

Courbure moyenne.

La courbure moyenne de l'arc de courbe AB est le quotient de l'angle de contingence ω , par la longueur de l'arc θ .

Courbure en un point.

C'est la limite de la courbure moyenne. C'est donc $\lim. \frac{\omega}{\theta}$

Courbure d'un arc de cercle.

Pour un arc de cercle on aura toujours

$$MN = \omega R, \quad \text{ou} \quad \theta = \omega R;$$

d'où

$$\frac{\omega}{\theta} = \frac{1}{R}.$$

La courbure d'un cercle est constante et égale à $\frac{1}{R}$.

Rayon de Courbure.

C'est le rayon d'un cercle qui aurait la même courbure que la courbe au point considéré.

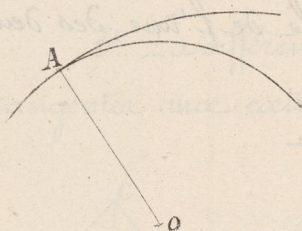
Soit ρ ce rayon de courbure, on aura donc

$$\rho = \lim. \frac{\theta}{\omega}.$$

Centre de Courbure. — Cercle osculateur.

C'est le centre d'un cercle qui serait tangent en A à la courbe et qui aurait même rayon de courbure qu'elle.

Ce cercle se nomme le Cercle osculateur ou le Cercle de Courbure de la courbe.



Position du Centre de Courbure.

Théorème. — Le centre de courbure est à la rencontre de deux normales infiniment voisines.

En effet, soit O la rencontre de ces deux normales,

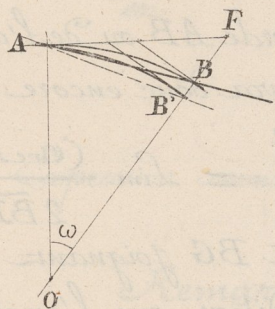
AB la courbe

AB' le cercle décrit de O comme centre avec OA pour rayon,

et AF' , la tangente.

Par définition, on a :

$$\rho = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{AB}{\omega}.$$



Mais AB et AB' ont tous deux même projection oblique AF sur la tangente, et à la limite, l'angle en F est droit. Donc AB et AB' ne diffèrent de AF et par suite ne diffèrent l'un de l'autre que d'un infiniment petit du 3^e ordre ; on peut donc remplacer AB par AB' et par suite écrire :

$$\rho = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{AB'}{\omega}.$$

Mais $\frac{AB'}{\omega}$ c'est AO, donc

$$\rho = \lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{AO}$$

1^{ère} Expression du rayon de courbure.

Dans le cercle AB' on a

$$\overline{AF}^2 = FB' \times (2R + FB'), \text{ d'où}$$

$$R \text{ ou } \rho = \frac{\overline{AF}^2}{2FB'} - \frac{FB'}{2}$$

On négligera $\frac{FB'}{2}$ qui est infiniment petit devant S qui ne l'est pas.

D'un autre côté on a vu que deux normales voisines avaient une différence qui était du 3^e ordre, donc BB' est du 3^e ordre et peut être négligé en présence de FB', qui est du 2^e.

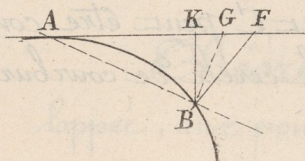
On aura donc

$$\rho = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\overline{AF}^2}{2FB'}$$

D'où la conséquence suivante : — D'un point voisin de la tangente, on abaisse une normale sur la courbe, et le rayon de courbure a pour expression le carré de la tangente divisé par deux fois cette portion de normale.

2^e Expression.

Au lieu d'abaisser une normale sur la courbe, prenons le point B sur la courbe et abaissons une perpendiculaire sur la tangente, ce qui est plus facile. Soit BK cette perpendiculaire.



L'angle en F ayant pour limite un droit, les 2 lignes BK et BF sont égales à la limite et peuvent

être remplacées l'une par l'autre. On aura donc :

$$\rho = \lim \frac{\overline{AK}^2}{2\overline{BK}}$$

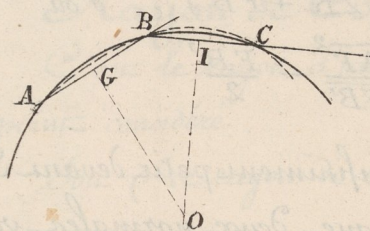
La tangente AK diffère de la corde AB ou de l'arc AB , d'un infiniment petit du 3^e ordre. On aura donc encore :

$$\rho = \lim \frac{(\text{Corde } \overline{AB})^2}{2\overline{BK}} = \lim \frac{(\text{Arc } \overline{AB})^2}{2\overline{BK}}$$

Enfin, menons toute autre droite BG joignant le point B de la courbe à la tangente ; mais à la condition que l'angle AGB tende vers un droit, et l'on aura encore

$$\rho = \lim \frac{\overline{AG}^2}{2\overline{BG}}$$

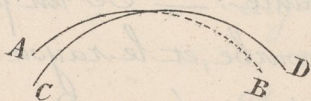
Théorème. — Le Cercle de Courbure est la limite du cercle qui passe par 3 points infiniment voisins.



En effet, à la limite, les deux perpendiculaires OI et OG deviennent deux normales infiniment voisines et, par suite, O est le centre des Courbure.

Théorème. — Le Cercle de Courbure est un cercle qui est tangent à la courbe en un point et qui passe par le point infiniment voisin.

Ce théorème fait bien comprendre que le cercle de courbure traverse la courbe, tout en lui étant tangent.

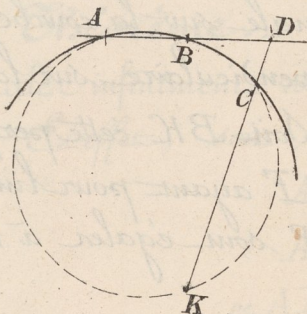


AB — Cercle

CD — Courbe.

3^e Expression du rayon de courbure.

Soient ABC , trois points infiniment voisins.



Prolongeons la corde AB , d'une longueur BD égale à elle-même ; joignons DC et prolongeons jusqu'en K , rencontre avec le cercle de courbure.

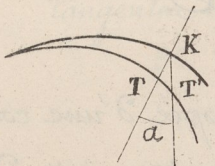
Le point C peut être considéré comme étant sur le cercle de courbure, et l'on aura :

$$\begin{aligned} \overline{DA} \times \overline{DB} &= DC \times (DC + CK) \\ \text{à la limite} \quad DC + CK &= 2 \varrho . \\ \text{et} \quad \overline{DA} \times \overline{DB} &= 2 \overline{DB}^2 ; \text{ donc} \\ 2 \varrho &= \frac{2 \overline{DB}^2}{DC}, \text{ et } \varrho = \frac{\overline{DB}^2}{DC} \end{aligned}$$

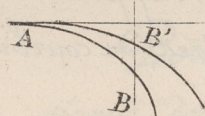
Expression commode, et dont on se servira plus loin.

Remarque. On a vu que la distance TK qui séparait un point d'une courbe, du point du cercle osculateur situé sur la même normale était du 3^e ordre.

Si cette distance était comptée, non plus en TK sur la normale, mais en $T'K$ sur une ligne oblique à cette normale, pourvu que l'angle α ainsi formé n'ait pas pour limite 1 droit, elle serait encore du 3^e ordre.



C'est ce qui arrivera si l'on compte cette distance sur une perpendiculaire à la tangente, en BB' , par exemple, —

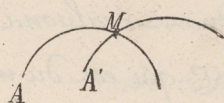


BB' est du 3^e ordre ;
ou sur une parallèle aux axes des coordonnées.

Conséquences. — Deux courbes, tangentes au même point à une même droite et dont les distances à la tangente diffèrent entre elles de quantités du 3^e ordre, auront le même cercle de courbure. — Ces distances peuvent être comptées suivant une perpendiculaire ou suivant une oblique à la tangente, pourvu que l'angle de cette oblique et de la tangente n'ait pas pour limite zéro.

Courbes enveloppes.

La courbe enveloppe d'une courbe mobile, A , est le lieu géométrique des points d'intersection M , de la courbe A dans deux positions infiniment voisines, A et A' . — La courbe A est dite enveloppée.



Théorème. — La Courbe enveloppe est tangente à la courbe enveloppée, aux points dont elle est le lieu géométrique.