

les plans tangents menés à la surface, soit par l'œil du spectateur, soit parallèlement aux projetantes.

Dans le cas des ombres, les rayons lumineux peuvent être considérés comme des projetantes obliques, et ce contour apparent devient l'ombre portée par la surface.

Théorème I. Le contour apparent ou l'ombre d'une surface sur un tableau est la base d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à la surface et dont les génératrices passeraient par l'œil du spectateur (ou par le flambeau), situé à distance finie ou infinie.

Théorème II. Le contour apparent, dans l'espace, (ou la ligne d'ombre propre) est la ligne de contact du cône précédent et de la surface.

Théorème III. Quand une courbe est tracée sur une surface, sa projection, sa perspective, ou son ombre portée sont tangentes au contour apparent perspectif ou projeté, ou à la ligne d'ombre portée de cette surface.

Exception, dans le cas où la tangente à la courbe de l'espace, au point où elle rencontre le contour apparent dans l'espace, ou la ligne d'ombre propre serait un rayon visuel ou un rayon lumineux.

Dans ce cas, on a vu que la tangente à la projection était la trace, sur le plan du tableau, du plan osculateur à la courbe. — La courbe projetée présente un rebroussement.

Théorème IV. Lorsqu'une surface est l'enveloppe d'une surface mobile, le contour apparent, projeté ou perspectif de la surface enveloppe est l'enveloppe des contours apparents de la surface mobile. — L'ombre portée est l'enveloppe des ombres portées par la surface mobile.

Surfaces réglées.

On nomme ainsi toute surface dont les génératrices sont des droites. On la divise en deux classes : les surfaces gauches et les surfaces

Développables. — Cette classification résultera de l'étude des variations de position du plan tangent à une surface réglée.

Variations du plan tangent à une surface réglée. — Théorème de Chasles.

Soit une série de droites, variant d'une manière continue et formant une surface réglée.

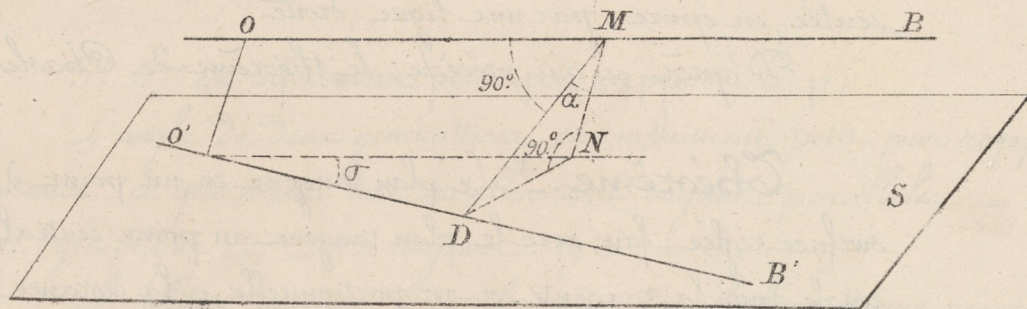
Soit M un point pris sur une génératrice. — Le plan tangent en ce point contiendra évidemment, la génératrice. — Si nous prenons un autre point sur la même génératrice, le plan tangent, tout en contenant cette génératrice, ne sera pas le même qu'en M .

On se propose d'étudier la loi de variation des angles que ces divers plans tangents forment entre eux.

A cet effet, cherchons la plus courte distance OO' des deux génératrices infiniment voisines $OB, O'B'$.

On connaît la construction usitée pour cette recherche.

Soit M un point de la génératrice OB . — Abaissons MN , perpendiculaire sur le plan S , qui a été mené par $O'B'$ parallèle à OB , et menons MD perpendiculaire sur OB .



Soit α l'angle DMN . — La ligne MD devient, à la limite, une tangente à une courbe qui, sur la surface, passerait par M ; et par suite le plan tangent en M est défini par la droite DM et par la génératrice OM .

Au point O , que nous nommerons le point central de la génératrice OM , le plan tangent est défini par la génératrice et par la droite OO' , ou, ce qui revient au même, par sa parallèle MN .

Le plan tangent en O , se nomme le Plan Central.

Le plan tangent en M forme donc avec le plan central un angle mesuré en α sur la figure.

Soit x la distance OM du point M au point central, on a sur la figure, l'angle en N étant droit :

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim : \frac{DN}{MN}.$$

Soit p la plus courte distance OO' des deux génératrices ; et σ leur angle

$$DN = O'N \sin \sigma = x \sin \sigma$$

$$MN = p$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim : \frac{x \sin \sigma}{p} ;$$

et remplaçant $\sin \sigma$, par σ , puisque σ est infiniment petit,

$$\operatorname{tg} \alpha = x \times \lim : \frac{\sigma}{p} = \frac{x}{\lim \frac{p}{\sigma}}$$

$$\text{Soit : } K = \lim \frac{p}{\sigma}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{K} ; \text{ pour } x = \infty, \operatorname{tg} \alpha = \infty \text{ et } \alpha \text{ i } 90^\circ$$

La quantité K se nomme le paramètre de distribution ; c'est la limite du rapport de la plus courte distance de 2 génératrices infiniment voisines à l'angle σ qu'elles forment entre elles.

On voit que ce paramètre est du 1^{er} degré ; c'est une longueur, représentée, en épure, par une ligne droite.

D'après ce qui précède, le théorème de Chasles s'énonce ainsi :

Théorème. — Le plan tangent en un point d'une génératrice d'une surface réglée, fait avec le plan tangent au point central (plan central), un angle dont la tangente est proportionnelle à la distance du point au point central, et s'obtient en divisant cette distance par le paramètre de distribution de cette génératrice.

Remarque. — Le plan S est le plan tangent à l'infini puisqu'il est perpendiculaire au plan central. Donc : le plan tangent à l'infini est le plan mené par une génératrice, parallèlement à la génératrice infiniment voisine.

Discussion de la formule $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{K}$ $K = \lim \frac{p}{\sigma}$.

Les deux infiniment petits p et σ peuvent être de même ordre ou d'ordre différent :

1^o S'ils sont de même ordre, la quantité K a une limite finie, et la formule précédente s'applique comme on vient de le faire voir en l'établissant.

2^o p est infiniment petit par rapport à σ .

Nous avons vu que dans ce cas, si p n'est pas du 1^{er} ordre, il est forcément du 3^{ème}.

Et l'on aura toujours $\operatorname{tg} \alpha = \infty$.

Dans ce cas : — Le plan tangent est le même tout le long de la génératrice, c'est le même que le plan tangent à l'infini.

Pour le point central, puisque p est du 3^e ordre et de la forme $m\theta^3$, on aura K de la forme $m'\theta^2$.

On fera tendre x vers zéro, et l'on aura :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0}{0} \quad (\text{Indéterminé})$$

Cas particulier. — p est toujours nul. La surface est un cône.

— Le plan y est le même tout le long de la génératrice, et le même qu'à l'infini ; — au sommet il est indéterminé.

3^o σ est infiniment petit par rapport à p .

L'angle de deux génératrices est infiniment petit par rapport à leur distance, ce qui veut dire qu'elles sont toujours parallèles. — La surface est cylindrique. — On a toujours $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

Le plan tangent y est le même tout le long d'une génératrice et confondu avec le plan central.

À l'infini, il est indéterminé, car on y a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\infty}{\infty}$.

Résumé :

Les surfaces réglées se divisent en deux classes :

1^o Les surfaces développables qui ont même plan tangent tout le long d'une même génératrice, — sauf pour un point singulier qui est le point central. — Dans les cônes et dans les développables ordinaires

ce point est à distance finie ; dans les cylindres il est à distance infinie.

2°. Les surfaces gauches pour lesquelles le plan tangent varie en chaque point d'après le Théorème de Chasles.

Cône Directeur.

Si par un point de l'espace on mène des parallèles à toutes les génératrices d'une surface réglée, ce cône se nomme le cône directeur de cette surface.

Théorème. — Le plan tangent au cône directeur est parallèle au plan tangent à l'infini sur la génératrice correspondante de la surface. Puisque le plan tangent à l'infini est parallèle à la fois à deux génératrices infiniment voisines.

Surfaces développables.

Nous avons reconnu qu'elles avaient le même plan tangent tout le long d'une génératrice.

Prenons 2 génératrices infiniment voisines et leurs plans tangents. Ces derniers se couperont et, à la limite, leur intersection sera la génératrice elle-même.

Donc : Toute surface développable peut être considérée comme l'Enveloppe d'un plan mobile.

Nous avons reconnu de plus que si la distance de 2 génératrices est infiniment petite par rapport à leur angle, cette distance est au moins du 3^e ordre, et toutes les génératrices sont tangentes à une courbe gauche dans l'espace.

Donc : Dans une surface développable les génératrices sont tangentes à une même courbe gauche que l'on nomme son arête de rebroussement.

— De plus : Le plan tangent à une surface développable est osculateur à son arête de rebroussement ; car étant tangent à l'infini aussi bien qu'ailleurs, il est le plan mené par une génératrice (c'est-à-dire une