera une ou plusieurs tangentes à cette courbe et l'on aura autant de génératrices.

Enfin, si l'on a 2 noyaux, le plan auxiliaire déterminera une courbe dans chacun d'eux et les tangentes communes aux deux courbes seront les génératrices cherchées.

IX. Conoïde. (Fig. 10).

Fig. 10.



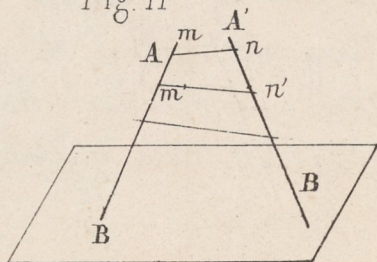
Si l'une des deux directrices est une ligne droite AB , la surface est un Conoïde.

Le Conoïde est oblique si la directrice rectiligne est oblique sur le plan directeur; il est droit si elle est perpendiculaire.

Dans le Conoïde, la directrice courbe peut être remplacée par un noyau.

X. Paraboloïde. (Fig. 11)

Fig. 11



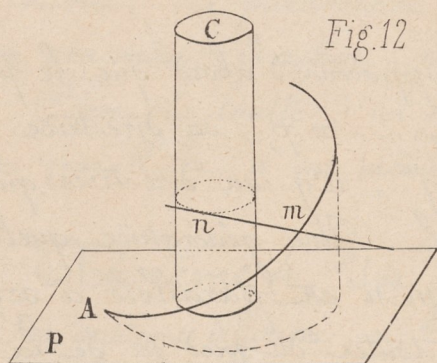
Si les deux directrices sont deux droites non parallèles, le Conoïde devient un paraboloïde.

Si l'une d'elles est en outre perpendiculaire au plan directeur, le paraboloïde est droit.

Le paraboloïde est la plus simple de toutes les surfaces gauches.

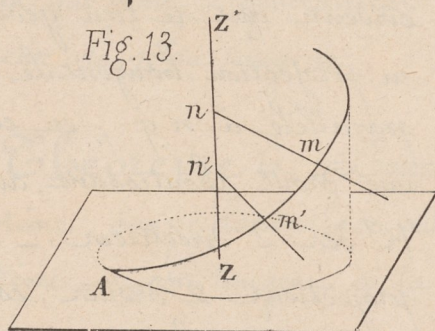
Exemples de Surfaces à plan directeur.

(a) Hélicoïde gauche à plan directeur. (fig. 12).



La directrice est une hélice A. Le plan directeur P est perpendiculaire à l'axe du cylindre. — et l'on a, de plus, un noyau cylindrique C, ayant même axe que l'hélice.

(b) Surface de vis à filets carrés (fig. 13).



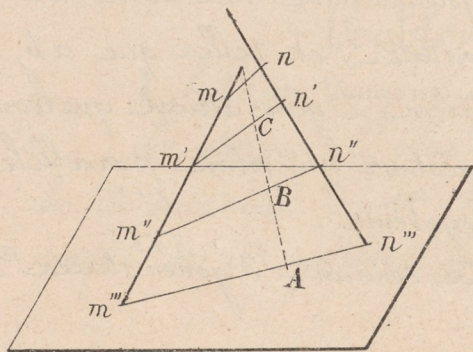
La directrice est toujours une hélice A. Le noyau B est réduit à l'axe du cylindre. — Le Plan directeur est perpendiculaire à cet axe.

Etude du Paraboloïde — Sa double génération.

Le paraboloïde est la plus simple des surfaces gauches. Il joue un grand rôle dans l'étude des autres surfaces gauches.

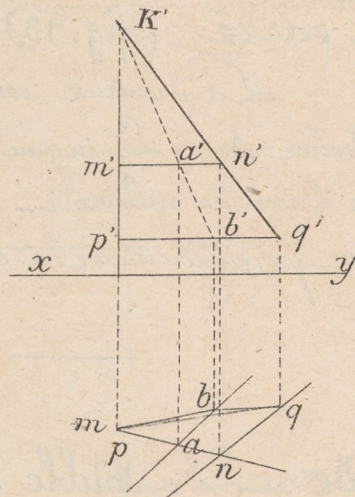
Il est défini par 2 Directrices rectilignes AaB non parallèles à un même plan) et un plan directeur, que nous supposons, pour plus de simplicité, horizontal.

Théorème 1. — Les génératrices d'un paraboloïde partagent les 2 directrices en segments proportionnels (Résulte d'un Théorème connu de la Géométrie de l'Espace) — $\frac{mm'}{nn'} = \frac{m'm''}{n'n''} = \frac{m''m'''}{n''n'''}$ Réciproquement: si plusieurs génératrices coupent deux directrices, en segments proportionnels, ces génératrices sont toutes parallèles à un même plan et forment un paraboloïde.



Théorème 2. — Si l'on prend sur différentes génératrices les points $A, B, C, \dots$ qui divisent dans un même rapport la portion de ces génératrices comprise entre les 2 directrices. Tous ces points seront en ligne droite.

Pour le démontrer, supposons d'abord que le paraboloides soit droit. — Prenons en $m'p', \dots, mp$, sa directrice perpendiculaire au plan horizontal, et en $n'q', nq$ sa directrice quelconque. — Le plan directeur est horizontal. Une génératrice quelconque aura pour projection $mn, m'n'$. ($m'n'$ est parallèle à xy). Horizontalement, les génératrices divergeront toutes du pied m de la directrice verticale.



Soit a, a' le point qui divise la génératrice $mn - m'n'$ dans le rapport donné. — Ce rapport se conserve en projection. Il est évident que le lieu géométrique du point a en projection horizontale, sera une droite ab parallèle à nq , et en projection verticale, une droite aboutissant au point de croisement K' des 2 directrices. — Ce lieu, ayant pour projections 2 droites, est lui-même une droite dans l'espace. C. Q. F. D.

Remarque. — La droite $mn \dots m'n'$ est parallèle au plan projetant horizontalement la directrice oblique, c'est-à-dire est parallèle à un nouveau plan directeur, qui serait parallèle à la fois aux 2 directrices primitives.

Théorème 3. — (Conséquence immédiate du précédent). — Le Paraboloides peut être engendré par un 2^e système de génératrices. — Autrement dit : il existe sur le paraboloides une série de lignes droites autres que les génératrices horizontales, et telles que $ab, a'b'$. — Ce 2^e système aurait pour directrices 2 génératrices quelconques du 1^{er} système, et pour plan directeur un plan parallèle à la fois aux deux directrices du 1^{er} système.

Remarque. — Si l'on se donnait 3 génératrices du 1^{er} système

lesquelles sont parallèles au 1^{er} plan directeur, et qu'on les pris comme directrices, la surface gauche ainsi définie serait le même paraboloidé que ci-dessus.

Donc: Un paraboloidé peut être engendré par une droite assujettie à en rencontrer 3 autres, parallèles à un même plan.

C'est la limite d'un hyperpoloidé dont les 3 directrices deviennent parallèles à un même plan.

Théorème 4. Une génératrice d'un système, rencontre toutes celles du système différent, et 2 génératrices d'un même système ne se rencontrent jamais.

Théorème 5. Par un point pris sur la surface, il passe 2 droites qui sont 2 génératrices de système différent. — Ces 2 droites définissent le plan tangent.

Théorème 6. Tout plan passant par une génératrice d'un 1^{er} système, coupe la surface suivant une droite qui est une génératrice du 2^e système, et est tangent à la surface, au point où ces génératrices se coupent.

Si le paraboloidé est oblique, c'est-à-dire si ses 2 directrices sont obliques au plan directeur, il suffira de projeter les génératrices sur le plan directeur, non plus par des perpendiculaires, mais par des obliques parallèles à l'une des 2 directrices, pour en tirer les mêmes conclusions que ci-dessus. — Cette directrice oblique se projettera toute entière en un point, sur le plan horizontal; par ce point passeront toutes les projections horizontales des génératrices du 1^{er} système, et l'on pourra raisonner comme pour le paraboloidé droit.

Problèmes sur le Paraboloidé.

I. Plan tangent par un point pris sur la surface.

Je suppose le plan directeur horizontal. — Soient A, A' et BB' , les 2 directrices du 1^{er} système. — Soit $cd, c'd'$ une génératrice quelconque du 1^{er} système et m, m' un point sur cette génératrice. —

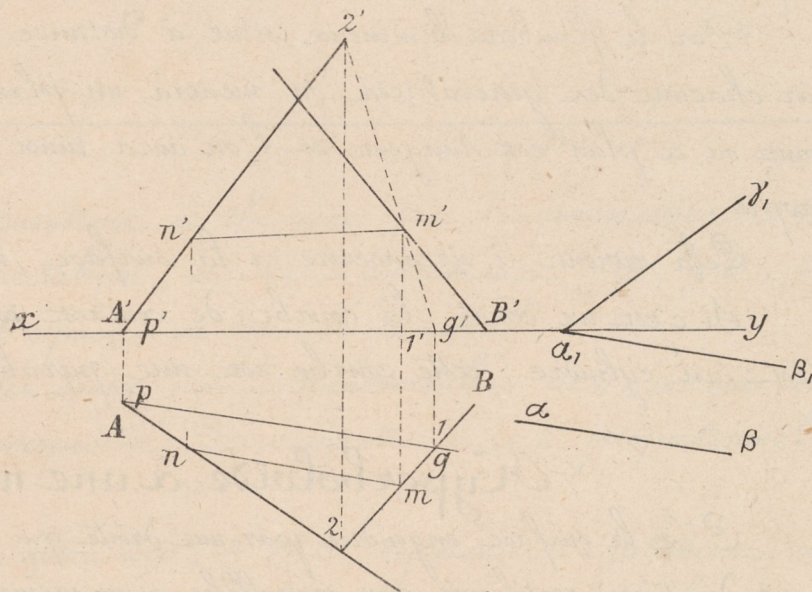
Problème 2. — Un plan passe par une génératrice de la surface ; déterminer le point où il est tangent. (même figure).

Soit cd , $c'd'$ la génératrice, et SW , la trace horizontale d'un plan passant par cette droite.

La trace du plan coupe la trace du paraboloïde au point SS' , par lequel doit passer la génératrice du 2^e système. D'ailleurs, en projection verticale, elle doit diverger du point i' , sa projection verticale est donc $i's'$, rencontrant la génératrice donnée au point $m'm$, qui est le point cherché.

Problème 3. Tracer sur la surface la génératrice qui est parallèle à une droite donnée du plan directeur.

Soient encore AA' et BB' les 2 directrices, et $\alpha\beta$ une droite du plan directeur. — Le problème revient à celui-ci :



Mener une droite qui soit parallèle à l'horizontale $\alpha\beta$ et qui rencontre les 2 directrices AA' & BB' .

A cet effet, menons par AA' un plan parallèle à $\alpha\beta$ et prenons son intersection avec BB' . — Pour cela, par la trace horizontale pp de la droite AA' menons une parallèle pg , $p'g'$ à la droite $\alpha\beta$. — Prenons l'intersection du plan défini par AA' et par pg , avec la droite BB' . — Le plan projetant horizontalement BB' coupe le plan de AA' et de pg ,

suivant la droite auxiliaire 1.2 , $1'.2'$, qui rencontre en m m' la droite AA' .
La génératrice demandée est la droite mn , $m'n'$ menée par ce point parallèlement à $\alpha\beta$.

Problème 4. — Mener au paraboloïde un plan tangent parallèle à un plan donné.

Soient β , α , γ , les traces de ce plan. (même figure)

Nous chercherons comme ci-dessus, les génératrices mn — $m'n'$ de la surface qui est parallèle à la trace horizontale α , β , de ce plan.

On mènera par cette génératrice un plan parallèle au plan donné. Il sera tangent, en un point que l'on obtiendra comme il a été fait au problème 2.

Problème 5. — Ombre propre d'un paraboloïde éclairé par un flambeau.

Par le flambeau lumineux situé à distance finie ou infinie, et par chacune des génératrices on mènera un plan; — on cherchera le point où ce plan est tangent et l'on aura ainsi un point de l'ombre propre.

Cela revient à circoncrire à la surface, un cône ou un cylindre.

Si c'est un cône, la courbe de contact est une hyperbole; si c'est un cylindre, cette courbe est une parabole.

Hyperboloïde à une nappe.

C'est la surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur 3 directrices rectilignes non parallèles à un même plan.

Avant d'étudier cette surface, démontrons le lemme préliminaire suivant :

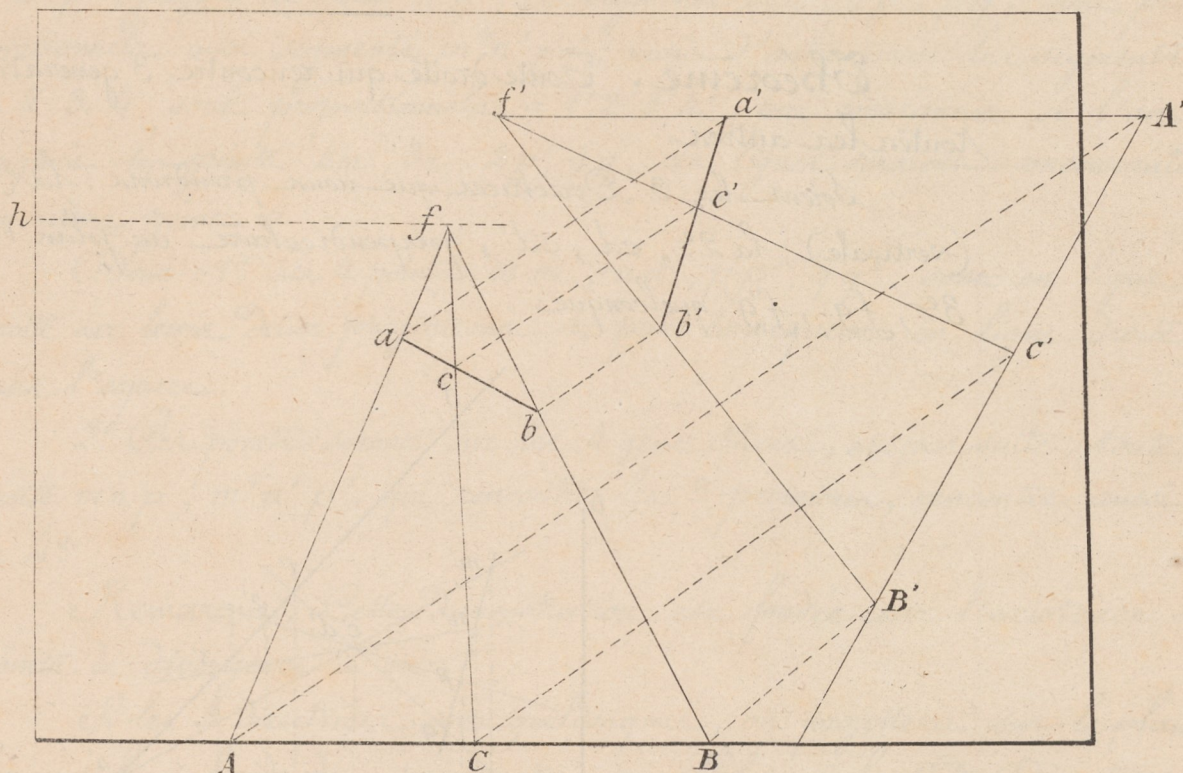
Lemme préliminaire

Soient fA , fB , fC ... plusieurs droites concourantes coupées par 2 transversales $ABCD$ — $abcd$.

Soient 2 autres droites $B'C'A'$, $b'c'a'$. — Sur ces droites, des segments proportionnels aux précédents obtenus en menant des parallèles

par les points ABC en abc .

Je dis que si l'on joint $A'a'$, Bb' , Cc' . . . ces droites seront concourantes en un même point f' .



Démontrons ce théorème par la perspective. — AB représentera une droite du tableau, et les 3 concourantes fA , fB , fC , 3 parallèles dans l'espace, ou dans le géométral.

On les coupe par la transversale acb , ce qui donne dans l'espace, et non en perspective, des segments $a.b.c$ proportionnels aux segments ABC .

D'un autre côté, $A'B'C'$ représentera également une droite du tableau en $a'b'c'$, une droite de l'espace que l'on peut considérer comme étant dans un même plan avec $A'B'C'$.

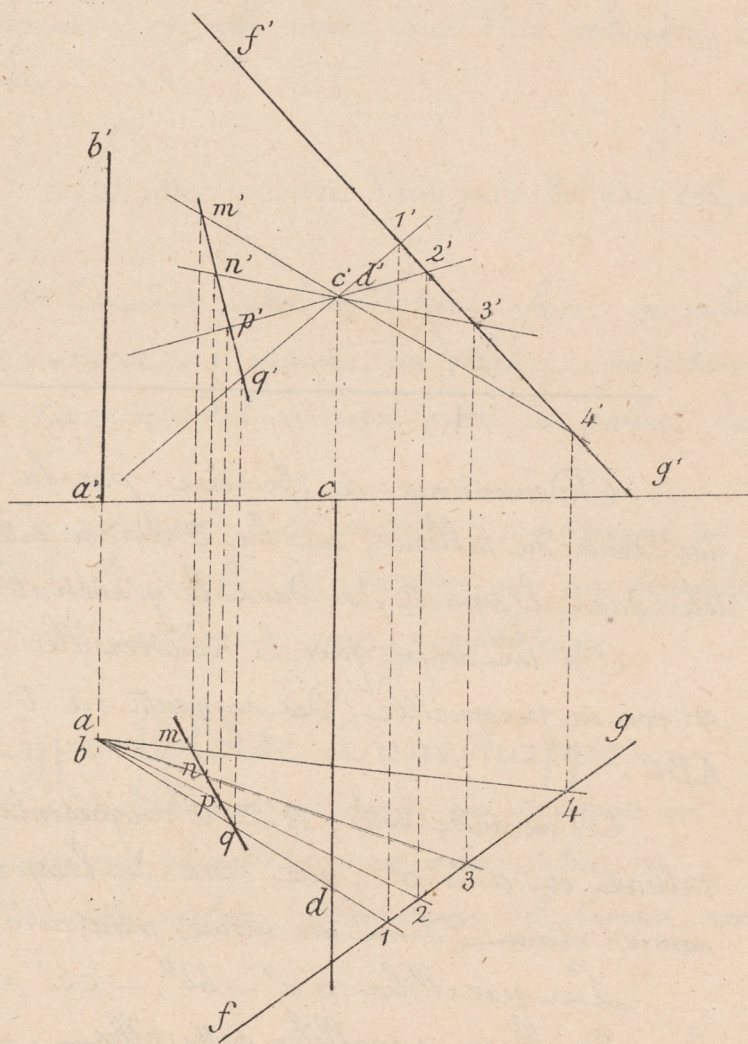
Les parallèles $aa' - bb' - cc'$ et $AA' - BB' - CC'$ sont des lignes de front parallèles entre elles. — Par conséquent les 3 droites Aa , AA' et aa' définissent un plan; — il en est de même de Bb , BB' et bb' ainsi que de Cc , CC' et cc' ; et de plus ces 3 plans sont parallèles, puisqu'ils passent par des droites parallèles deux à deux. Ils recoupent donc le plan de $a'b'$ et $A'B'$ suivant 3 droites $b'B'$, $c'C'$, $a'A'$ parallèles dans l'espace, et par suite ces droites

doivent concourir, en perspective, C. G. F. D.

Double Génération de l'Hyperboloïde.

Théorème. Toute droite qui rencontre 3 génératrices rencontre toutes les autres.

Soient les 3 Directrices que nous prendrons : la 1^{re} $ab - a'b -$ (verticale) ; la 2^e, $cd, c'd'$, perpendiculaire au plan vertical, et la 3^e, $fg, f'g'$ quelconque.



Toutes les génératrices, en projection horizontale, divergeront du point a , et en projection verticale, du point c' .

Menons 4 génératrices quelconques, en projection verticale $c'1' - c'2' - c'3' - c'4'$, et en projection horizontale $a1 - a2 - a3 - a4$. — Coupons la projection verticale par une transversale $m'n'p'q'...$