

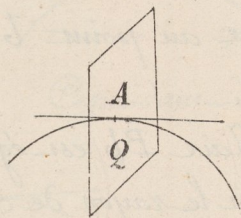
Courbes - gauches.

On nomme ainsi les courbes qui ne sont pas planes.

Tangente. Même définition que pour les courbes planes.

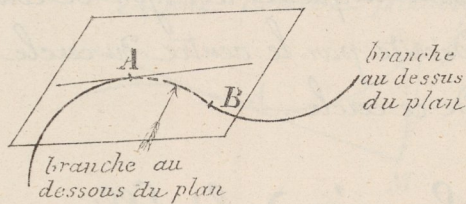
Plan tangent. - C'est celui qui passe par la tangente. - Il y en a une infinité.

Plan normal. - C'est le plan Q mené perpendiculairement à la tangente, par le point de contact. - Il contient toutes les perpendiculaires à la tangente, c'est-à-dire, toutes les normales à la courbe. - Il est unique.



Plan osculateur. —

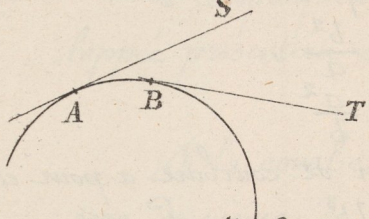
1°. C'est le plan passant par la tangente en A et par le point infiniment voisin B.



Remarque. - Le plan osculateur est tangent à la courbe, mais cette dernière le traverse.

2°. C'est encore le plan passant par 3 points infiniment voisins.

3°. C'est encore le plan passant par la tangente AS en A, et parallèle à la tangente BT, au point infiniment voisin.



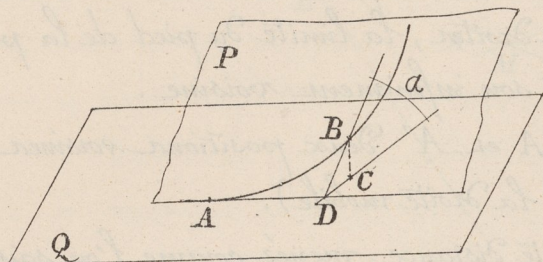
Des Infiniment petits relatifs à une courbe - gauche.

Ce sont, d'abord, les mêmes que pour les courbes planes, et en plus, ceux qui suivent :

1°. La distance d'un point de la courbe à un plan tangent quelconque, est du 2^e ordre.

Soit AD la tangente, Q le plan tangent. - Abaissons la perpendiculaire BC sur le plan tangent, et menons BD , CD perpendiculaires sur la tangente.

On sait que BD (distance à la tangente), est du 2^e ordre, et de la forme $K\theta^2$.



Soit α l'angle BDC , on aura $BC = BD \sin \alpha$, et par suite BC est du 2^e ordre; - à moins que l'angle α n'ait pour limite zéro.

Mais si nous menons le plan P passant par la tangente AD et par le point B , c'est-à-dire le plan osculateur, α est l'angle des 2 plans P et Q , et puisque nous supposons que le plan Q est un plan tangent quelconque, il ne se confond pas avec le plan osculateur, et par suite, l'angle α n'a pas pour limite zéro.

2^o. La distance d'un point de la courbe au plan osculateur est au moins du 3^e ordre.

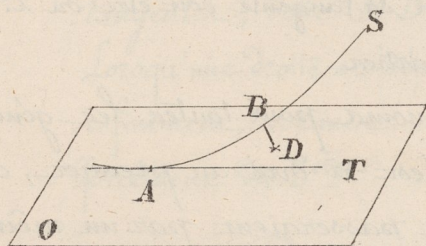
Sur la figure précédente, si l'angle α tend vers 0, le plan Q devient le plan osculateur, et l'expression

$$BC = BD \sin \alpha, \text{ en y faisant}$$

$$BD = K\theta^2 \text{ et } \sin \alpha = K'\theta,$$

devient de la forme $K''\theta^3$.

3^o. Théorème. La plus courte distance de 2 tangentes infiniment voisines d'une courbe gauche est au moins du 3^e ordre.



En effet, soient AT et BS , deux tangentes infiniment voisines. On sait que la plus courte distance s'obtiendra en menant par la droite AT un plan Q parallèle à la droite BS , (Ce sera précisément le plan osculateur) et prenant la distance BD du point B à ce plan. -

Nous venons de reconnaître que cette distance était, au moins, du 3^e ordre. C. Q. F. D.

Théorème.

Théorème réciproque. — Si une droite mobile se déplace de telle sorte que l'angle γ formé par deux droites infiniment voisines étant du 1^{er} ordre, la plus courte distance de ces deux droites soit toujours du 3^e ordre, cette droite sera constamment tangente à une même courbe gauche.

Cette courbe sera le lieu des points centraux des droites, en appelant point central d'une des droites, la limite du pied de la perpendiculaire commune à cette droite et à son infiniment voisine.

En effet: soient A et A' deux positions voisines de la génératrice. (Nous désignerons ainsi la droite mobile).

cc' leur plus courte distance, mené comme l'on sait, et γ leur angle (du 1^{er} ordre).

Soit B la génératrice précédant immédiatement A , et M la position limite du pied de la perpendiculaire commune à A et B , c'est-à-dire, le point central de A .

Soit B' la génératrice suivant immédiatement A' , et soit M' son point central, défini comme le précédent.

Je dis que les droites A et A' sont toutes deux tangentes au lieu des points M et M' .

D'après ce qui a été dit sur les infiniment petits, cela sera prouvé si nous démontrons:

1^o Que MM' est de même ordre que l'angle γ . (L'on sait en effet que l'angle de 2 tangentes infiniment voisines doit être du même ordre que l'arc de courbe qui sépare les deux points de tangence).

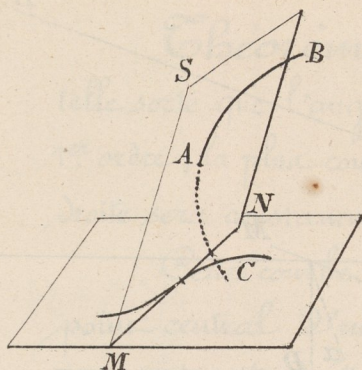
2^o Que la distance du point M' à la droite A est du 2^e ordre (Puisque la distance d'un point d'une courbe à sa tangente doit être du 2^e ordre).

Démontrons ces deux parties.

1^o MM' ne peut être, du moins pour toutes les génératrices, d'un ordre supérieur à celui de γ , c'est-à-dire au premier, car cela voudrait dire que toutes les génératrices passeraient par un même point central, et par suite formeraient un cône, — Donc MM' est du 1^{er} ordre.

2^o On aura la distance du point M' à la droite A en abaissant MD perpendiculaire sur le plan S , puis DE perpendiculaire sur A et joignant $M'E$.

Par hypothèse $M'D$ est du 3^e ordre et de la forme $K\theta^3$.

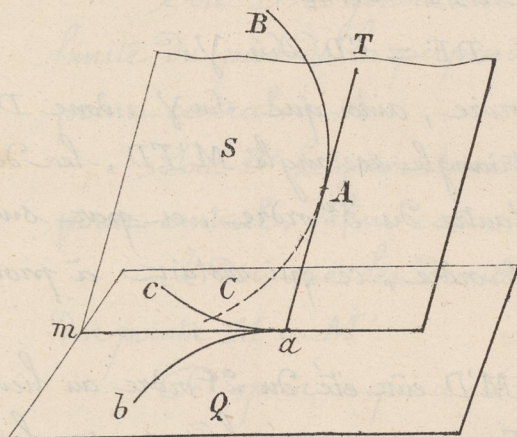


à la courbe est dans le plan osculateur; par suite il y aura des points situés en projection de part et d'autre de la trace MN du plan osculateur, laquelle sera d'ailleurs tangente à la projection.

2°. Si l'œil est situé sur le prolongement de la tangente, ou si les projetantes sont parallèles à cette tangente, la courbe présente un point d'inflexion.

En effet: soit S le plan osculateur traversé en A par la courbe; a m sa trace sur le plan de projection;

TA la tangente, contenant l'œil, à distance finie ou infinie;



En projection, la trace, a m, du plan osculateur sera la tangente; — il y aura des points situés, en projection, de part et d'autre de a m.

De plus il n'y aura pas de points au delà du point a. Donc, la courbe, en projection, présentera un rebroussement de 1^{re} Espèce.

Remarque. — La projection abc est la base du cône perspectif ou du cylindre projetant de la courbe BAC.

Ce cylindre ou ce cône, présentent donc un rebroussement tout le long de la génératrice TA .

Surfaces.

Nous considérerons une surface, soit comme le lieu géométrique d'une ligne (droite ou courbe) appelée génératrice, assujettie à se mouvoir suivant une loi déterminée; soit comme l'enveloppe d'une surface mobile.

Dans ce dernier cas, la surface enveloppe est le lieu géométrique de la courbe d'intersection de la surface mobile dans deux de ses positions infiniment voisines.