

ce point est à distance finie ; dans les cylindres il est à distance infinie.

2°. Les surfaces gauches pour lesquelles le plan tangent varie en chaque point d'après le Théorème de Chasles.

Cône Directeur.

Si par un point de l'espace on mène des parallèles à toutes les génératrices d'une surface réglée, ce cône se nomme le cône directeur de cette surface.

Théorème. — Le plan tangent au cône directeur est parallèle au plan tangent à l'infini sur la génératrice correspondante de la surface. Puisque le plan tangent à l'infini est parallèle à la fois à deux génératrices infiniment voisines.

Surfaces développables.

Nous avons reconnu qu'elles avaient le même plan tangent tout le long d'une génératrice.

Prenons 2 génératrices infiniment voisines et leurs plans tangents. Ces derniers se couperont et, à la limite, leur intersection sera la génératrice elle-même.

Donc : Toute surface développable peut être considérée comme l'Enveloppe d'un plan mobile.

Nous avons reconnu de plus que si la distance de 2 génératrices est infiniment petite par rapport à leur angle, cette distance est au moins du 3^e ordre, et toutes les génératrices sont tangentes à une courbe gauche dans l'espace.

Donc : Dans une surface développable les génératrices sont tangentes à une même courbe gauche que l'on nomme son arête de rebroussement.

— De plus : Le plan tangent à une surface développable est osculateur à son arête de rebroussement ; car étant tangent à l'infini aussi bien qu'ailleurs, il est le plan mené par une génératrice (c'est-à-dire une

tangente à l'arête) parallèlement à la génératrice (tangente) infiniment voisine, — ce qui définit le plan osculateur à l'arête de rebroussement.

Dès lors, nous considérerons une surface développable, soit comme l'enveloppe d'un plan mobile, soit comme le lieu des tangentes à une courbe gauche.

Cône - directeur d'une développable.

Si par un point de l'espace on mène une série de plans parallèles aux plans tangents à la développable, ils auront une enveloppe, qui sera un cône, et précisément le cône directeur, — car deux plans ainsi menés, infiniment voisins, se couperont suivant une parallèle aux deux plans tangents correspondants de la développable, c'est-à-dire suivant une parallèle à une de ses génératrices.

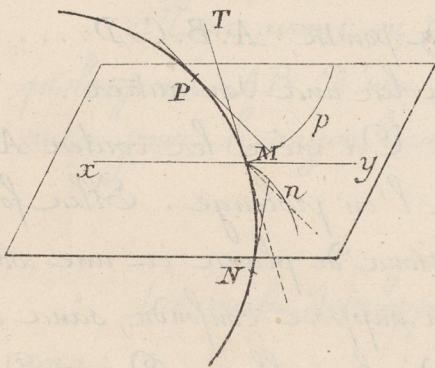
Réciproquement : si par un point les plans menés parallèlement aux plans tangents d'une surface ont une enveloppe (qui sera forcément un cône) cette surface est développable.

Arête de Rebroussement.

Le théorème qui va suivre justifie le nom donné à l'arête de rebroussement.

Théorème. — Les sections planes d'une développable présentent des rebroussements aux points où elles rencontrent l'arête de rebroussement.

Soit M ce point, Xy la trace du plan osculateur sur le plan sécant, MT la tangente au point M .



On voit à priori que si nous prenons deux points N et P de part et d'autre du point M et si nous menons les tangentes Nn et Pp , les points d'intersection n et p avec le plan sécant seront d'un même côté du point M .

Soignons Mn , c'est une sécante de la courbe d'intersection, qui à la limite deviendra la tangente en M .

Mais la droite Mn est la trace sur le plan sécant, d'un plan qui passerait par la tangente Nn et par le point infiniment voisin M .

Donc, à la limite, ce plan devient le plan osculateur en M , et la sécante Mn devient la trace Xy du plan osculateur.

Il en sera de même pour la sécante Mp .

Donc, à la limite, les deux branches de courbe sont tangentes à la droite Xy et le point M est un point de rebroussement.

Projections & contours apparents d'une développable.

1^o Les génératrices de l'espace étant tangentes à l'arête de rebroussement, le seront aussi en projection.

Donc: la projection de l'arête de rebroussement formera une partie de son contour apparent.

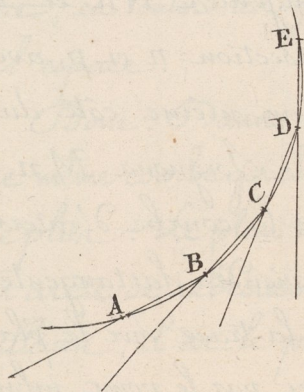
2^o S'il est possible de mener à la développable un plan tangent parallèle aux projectantes ou aux rayons visuels, comme ce plan sera tangent tout le long de la génératrice, la projection ou la perspective de cette génératrice formera une 2^{ème} partie du contour apparent.

On généralisera facilement ce qui précède pour l'appliquer aux problèmes d'ombres.

Développement d'une développable.

De ce qu'une développable est l'enveloppe d'un plan mobile, il en résulte évidemment, qu'en repliant successivement chaque plan autour de son intersection avec le plan voisin, on pourra faire développer sur un plan la surface toute entière.

Dans la pratique, soit $ABCDE$ l'arête de rebroussement, on prend sur cette courbe des points $A, B, C, D, \dots$ suffisamment près les uns des autres.



On mène les cordes $AB, BC, CD, \dots$ que l'on prolonge. Elles forment une série de portions de plans et une sorte de polyèdre que l'on suppose confondu, sans erreur sensible, avec la développable. — On prend successivement les angles formés par les sécantes et on les développe les uns à la suite des autres. Il en résulte:

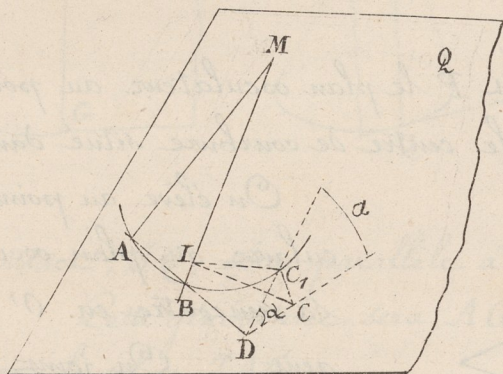
1°. Que le périmètre d'une courbe tracée sur la surface n'en soit pas altéré pendant le développement.

2°. Que l'angle sous lequel 2 lignes se coupent n'en soit pas altéré non plus, à la condition toutefois que cet angle ne soit pas infiniment petit, parce que l'erreur qui résulte de ce que l'on remplace la surface par le polyèdre, erreur qui est du 1^{er} ordre, n'en est plus alors négligeable par rapport à cet angle infiniment petit.

Par conséquent, les rayons de courbure sont altérés par le développement.

Rayon de courbure d'une courbe avant et après le développement de la développable sur laquelle elle est tracée.

Soit A, B, C une courbe tracée sur une développable, et trois points de cette courbe infiniment voisins.



Le cercle de courbure dans l'espace serait celui qui passerait par les 3 points A, B, C . — Il serait donc contenu dans le plan osculateur.

Menons les deux génératrices de la surface qui passent en A et en B .

En négligeant des quantités du 3^e ordre elles se rencontrent en M , et

définissent le plan tangent en B . — Soit Q ce plan tangent.

Développons le point C sur ce plan, en le faisant tourner autour de BM comme charnière. — Soit C_1 son rabattement sur le plan Q .

Nous avons vu (3^e Expression du rayon de courbure) que si nous prolongeons AB , d'une longueur BD égale, et si nous joignons DC , on aura pour le rayon dans l'espace :

$$\rho = \frac{BD^2}{CD}$$

La courbe développée passera par C_1 et son rayon de courbure sera :

$$\rho = \frac{BD^2}{DC_1}, \text{ et par suite :}$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{DC}{DC_1}.$$

Mais, à la limite CC_1 étant l'arc de cercle décrit d'un point I de la charnière comme centre, est perpendiculaire sur le plan Q , et par suite DC_1 est la projection de DC .

$$\text{Donc } DC_1 = DC \cos \alpha$$

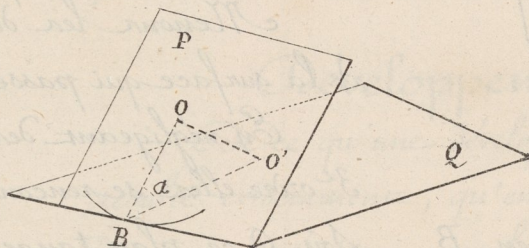
α est l'angle du plan ABC , osculateur de la courbe et du plan tangent Q .

En effet, on aurait pu prendre le point C , tel que CD fût perpendiculaire sur BD , ce qui eût également entraîné la perpendiculaire de C_1D .

$$\text{Donc: } \rho' = \frac{\rho}{\cos \alpha} \quad \text{et par suite}$$

Théorème: Le rayon de courbure de la transformée est égal à celui de la courbe donnée divisé par le Cosinus de l'angle α que fait le plan osculateur de la courbe avec le plan tangent à la surface au même point.

Construction. Soit P le plan osculateur au point B d'une courbe, Q le plan tangent, — O le centre de courbure situé dans le plan osculateur.



On élève au point O une perpendiculaire au plan osculateur jusqu'à sa rencontre en O' avec le plan tangent. — On joint $O'B$, et l'on a le rayon de courbure $\rho' = O'B$.

Conséquences: 1°. Si le plan osculateur est perpendiculaire au plan tangent, $\alpha = 90^\circ$ et $\cos \alpha = 0$

$\rho' = \infty$; la transformée présente une inflexion.

2°. Si le plan osculateur se confond avec le plan tangent, ce qui arrive pour l'arête de rebroussement,

$$\alpha = 0, \quad \cos \alpha = 1, \quad \rho = \rho'; \quad \text{Donc:}$$

l'arête de rebroussement possède les mêmes rayons de courbure avant et après le développement.