

2^e Partie.

Notions élémentaires sur la Théorie des Surfaces.

Courbes planes:

Une courbe peut être considérée comme engendrée par le mouvement continu d'un point.

Si l'on rapporte la courbe à deux axes, ses coordonnées x et y peuvent être considérées comme étant des fonctions continues $f(t)$ et $q(t)$ d'une même variable.

Tangente. — Une tangente est la limite d'une sécante qui a tourné autour d'un des points de sécance, jusqu'à ce que le 2^e point soit venu se confondre avec le 1^{er}.

Des infiniment petits dépendant d'une Courbe plane.

Soient A et B , deux points infiniment voisins; nous prendrons pour infiniment petit principal, ou du 1^{er} ordre, la longueur de l'arc de courbe AB ; nous le désignerons par θ .

On sait que l'on nomme infiniment petit du 2^e ordre, celui qui est de la forme $K\theta^2$. — K étant un coefficient quelconque, fini.

Est infiniment petit du 3^e ordre, celui de la forme $K'\theta^3$

— id — id — id — 4^e id — id — $K''\theta^4$, etc. . . .

Théorème fondamental sur les infiniment petits.

Ce théorème, démontré en analyse, est le suivant:

Dans toute limite de rapports ou de sommes d'infiniment petits, on peut substituer l'un à l'autre deux infiniment petits qui ne diffèrent l'un de l'autre que d'un infiniment petit par rapport à chacun d'eux. —

Autrement dit: — On peut négliger les infiniment petits d'un

ordre supérieur à ceux qui entrent dans les rapports ou dans les sommes dont on cherche les limites.

Remarque. — Les infiniment petits que l'on substitue l'un à l'autre doivent donc être du même ordre ; mais cela ne suffit pas ; il faut en outre que la limite de leur rapport soit l'unité.

Théorème. — La limite du rapport ou du produit de deux variables est égale au rapport ou au produit des limites de ces variables.

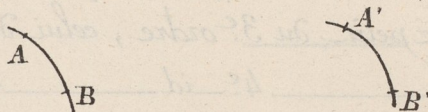
Théorème. La limite d'une somme de variables est égale à la somme des limites de ces variables.

Infiniment petits du 1^{er} ordre dans les courbes :

1^o La longueur θ de l'arc de courbe qui sépare 2 points infiniment voisins, est prise pour infiniment petit du 1^{er} ordre.

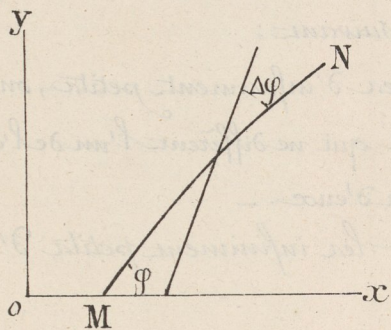
2^o Les différences Δx et Δy des coordonnées de ces 2 points ; sauf dans le cas particulier où la courbe aurait pour tangente en A, une parallèle à l'axe des x ou à l'axe des y , sont des infiniment petits du premier ordre.

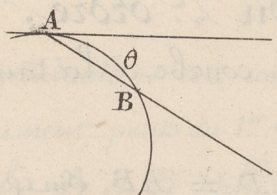
3^o Si une 2^e courbe $A'B'$ a les coordonnées de ses points définies par des fonctions continues de la même variable t , dont dépendent les coordonnées de la première, et si les points infiniment voisins A' et B' correspondent aux points A et B de la 1^{ère}, l'arc $A'B'$ est un infiniment



petit de même ordre que AB ou que θ ; il est donc aussi du 1^{er} ordre.

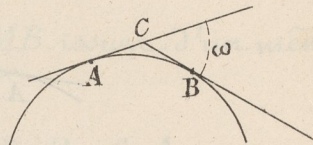
4^o Si une droite MN se déplace d'une manière continue en faisant avec l'axe des x un angle variable φ , et si son déplacement est réglé par la variable indépendante t , l'angle infiniment petit $\Delta\varphi$, formé par deux positions voisines de la droite, est infiniment petit du 1^{er} ordre.





5° L'angle formé par la tangente au point A et la sécante AB est infiniment petit du 1^{er} ordre, c'est-à-dire du même ordre que l'arc AB, ou θ .

6° L'angle ω formé par la tangente en A et la tangente en B, est un infiniment petit du 1^{er} ordre.



7° Les deux tangentes CA, CB menées d'un point extérieur C à deux points infiniment voisins, A et B, sont de même ordre et tous deux du 1^{er}.

Théorème sur les infiniment petits d'ordre supérieur.

Lorsqu'une fonction s'accroît d'une quantité $m\theta$ infiniment petite du premier ordre, toute les infiniment petits liés à cette fonction s'accroissent de quantités infiniment petites par rapport à eux, et de l'ordre immédiatement supérieur.

Soit y une fonction de x , représentée par la courbe AB : et soit

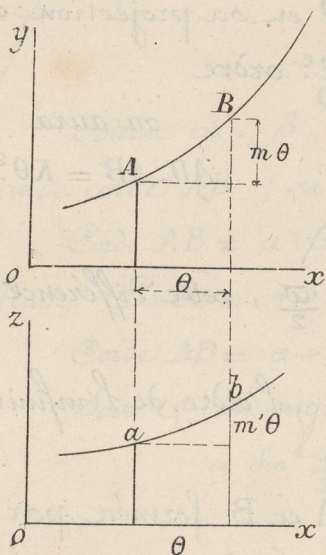
$z = K\theta^n$, un infiniment petit du n^{e} ordre, lié à la variable x . Divisons la quantité z par θ^n pour la rendre finie; elle deviendra: $z' = K$, K étant une fonction continue de x représentée par la courbe ab . Faisons croître x de la quantité θ du premier ordre. Lorsque l'on passera de A en B, y croîtra d'un infiniment petit $m\theta$ du premier ordre. La quantité K , fonction de x , croîtra aussi d'un infiniment petit $m'\theta$ également du premier ordre et sera devenue $(K + m'\theta)$.

Par suite, z , qui est égale à $K\theta^n$, sera devenue :

$$(K + m'\theta)\theta^n = K\theta^n + m'\theta^{(n+1)};$$

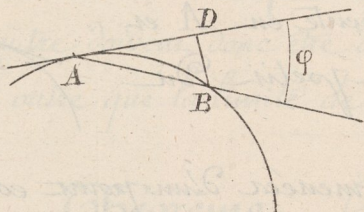
c'est-à-dire, aura cru d'une quantité de l'ordre $(n+1)$;

C. Q. F. D.



Infinitement petit du 2^e ordre.

1^o. La distance d'un point d'une courbe à la tangente à cette courbe est un infinitement petit du 2^e ordre.



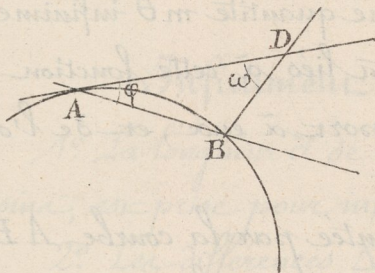
On a : $BD = AB \sin \varphi$.

AB est du 1^{er} ordre et de la forme $K\theta$

$\sin \varphi$ est du 1^{er} ordre et de la forme $K'\theta$.

Donc $BD = K''\theta^2$.

2^o. La distance d'un point d'une courbe à la tangente à cette courbe, comptée suivant une oblique à cette tangente est du 2^e ordre, à moins que cette oblique ne tende à devenir, à la limite, parallèle à la tangente.



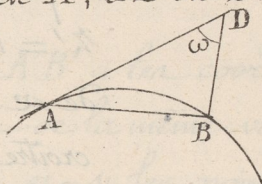
$$\frac{BD}{AB} = \frac{\sin \varphi}{\sin \omega}$$

Mais $\sin \varphi = K\theta$, et $\sin \omega$ a une limite finie, $\sin \omega'$, par exemple, et $AB = K'\theta$.

Donc :

$$BD = \frac{KK'\theta^2}{\sin \omega'}$$
 , qui est du 2^e ordre.

3^o. La différence entre l'arc θ et sa projection oblique sous l'angle ω , faite sur la tangente en A, est du 2^e ordre



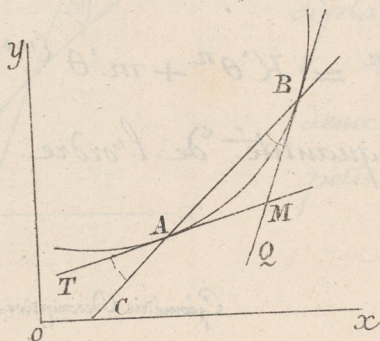
on aura

$$AD - AB = K\theta^2$$

Si la limite de l'angle ω est $\frac{\omega}{2}$, cette différence devient du troisième ordre.

Si la limite de l'angle ω est 0, l'ordre de l'infinitement petit s'abaisse. (Sera démontré plus loin)

4^o. La différence des angles A et B formés par la sécante d'un arc et les tangentes aux deux extrémités de cet arc, est du 2^e ordre.



En effet, soit AB la sécante, AT la tangente en A et BQ la tangente en B. — L'angle TAC est infinitement petit du 1^{er} ordre, ainsi que l'angle CBQ . — Lorsqu'on passe du point A au point B, la variable

indépendante s'est accrue d'un infiniment petit du 1^{er} ordre, et tous les infiniment petits du 1^{er} ordre se sont accrues de quantités du 2^e; par conséquent les angles A et B diffèrent d'une quantité du 2^e ordre.

5^o Les longueurs des deux tangentes MA et MB issues d'un même point, diffèrent d'une quantité du 2^e ordre.

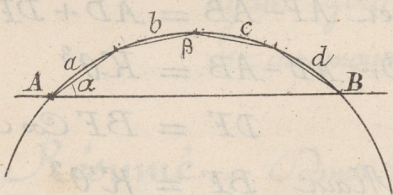
$$\text{On a : } \frac{MA}{MB} = \frac{\sin B}{\sin A} \quad \text{et} \quad \frac{MA - MB}{MB} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin A}$$

Or, $\sin B - \sin A$ est du 2^e ordre, d'après ce qui précède; $\sin A$ est du 1^{er}, MB est du 1^{er}; donc $MA - MB$ est du 2^e.

On dit: que les tangentes infiniment petites issues d'un même point sont égales; c'est-à-dire, égales à un infiniment petit près d'ordre supérieur au leur.

Infiniment petits du 3^e ordre.

1^o La différence entre un arc et sa corde est du 3^e ordre.



Décomposons l'arc AB en arcs plus petits. — La longueur de l'arc AB est, par définition, la limite de la somme des cordes $a, b, c, \dots$

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les angles de ces petites cordes et de la grande corde AB ; on aura

$$\text{Corde } AB = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma + \dots$$

$$\text{Mais } \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad \text{D'où}$$

$$\text{Corde } AB = a + b + c + \dots - 2 \left(a \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b \sin^2 \frac{\beta}{2} + \dots \right).$$

Soit φ un angle moyen, tel que:

$$a \sin^2 \frac{\varphi}{2} + b \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \dots = a \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b \sin^2 \frac{\beta}{2} + \dots$$

On aura:

$$\text{Corde } AB = a + b + c + \dots - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (a + b + \dots).$$

Mais, $a + b + c + \dots$, c'est l'arc AB ou θ . — φ est infiniment petit du 1^{er} ordre, — $\sin \varphi$ est de la forme $K\theta$, et son carré est de la forme $K\theta^2$; on aura donc finalement

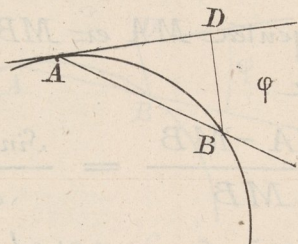
$$a + b + c + \dots - \text{Corde } AB = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (a + b + c + \dots)$$

ou

$$\text{arc } AB - \text{Corde } AB = K\theta^2 \times \theta = K\theta^3$$

C. Q. F. D.

2°. La différence entre un arc et sa projection droite sur la tangente est du 3^e ordre.



$$\text{On a } AD = \text{Corde } AB \cdot \cos \varphi$$

$$= \text{Corde } AB \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)$$

Mais on peut remplacer dans cette expression, Corde AB, par Arc AB, qui n'en diffère que d'un infiniment petit du 3^e ordre, et par suite

$$AD = \text{Arc } AB \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)$$

D'où

$$\text{Arc } AB - AD = \text{Arc } AB \times 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$= K\theta^3$$

C. Q. F. D.

Remarque. Si la projection est oblique au lieu d'être droite, et si l'angle ω des projetantes avec la tangente n'a pas pour limite 90° , cette différence n'est plus que du 2^e ordre. En effet:

$$AF = AD + DF$$

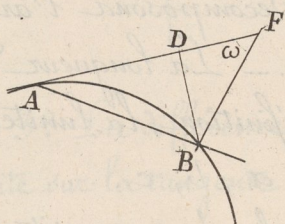
$$\text{et } AF - AB = AD + DF - AB.$$

$$\text{Or, } AD - AB = K\theta^3$$

$$DF = BF \cos \omega;$$

$$\text{Mais } BF = K'\theta^2$$

$$\text{Donc: } AF - AB = K\theta^3 + K'\theta^2 \text{ qui est du 2^e ordre.}$$



3°. La différence entre un arc et la ligne brisée formée par les deux tangentes aux extrémités de l'arc est du 3^e ordre.

$$\text{Corde } AB = AC \cos \varphi + CB \cos \psi$$

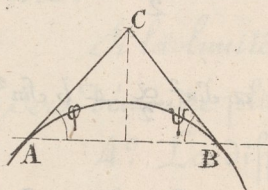
Soit φ_1 un angle intermédiaire entre φ et ψ

$$\text{Corde } AB = (AC + CB) \cos \varphi_1 = (AC + CB) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}\right)$$

On remplacera la corde AB par l'arc et l'on aura

$$(AC + CB) - \text{arc } AB = (AC + CB) \times 2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$$

$$= K\theta \times K'\theta^2 = K''\theta^3, \text{ C. Q. F. D.}$$



4°. La différence entre les longueurs de deux normales infiniment voisines, est du 3^e ordre.

Soient OA et OB, deux normales.

On a:

On a : $\frac{OA}{OB} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ et $\frac{OA - OB}{OB} = \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\sin \alpha}$

$$OA - OB = \frac{OB}{\sin \alpha} (\sin \beta - \sin \alpha)$$

OB est fini ; $\sin \alpha$ a pour limite l'unité. Il suffit donc de prouver que :

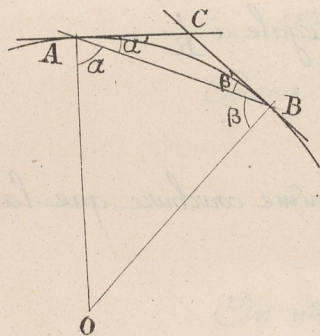
$\sin \beta - \sin \alpha$ est de la forme $K\theta^3$.

Où,

$$\sin \beta = \cos \beta' = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta'}{2} =$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha' = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha'}{2}$$

$$\sin \beta - \sin \alpha = 2 \left(\sin^2 \frac{\alpha'}{2} - \sin^2 \frac{\beta'}{2} \right).$$



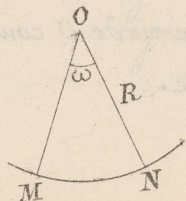
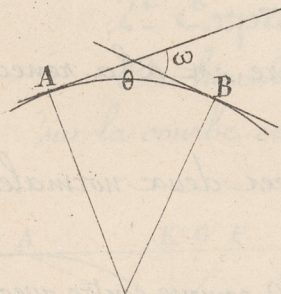
Mais à la limite les 2 tangentes AC et AB sont égales, et par suite, à la limite $\alpha' = \beta'$ et $\sin \alpha' = \sin \beta'$; à un infiniment petit du 2^e ordre près.

Les deux quantités du 2^e ordre, $\sin^2 \frac{\alpha'}{2}$ et $\sin^2 \frac{\beta'}{2}$, ayant zéro pour limite de leur différence, cette différence est au moins du 3^e ordre. C. Q. F. D.

Résumé. — Dans la recherche d'une limite de rapport ou de somme on pourra remplacer l'arc : 1^o par sa corde ; 2^o par sa projection droite ou oblique sur la tangente ; 3^o par la somme des deux tangentes menées à ses extrémités ; 4^o par le double de l'une des deux tangentes précédentes, &c.

Courbure.

Angle de Contingence. — C'est l'angle ω formé par les deux tangentes menées aux extrémités d'un arc AB . C'est aussi l'angle formé par les deux normales aux points A et B .



On rappellera qu'un angle ω est un rapport. — C'est le rapport de l'arc de cercle MN au rayon R .

Courbure moyenne.

La courbure moyenne de l'arc de courbe AB est le quotient de l'angle de contingence ω , par la longueur de l'arc θ .

Courbure en un point.

C'est la limite de la courbure moyenne. C'est donc $\lim. \frac{\omega}{\theta}$

Courbure d'un arc de cercle.

Pour un arc de cercle on aura toujours

$$MN = \omega R, \quad \text{ou} \quad \theta = \omega R;$$

d'où

$$\frac{\omega}{\theta} = \frac{1}{R}.$$

La courbure d'un cercle est constante et égale à $\frac{1}{R}$.

Rayon de Courbure.

C'est le rayon d'un cercle qui aurait la même courbure que la courbe au point considéré.

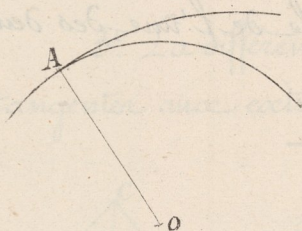
Soit ρ ce rayon de courbure, on aura donc

$$\rho = \lim. \frac{\theta}{\omega}.$$

Centre de Courbure. — Cercle osculateur.

C'est le centre d'un cercle qui serait tangent en A à la courbe et qui aurait même rayon de courbure qu'elle.

Ce cercle se nomme le Cercle osculateur ou le Cercle de Courbure de la courbe.



Position du Centre de Courbure.

Théorème. — Le centre de courbure est à la rencontre de deux normales infiniment voisines.

En effet, soit O la rencontre de ces deux normales,

AB la courbe

AB' le cercle décrit de O comme centre avec OA pour rayon,

et AF' , la tangente;