

On aura en $vg\ rs$, la trace horizontale de la surface intérieure.
C'est encore une développante de la développée de l'Ellipse, mais elle présente des rebroussements et des points doubles faciles à déterminer directement.

Problème I. — Plan tangent en un point pris sur la surface.
On mène la génératrice du point, et la tangente à la directrice par le point où cette génératrice la rencontre.

Problème II. — Plan tangent par un point extérieur.
On y transporte, parallèlement à lui-même, le sommet du cône directeur. — On prend la trace de ce dernier sur le plan de la Directrice de la surface, et on mène une tangente commune à cette trace et à la Directrice.

Problème III. — Plan tangent parallèle à une droite donnée.
On mène au cône directeur un plan tangent parallèle à la droite donnée. — On détermine, sur le cône, la génératrice de contact. — On cherche, sur la surface, la droite qui est parallèle à cette génératrice du cône.

Remarque. — Les questions d'ombre se résolvent sur les développables à l'aide des problèmes qui précèdent.

Helice Cyindrique.

On appelle hélice sur un cylindre de révolution, la courbe qui coupe toutes les génératrices sous un angle constant.

Si l'on développe le cylindre, la transformée de la courbe sera une ligne droite.

Considérons le développement. — Nous savons que les longueurs et les angles finis y sont conservés, — ce qui nous permet de dire : Que l'hélice est la courbe engendrée sur un cylindre par un point qui, se déplaçant sur une génératrice, y décrit des longueurs se qui sont dans un rapport constant avec les arcs décrits sur la base du cylindre par

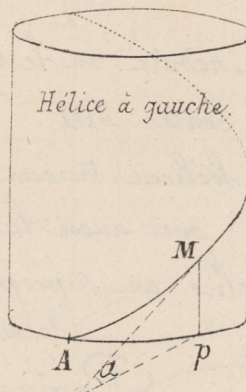
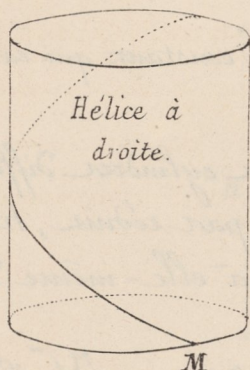
le pied de la génératrice.

$\frac{MP}{\text{arc } AP} = m = \text{tg. } \alpha$, en appelant α l'angle constant fait par les génératrices avec le plan horizontal.

Helice à droite ou Dextrorsum.

Helice à gauche ou Sinistrorsum.

En regardant le cylindre, les génératrices dirigées vers l'œil, et voyant venir la courbe vers soi, si la projection sur la base du point décrivant semble tourner comme les aiguilles d'une montre, l'hélice est à droite ou Dextrorsum.



Dans le cas contraire elle est à gauche, ou Sinistrorsum.

Spire ou Pas de l'Helice.

Lorsque l'hélice a fait un tour complet, c'est-à-dire lorsque le point décrivant est revenu sur la génératrice de départ, on dit que l'on a une Spire. — La quantité dont le point décrivant s'est déplacé sur cette génératrice se nomme le pas de l'hélice.

Soit H le pas de l'hélice, r le rayon de base du cylindre; α l'angle des tangentes à l'hélice avec le plan horizontal, on aura

$$H = 2\pi r \text{ tg } \alpha, \text{ en } \text{tg } \alpha = \frac{H}{2\pi r}$$

Pas réduit. — Le pas réduit est la quantité dont on monte sur la génératrice, non plus pour un tour complet, mais pour un déplacement égal à r compté sur la circonférence de base, ou, ce qui revient au même, c'est la hauteur dont monte le point décrivant pour un angle de rotation égal à 1.

Soit h le pas réduit, on aura évidemment

$$\frac{h}{H} = \frac{r}{2\pi r} \text{ ou } h = \frac{H}{2\pi}$$

De là les formules précédentes deviennent, en y introduisant h :

$$h = r \operatorname{tg} \alpha.$$

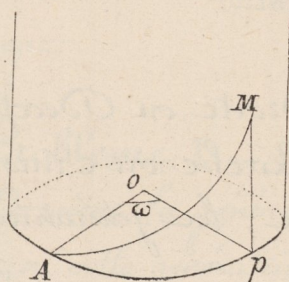
On aurait encore:

$$\text{Arc } AP = r \cdot \omega.$$

$$\text{Mais: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{MP}{\text{arc } AP} = \frac{\overline{MP}}{r \omega}$$

Et par suite:

$$h = r \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{r \times \overline{MP}}{r \omega} = \frac{\overline{MP}}{\omega}$$



Le *par* réduit est le rapport constant qui existe entre l'ordonnée MP et l'angle au centre AOP .

Deux hélices tracées sur des cylindres différents, mais ayant même *par* total H , ont aussi le même *par* réduit, h .

Une hélice est superposable à elle-même dans toutes ses parties.

Projection d'une Hélice.

Considérons un cylindre de révolution à axe vertical.

Soit AA' le point de départ de l'hélice que nous supposons *sinistram*. — Soit H le *par* total.

Sur une échelle de hauteur latérale $\overline{mn}$ on portera le *par* H . On le divisera en un certain nombre de parties égales, (8 par exemple) aux points $1'. 2'. 3'. \dots 8' \dots$

On divisera la circonférence de base en un même nombre de parties égales aux points $1. 2. 3. 4 \dots$

On mènera : 1° les génératrices du cylindre, 2° les horizontales par les points de l'échelle; et l'on aura aux intersections respectives de ces lignes, les différents points de la projection verticale de l'hélice.

Cette projection est une sinuséide. — Elle est tangente en A' ou B' au contour apparent du cylindre. Au point C' projeté sur l'axe, elle présente une inflexion (Sera démontré plus loin)

Tangente à l'Hélice. — Sous-tangente.

La tangente fera l'angle constant α avec les génératrices. — Menons, par exemple, la tangente de front, au point CC' , et

prenons sa trace DD' .

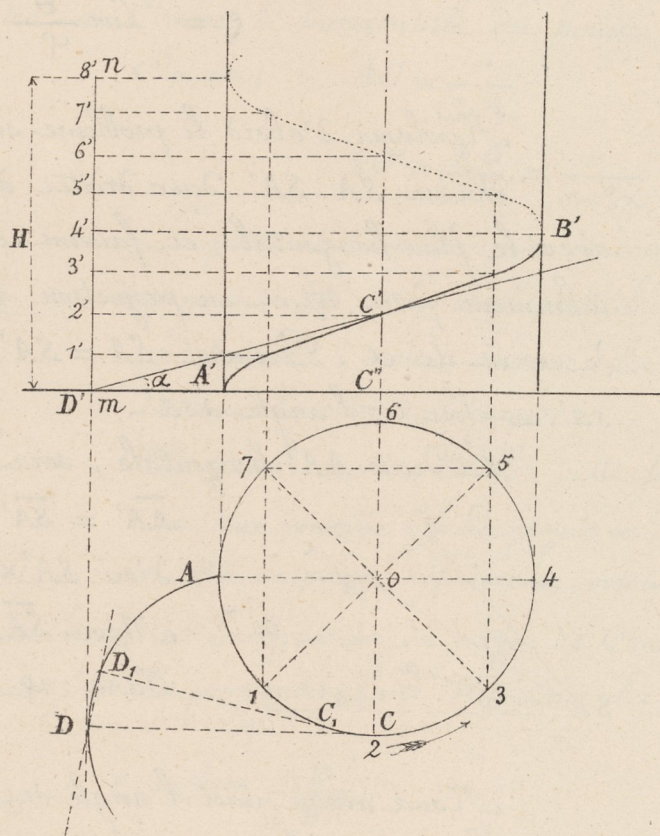
On aura $C'C'' = C''D' \operatorname{tg} \alpha$, mais d'autre part

$$C'C'' = \text{arc } AC \times \operatorname{tg} \alpha, \text{ donc}$$

$$CD = \text{arc } AC.$$

Donc: Le lieu des traces des tangentes sur le plan de base du cylindre est une développante du cercle de base.

La ligne CD se nomme sous-tangente.



Plan osculateur.

Cherchons le plan osculateur au point CC' . — C'est le plan de la tangente CD , $C'D'$ et de la tangente infiniment voisine C_1D_1 .

La trace horizontale de ce plan est la droite DD_1 qui à la limite est tangente en D à la développante, c'est-à-dire, perpendiculaire à la droite CD . — Le plan osculateur est donc, au point CC' perpendiculaire au plan vertical.

Nous avons vu que lorsqu'une courbe est projetée, l'œil étant dans le plan osculateur, sa projection présente une inflexion.

Donc au point C' l'hélice présente une inflexion en projection verticale.

Ce qui précède prouve que le plan osculateur d'une hélice est le plan passant par la tangente à l'hélice et par la normale au cylindre.

Rayon de Courbure de l'Hélice.

En appelant φ l'angle des 2 tangentes infiniment voisines, et θ l'arc qui sépare les points de contact, nous savons que l'on a :

$$\rho = \lim \frac{\theta}{\varphi}$$

Résolvons d'abord le problème suivant :

Soient SA, SA' deux droites de l'espace faisant le même angle α avec le plan horizontal, et faisant entre elles, dans l'espace, un angle infiniment petit φ , et en projection l'angle ω . — Calculons φ en fonction de ω et de α . Prenons $SA = SA'$ et projetons horizontalement en sa et sa' . — Soit ω l'angle asa' .

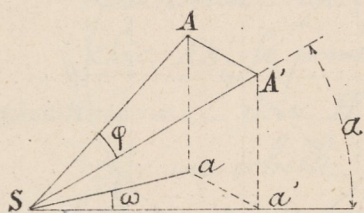
La droite AA' horizontale, sera égale à sa projection aa' . On aura :

$$\overline{AA'} = \overline{SA'} \times \varphi, \text{ et } \overline{aa'} = \overline{sa'} \times \omega.$$

$$\text{d'où } \overline{SA'} \times \varphi = \overline{sa'} \times \omega, \text{ et } \varphi = \omega \times \frac{\overline{sa'}}{\overline{SA'}}.$$

$$\text{Mais } \overline{SA} = \overline{SA'} \cos \alpha$$

$$\text{Donc : } \varphi = \omega \cdot \cos \alpha.$$



Nous avons ainsi l'angle des tangentes dans l'espace.

L'arc θ de l'espace a pour projection l'arc ab , et l'on a :

$$ab = \theta \cos \alpha, \text{ ou :}$$

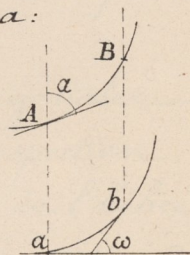
$$\theta = \frac{ab}{\cos \alpha} \quad \overline{ab} = \omega r;$$

$$\text{Donc : } \theta = \frac{r \omega}{\cos \alpha}$$

$$\text{D'autre part } \rho = \lim \frac{\theta}{\varphi} = \lim \frac{r \omega}{\cos \alpha \times \omega \cdot \cos \alpha} = \lim \frac{r}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{Donc : } \rho = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$$

Celle est l'expression du rayon de courbure.



Normale principale. — Construction Graphique du centre de courbure.

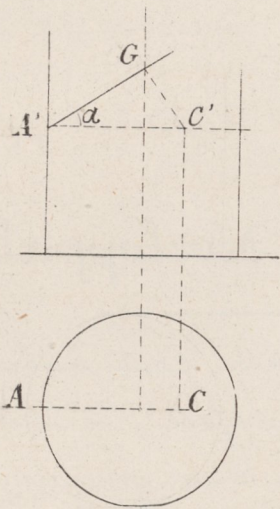
Soit A' le point de l'hélice situé sur le contour apparent.

Le plan osculateur contient la tangente à l'hélice et la normale au cylindre; la normale principale est donc la normale AC , $A'C'$ au cylindre.

Par A' menons la droite inclinée à l'angle α , prenons le point G où elle rencontre l'axe; par ce point menons-lui une perpendiculaire jusqu'à la rencontre en C' avec l'horizontale du point A' .

$$\text{On aura : } AG = \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$AC' = \frac{AG}{\cos \alpha} = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$$

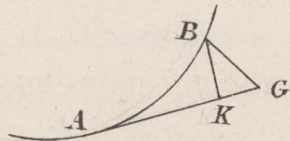


Le point C' est le centre de courbure de l'hélice; au point AA' . En déplaçant le point C' hélicoïdalement, nous aurons les centres de courbure en tous les autres points.

On peut encore établir cette formule autrement.

Soit A un point de l'hélice projeté en a , AT la tangente, et Bb un point infiniment voisin.

Nous avons vu (2^e Expression du rayon de Courbure) que si l'on abaisse du point B la perpendiculaire BK sur la tangente on aura



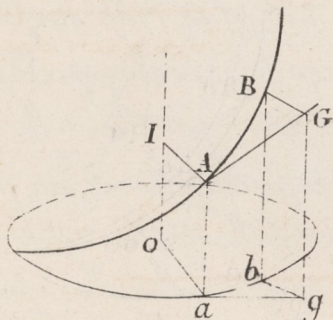
$$\rho = \lim \frac{\overline{AB}^2}{2 \overline{BK}}$$

Nous avons vu également qu'on pouvait prendre, au lieu de BK toute autre droite BG , dont l'angle avec la tangente ait pour limite un droit. Cela posé:

Menons dans l'espace la droite horizontale BG joignant le point B à la tangente. Elle se projette horizontalement en vraie grandeur, suivant bg .

L'angle BGA a pour limite un droit.

En effet: le plan ABG est, à la limite, le plan osculateur; BG devient à la limite, l'horizontale de ce plan menée par le point A



et nous venons de voir que c'est la normale principale AI , projetée horizontalement suivant ao ; on aura donc:

$$\rho = \lim \frac{\overline{AB}^2}{2 \overline{BG}}$$

Mais, en projection horizontale, on aura aussi:

$$R = \lim. \frac{\overline{AB}^2}{2 \overline{bg}}, \text{ et comme } \overline{bg} = \overline{BG}$$

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\overline{AB}^2}{ab^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ d'où:}$$

$$\rho = \frac{R}{\cos^2 \alpha}$$

Hélicoïde développable.

On nomme surface hélicoïde, toute surface engendrée soit par une courbe, soit par une autre surface, se déplaçant hélicoïdalement: c'est-à-dire liée invariablement à une génératrice d'un cylindre que l'on ferait tourner sur ce cylindre en la faisant monter de quantités proportionnelles aux angles de rotation.

Il est facile de voir que dans un mouvement hélicoïdal, tous les points de la surface ou de la courbe entraînée décrivent, sur des cylindres concentriques, des hélices de même pas et de même sens.

Deux hélices quelconques, n'étant pas sur le même cylindre ne seront pas égales; mais deux points situés à la même distance de l'axe décriront des hélices égales.

On nomme axe d'une surface hélicoïdale, l'axe commun à tous les cylindres sur lesquels sont décrits les hélices.

Si la surface mobile est un plan, la surface enveloppe sera développable: ce sera un hélicoïde développable.

Pour en étudier les propriétés, prenons le plan mobile lorsqu'il est dans la position $P \propto S'$, perpendiculaire au plan vertical. — Soit $ZZ''Z'$ l'axe de la rotation hélicoïdale.

Soit α l'angle de ce plan et du plan horizontal.