

L'ombre portée par l'hyperboloïde sera l'enveloppe de ces ombres portées par l'hyperboloïde. — Ce sera une hyperbole (f, g_1). — (Cela aurait pu être une ellipse.)

2^o Ombre propre.

On prendra, par terre, le point de tangence (2_1) de l'hyperbole enveloppe et d'une génératrice d'ombre portée. On remontera de ce point, au point de l'espace sur la génératrice correspondante, par un rayon lumineux inverse, et l'on aura en $2, 2'$ un point de l'ombre propre de l'hyperboloïde.

(Sur le croquis c'est par hasard que le point d'ombre propre situé sur la génératrice $2-32$, se trouve au départ de cette génératrice sur la base supérieure).

Nature géométrique de la courbe d'ombre propre.

On sait que sur une surface du 2^o la courbe de contact d'un cylindre circonscrit est la section diamétrale conjuguée de la direction des génératrices du cylindre.

On sait de plus qu'un hyperboloïde et son cône asymptote ont pour une même direction les mêmes plans diamétraux conjugués.

Par conséquent, si l'on détermine les deux génératrices d'ombre propre du cône asymptote, et si l'on prolonge le plan de ces deux génératrices, jusqu'à ce qu'il coupe l'hyperboloïde, il donnera comme section la ligne d'ombre propre de cette surface.

Si le cône a une ombre propre, l'ombre propre de l'hyperboloïde sera une hyperbole ayant pour asymptotes les deux génératrices d'ombre propre du cône.

Si le cône n'a pas d'ombre propre, la séparatrice de l'hyperboloïde sera une ellipse.

Pour distinguer ces deux cas, par le sommet $O O'$ du cône asymptote, c'est-à-dire par le centre de la surface, menons un rayon lumineux.

Il perce en $d d'$ le plan de la base supérieure de l'hyperboloïde. — Ce point d est ramené en D sur la projection M . De ce point on peut mener deux tangentes DK , DM à la base du cône asymptote. —

Ce cône a donc une ombre propre. Les génératrices d'ombre propre du cône — sont, sur la projection M , — OK et OI , ramenées en $O'k'$ et $O'l'$ en projection verticale, et en OK , Ol en projection horizontale.

Ces droites sont les asymptotes de l'hyperbole d'ombre propre de l'hyperboloïde.

Puisque le plan de ces lignes d'ombre du cône, prolongé, donnera comme section la séparatrice de la surface, si l'on mène la ligne IK jusqu'à sa rencontre en M et N avec la base de l'hyperboloïde, on aura en M et N , ramenées en $m m'$ et $n n'$, les points de la séparatrice situés sur la base supérieure.

On aura de même les points situés sur la base inférieure. D'ailleurs l'hyperbole est déterminée par ses asymptotes et un point, ce qui suffit.

L'ombre portée de la surface sur le plan horizontal sera l'ombre portée par l'hyperbole précédente. Les asymptotes de l'ombre portée seront les ombres portées par les asymptotes de l'espace, — ce seront par suite les deux lignes droites d'ombre portées sur le plan horizontal par le cône asymptote.

Remarque. — Si le point D (projection M) était tombé dans l'intérieur du cercle de base du cône asymptote, ce dernier n'aurait pas d'ombre propre et la séparatrice de l'hyperboloïde eût été une Ellipse. — On reconnaîtra facilement, dans ce cas, que cette séparatrice elliptique répondra à des rayons lumineux qui éclaireraient l'intérieur de la surface et non pas son extérieur comme dans le cas du croquis ci-joint.

4°. Ombre propre du Cylindre.

On mènera à sa base sur le plan vertical des tangentes parallèles à la projection verticale R' du rayon lumineux. — On en déduira la ligne d'ombre propre $p q$, et la ligne d'ombre portée par terre, p, q .

5°. Ombre propre de la Sphère.

On la déterminera comme l'on sait en menant aux cercles qui en sont les projections, des tangentes parallèles aux rayons lumineux rabattus sur les plans de projection R_1 et R'_1 , ce qui donnera directement les

axes des ellipses d'ombre propre.

On en déduira l'ellipse d'ombre portée par la sphère sur le plan horizontal. — Cette ellipse doit se raccorder en S_1 avec la ligne p, q , d'ombre portée du cylindre.

6°. Ombre portée par l'hyperboloïde sur le cylindre, et par le cylindre sur l'hyperboloïde.

On reconnaît à l'inspection des ombres portées par terre que l'ombre du cylindre vient empiéter sur l'ombre de l'hyperboloïde. —

On voit même que dans le cas actuel, c'est seulement l'ellipse d'ombre portée par la base supérieure de l'hyperboloïde qui empiète sur l'ombre du cylindre.

Ce sera donc le cercle de base supérieure qui portera ombre sur le cylindre.

On déterminera par points cette ombre : — par exemple le point $12-12'$ porte ombre en u, u' , obtenu en remontant de l'ombre par terre à l'ombre dans l'espace.

Les points de porte se trouvent, par terre en p, q , aux rencontres des limites des deux ombres. — On les relève par un rayon lumineux inverse en p en q .

La tangente en ces points est le rayon lumineux.

Enfin, le cylindre ou bien la sphère portent ombre sur l'hyperboloïde.

On obtient en W, W' un point de cette ombre. — Il serait facile d'en avoir d'autres en prenant, par terre, les intersections des ombres portées par les génératrices de l'hyperboloïde, avec la ligne d'ombre portée W, S, q , du cylindre ou de la sphère et remontant des points par terre aux points de l'espace, à l'aide de rayons lumineux inverses.

Ombres portées qui se rencontrent le plus souvent dans le Dessin de Machines ou d'Architecture.

(Rayon lumineux à 45°)

Nous désignerons par la lettre φ l'angle formé par le rayon lumineux rabattu sur le plan vertical et par la ligne de terre. (fig. 1)

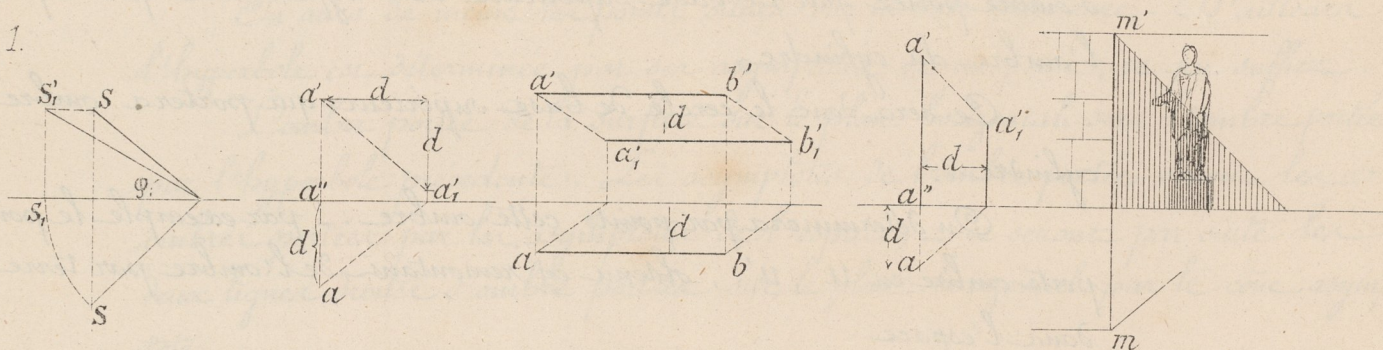
18. Ombres portées sur le plan vertical ou sur des plans parallèles.

1^o Ombre d'un point $a a'$. — L'ombre est en a_1 et l'on remarque que ce point est au-dessous et à droite du point a' , d'une quantité égale à la saillie du point qui porte ombre.

2^o Une droite $ab a'b'$ parallèle à la ligne de terre. — Son ombre est $a_1 b_1$, égale, parallèle à la droite, et située au-dessous, à une distance d égale à la saillie.

3^o Une droite verticale $a a'' a'$. — Son ombre se trouve à droite, et à une distance d égale à la saillie, d .

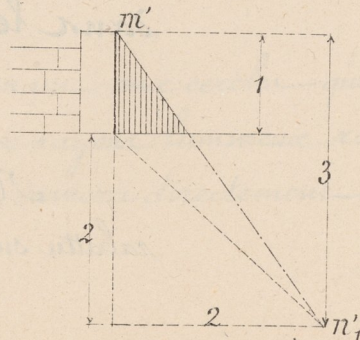
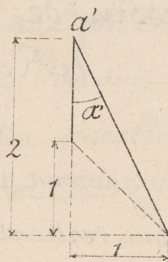
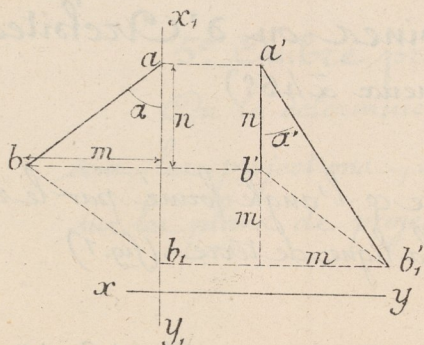
Fig. 1.



4^o Une droite $m m'$, perpendiculaire au plan vertical (ou debout) — Son ombre est une ligne à 45° , non seulement si l'ombre est portée sur le plan vertical, mais si elle l'est sur un objet quelconque.

5^o Une droite située dans un plan de profil. — Soit $ab, a'b'$ la droite; a' sa trace verticale; — b' porte ombre en b_1 — l'ombre portée est la droite $a' b_1$.

On voit que si l'angle α que la droite fait avec le plan vertical a pour tangente $\frac{m}{n}$, l'ombre $a' b_1$ fait avec $a' b'$ un angle α' dont la tangente est $\frac{m}{m+n}$.



Une ligne à 45° , inclinée à $\frac{1}{1}$ aura son ombre inclinée à 2 de hauteur pour 1 de base.

En architecture, les escaliers sont ordinairement inclinés à 2 de base pour un de hauteur. L'ombre portée par une rampe $m'n'$ située dans un plan de profil sera une droite $m'n'_1$, inclinée à 2 de base pour 3 de hauteur.

Ombre portée par un cercle sur le plan vertical.

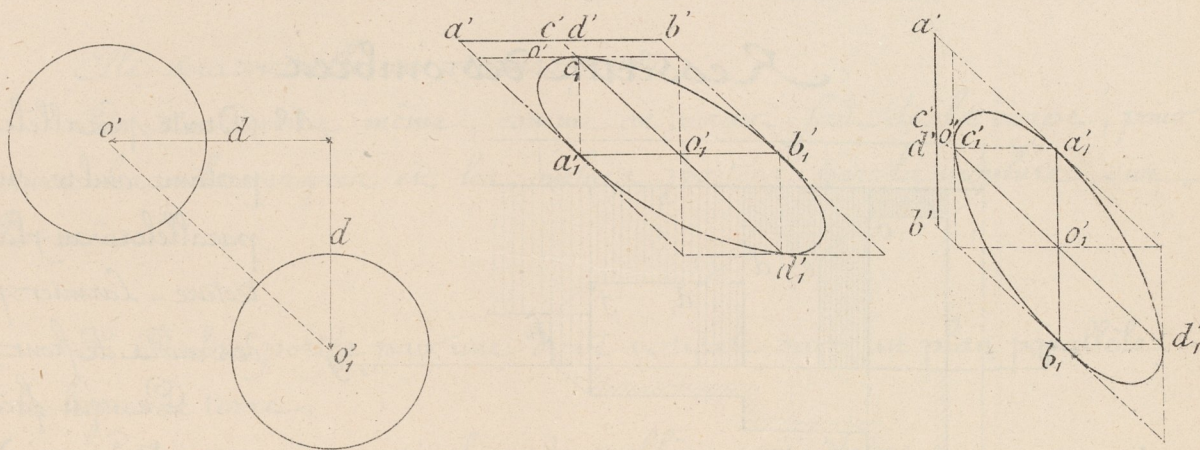
1^o Cercle de front. — Il porte ombre en vraie grandeur. — La saillie de son centre fait connaître en o'_1 l'ombre de ce centre. — On trace de o'_1 comme centre, le cercle d'ombre égal au cercle donné.

2^o Cercle de niveau. — L'ombre est une ellipse. — 2 diamètres à angle droit du cercle donneront, comme ombre, 2 diamètres conjugués de l'ellipse.

Le centre o' porte ombre en o'_1 , point connu si l'on donne la saillie du centre. — Le diamètre de front $a'b'$, porte ombre en vraie grandeur, suivant $a'_1b'_1$. — Le diamètre debout, $c'd'$ portera ombre à 45° en $c'_1d'_1$. — On obtiendra c'_1 en remontant et reportant à gauche le point b'_1 d'une quantité égale à un rayon. — Le point d'_1 s'obtiendra en descendant de même le point a'_1 .

On remarquera la forme du parallélogramme circonscrit; un de ses côtés est horizontal et égal au diamètre; l'une de ses diagonales est verticale et égale en longueur à ce côté.

3^o Cercle de Profil. — Construction analogue. — Le parallélogramme circonscrit est le même que tout à l'heure, mais autrement orienté.



Architecture. — Ombre portée par une arcade de profil et par la même arcade en coupe. (fig. 1 & 2).

On tracera deux fois l'ombre précédente. — L'épure se comprend facilement. Remarque le point de brisure h , intersection des 2 ellipses.

Si l'arcade est coupée par un plan de front mené par son axe, l'ombre (fig. 2) se composera des moitiés des 2 ellipses, réunies par l'horizontale $c'c''$, ombre portée par la ligne de coupe $c'c''$ faite sur la clef de l'arcade. — De plus, dans l'intrados, nous aurons un fragment d'ellipse, ombre portée par un des cercles de base de l'arcade sur cet intrados (Voir plus loin, Ombre du Pont.)

Fig. 1

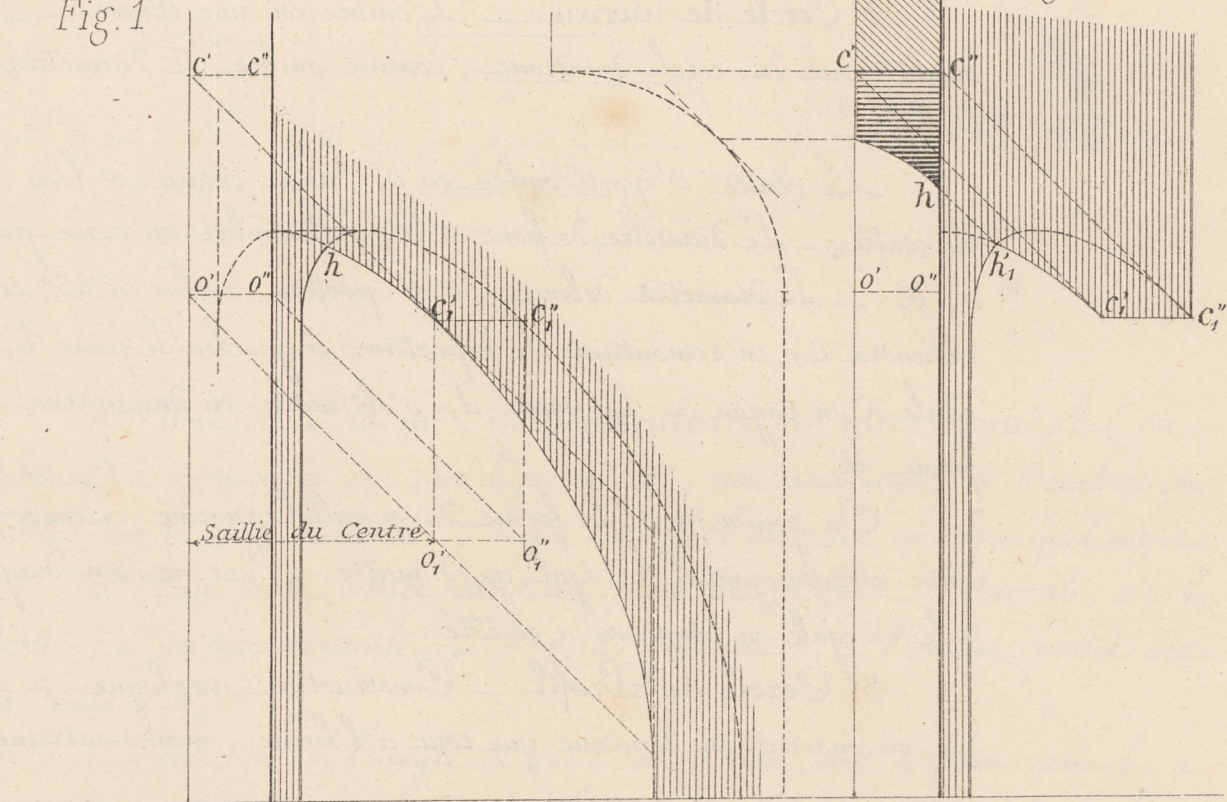
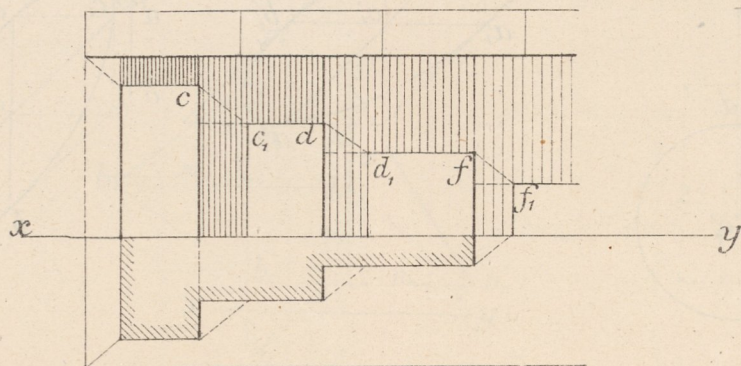


Fig. 2.

Ressaux des ombres :



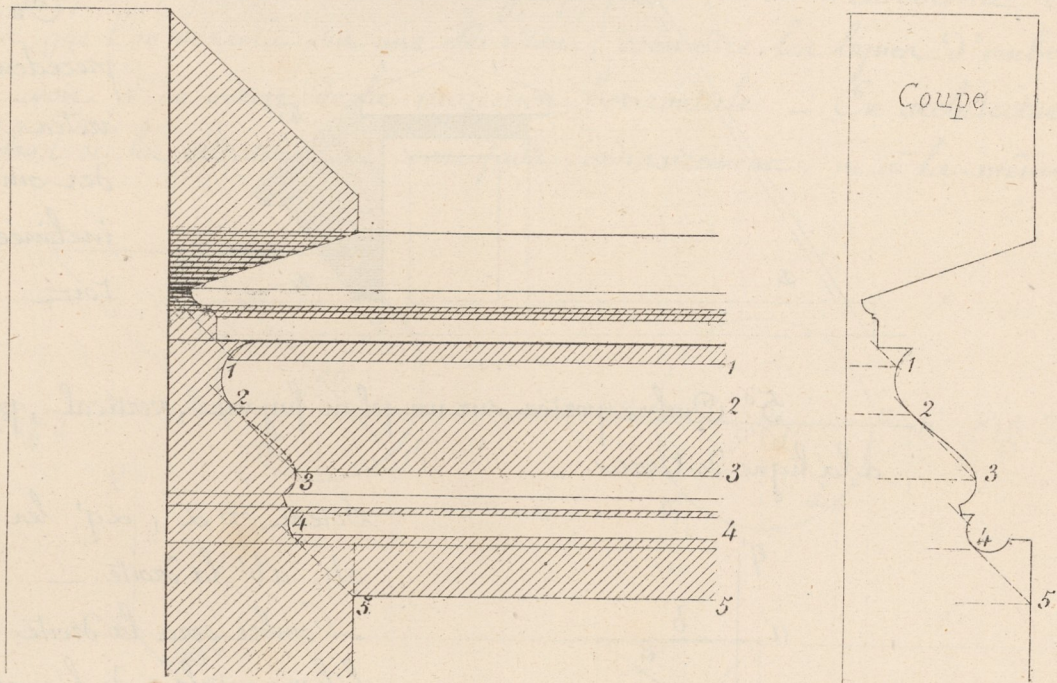
1°. Droite parallèle à la ligne de terre, portant ombre sur une série de plans parallèles au plan vertical — (Architecture — Larmier portant ombre sur des murs de front).

On voit facilement que l'ombre ressaute ou se décroche, en

reproduisant les saillies successives des murs, c'est-à-dire le profil de ces murs pris en projection horizontale.

2°. *Architecture*. — Ombre d'un larmier de front, sur des moulures à génératrices verticales, ou bien: Ombre portée par l'arête verticale d'un mur ou d'un bandeau, sur des moulures parallèles à la ligne de terre.

La ligne d'ombre reproduit, en sens inverse, le profil même de la moulure. — On peut donc, sans se servir d'un plan ni d'une coupe, et si l'on connaît non-seulement le profil de la moulure, mais encore, comme point de départ, le reculement d'une seule génératrice, tracer la ligne d'ombre.

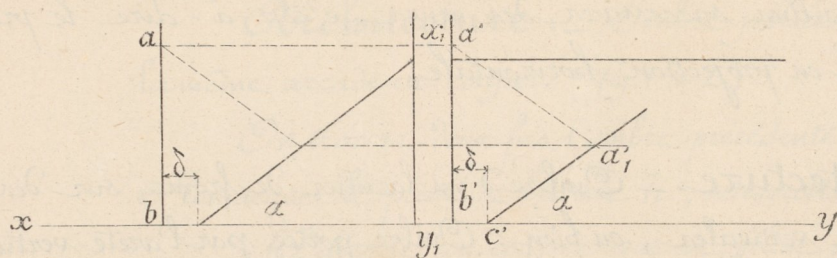


Elle sera virtuelle en certains points.

On s'en servira même, comme on aurait fait de la coupe, pour trouver les ombres propres et les ombres portées par la moulure sur elle-même.

3°. Ombre portée par une droite verticale sur un plan parallèle à la ligne de terre.

C'est un cas particulier du problème précédent.

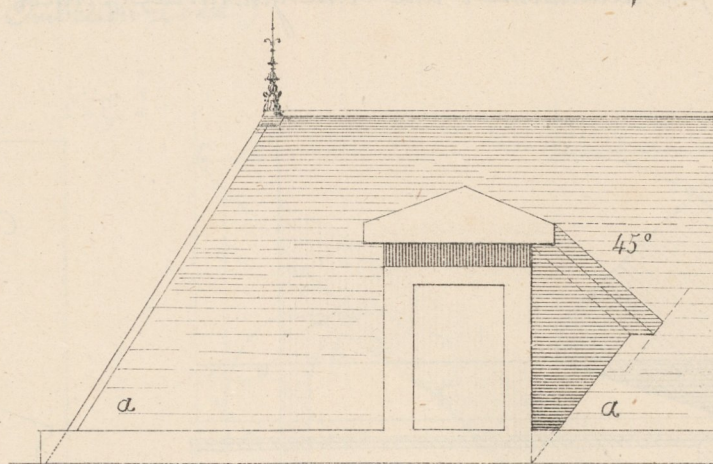


de la droite, égale à la saillie de ce pied en avant de la trace horizontale du plan.

L'ombre est une droite $c'a'$, inclinée sur l'horizontale du même angle que le plan fait avec le plan horizontal, en commençant en c' à une distance $b'c'$ du pied

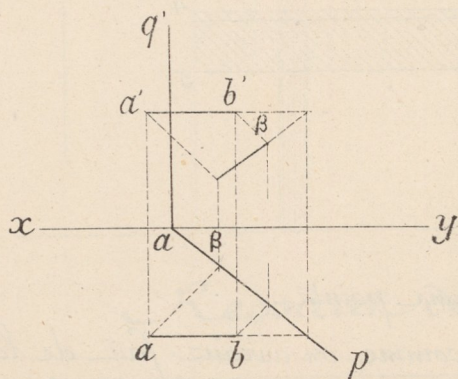
4°. *Architecture.* — Ombre portée sur un toit parallèle à la

ligne de terre, par une lucarne ou une cheminée. —



On utilisera la remarque précédente. — Toutes les arêtes verticales donneront des ombres qui seront inclinées à la pente du toit

5°. Ombre portée sur un plan fuyant, vertical, par une droite parallèle à la ligne de terre.



Soient pa , $a'q'$ les traces du plan, — ab , $a'b'$ la droite. —

L'ombre sera la droite $a'b'$ inclinée sur l'horizontale, de l'angle β que le plan fait avec le plan vertical.

Si le plan est incliné à 45° sur le plan vertical, l'ombre sera inclinée à 45° sur la ligne de terre.

Plan fuyant à 45°

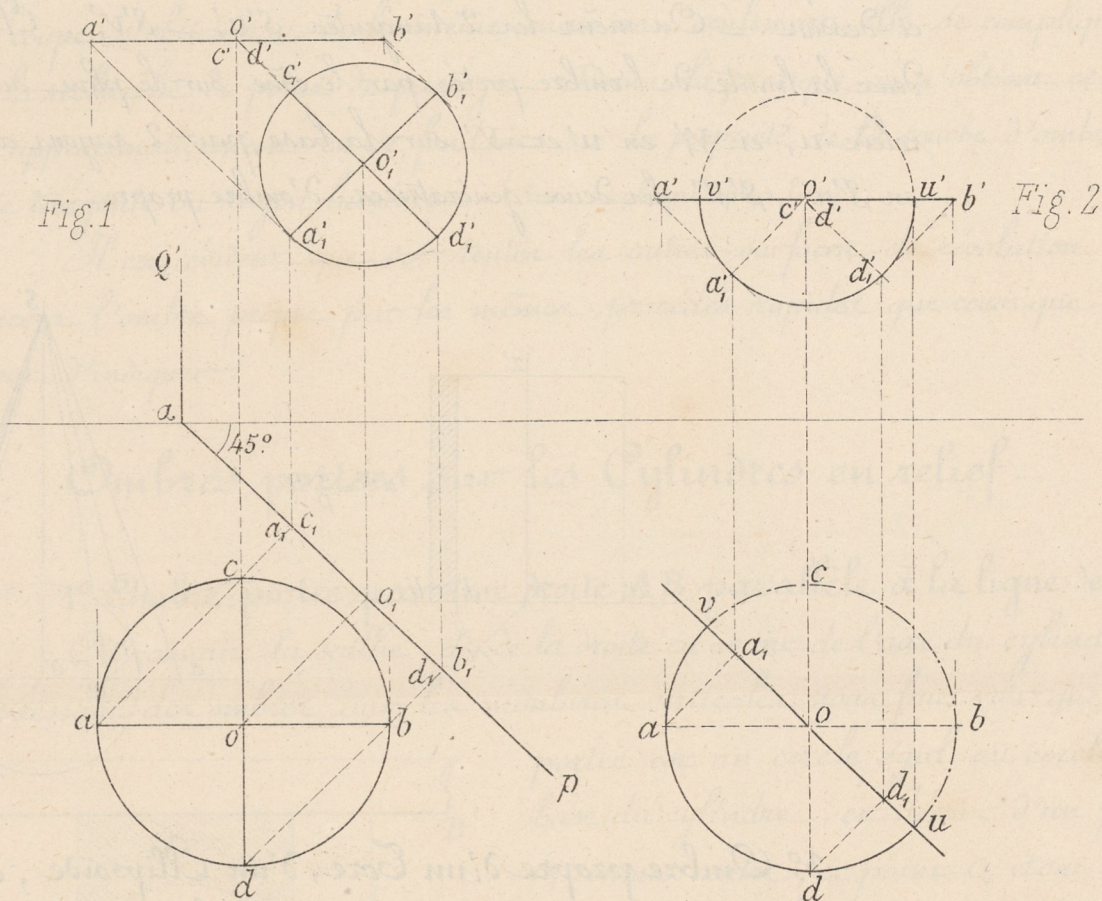
Cas particulier remarquable de l'ombre portée par un cercle de niveau sur un plan fuyant vertical, incliné à 45° .

Soit $abcd - a'b'c'd'$, le cercle de niveau. — Soit $p \perp q'$ les traces du plan fuyant à 45° . — Le centre o porte ombre en o, o' , et les 2 diamètres $ab - cd$, à angle droit dans le cercle, portent ombre suivant les 2 lignes à 45° $a_1 b_1 - c_1 d_1$. — On voit que ces deux dernières lignes sont, non seulement à angle droit, mais égales; l'ellipse d'ombre est donc projetée verticalement suivant un cercle. (fig. 1).

Si le plan fuyant passe par le centre (fig. 2), l'ombre portée se trace très-facilement en projection verticale. — On mène les lignes à 45° dans les deux sens, $a'a_1$ et $o'o_1$. — On a en $o'a_1$ le rayon du cercle d'ombre.

La portion de l'ombre marquée en train plein correspond à la moitié du cercle située en avant du plan fuyant.

Ce plan fuyant sera d'un usage fréquent, — on s'en servira toutes les fois que l'on désirera sur une élévation, connaître les lignes d'ombre, sans avoir à se servir de la projection horizontale. — En architecture, où les plans et les élévations ne sont faits, ordinairement, ni à la même



échelle, ni sur la même feuille, il est avantageux de savoir faire le tracé

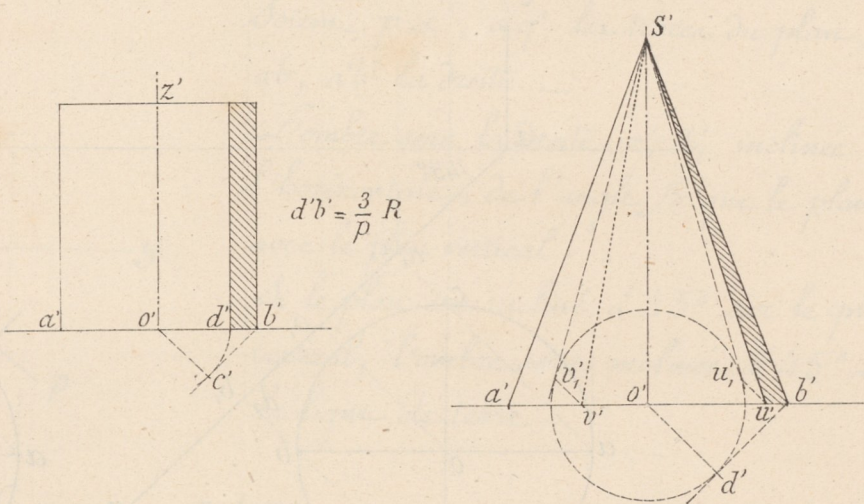
des ombres directement sur l'élevation. — On a pu voir, d'ailleurs, que jusqu'à présent, tous les tracés indiqués permettent de se passer de la projection horizontale.

Ombres propres des surfaces de révolution.

1^o Cylindre. — On la déterminera soit, en se servant de l'Echelle n^o 1, ⁽⁺⁾ soit en remarquant que $od' = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, menant les deux lignes à 45°, o'c' en b'c' et rabattant le point c' en d'. — L'emploi d'un plan fuyant à 45° aurait conduit au même tracé.

Enfin, on peut approximativement prendre $d'b' = \frac{3}{10} R$.

2^o Cône. — Soit le cône s' a' b' à angle quelconque. — On se servira du plan fuyant à 45°; passant par l'axe du cône. — On cherchera, sur ce plan, l'ombre portée par le cône. — Le sommet s' est à lui-même son ombre portée. — La base a'b' porte ombre suivant le cercle o'd', obtenu comme ci-dessus. — On mène les 2 tangentes s'u', s'v'. Elles forment, à elles deux la limite de l'ombre portée par le cône sur le plan auxiliaire. — On relève u', en v' en u' et v' sur la base, par 2 rayons à 45°, et l'on obtient en s'u', s'v' les deux génératrices d'ombre propre.

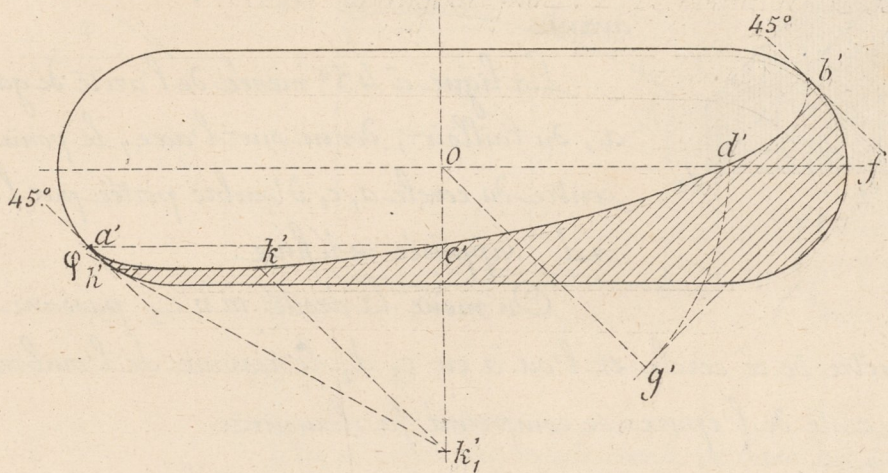


3^o Ombre propre d'un Tore, d'un Ellipsoïde, d'une Sphère, etc. Les points sur le contour apparent s'obtiennent en a' et b', par les tangentes à 45°. — Par raison de symétrie, le point c' projeté sur l'axe

(+) Voir plus loin les échelles de teintes — Théorie du lavis.

s'obtiendra en menant l'horizontale $a'c'$. — Le point d' sur l'équateur s'obtiendra, soit à l'aide de l'échelle $\pi:1$, soit à l'aide du cercle $o'g'd'$, construit comme on vient de le voir pour les cylindres.

Le point le plus bas K' se trouvera en menant au méridien principal la tangente $h'K'$, à l'angle φ , puis faisant tourner le point h' d'un angle de 45° autour de l'axe de la surface. — Dans ce mouvement le point K' , situé sur l'axe, ne changera pas. — Le point h' se déplacera horizontalement. —



Le rayon φ redeviendra rayon à 45° , ce qui donnera le point le plus bas K' .

On a de cette manière 5 points rapidement obtenus et les tangentes en 3 de ces points, ce qui suffit largement dans la pratique.

L'ombre du même tore vu en coupe s'obtiendrait de la même manière, seulement elle se compliquerait de la recherche du point de passage. Dans la pratique on n'obtient ce point qu'approximativement en se fondant sur la propriété de la courbe d'ombre, d'y être tangente au rayon lumineux. (Sera expliqué plus loin).

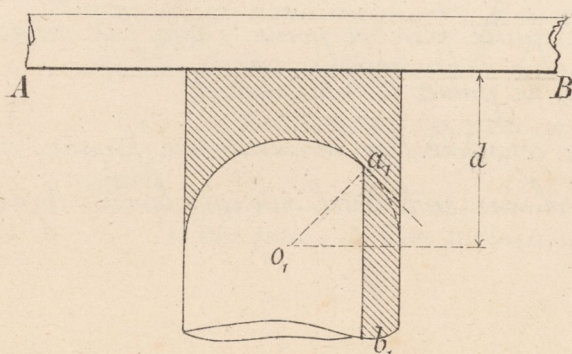
Il est évident que sur toutes les autres surfaces de révolution, on tracera l'ombre propre par les mêmes procédés rapides que ceux que l'on vient d'indiquer.

Ombres portées sur les Cylindres en relief.

1^o Ombre portée par une droite AB parallèle à la ligne de terre.

On connaît la saillie, d , de la droite en avant de l'axe du cylindre.

Le dessin des ombres sur les moulinets verticaux nous fait voir que l'ombre

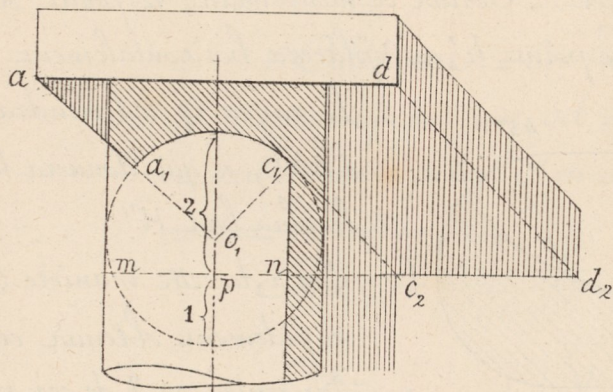


portée est un cercle égal au cercle de base du cylindre, et décrit d'un point O_1 comme centre; ce point O_1 étant situé sur l'axe du cylindre et à une distance au-dessous de la droite qui porte ombre,

égale à la saillie connue.

Cette ombre n'est utile que jusqu'au point a , de tangence à 45° .

2° *Orchitecture*. — Ombre du Tailloir d'une colonne engagée au tiers de son diamètre.



Le Tailloir étant carré, déborde la colonne autant à droite et à gauche qu'en avant.

La ligne à 45° menée de l'arête de gauche, a , du tailloir, donne sur l'axe, le point o , centre du cercle a, c_1 d'ombre portée par l'arête ad , supposée indéfinie.

On mène la droite $m n c_2$ passant en p , au tiers du diamètre de ce cercle et l'on a en $c_2 d_2$ le ressaut de l'ombre sur le mur. — Le reste de l'épure se comprend facilement.

3° Ombre du Listel (Colonne engagée à moitié de son diamètre).

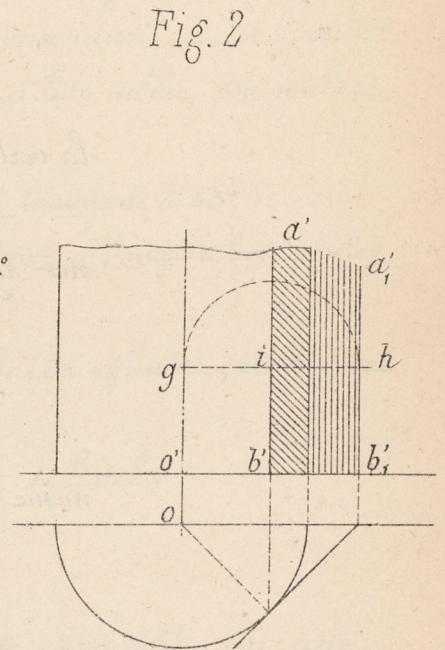
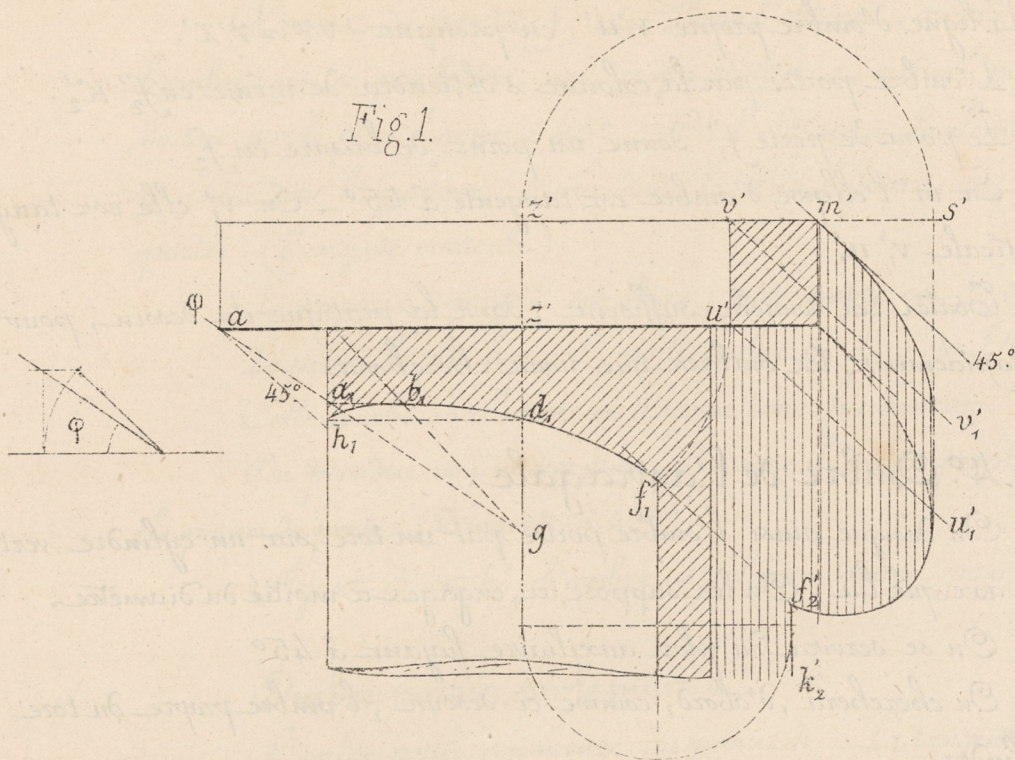
Un listel est un cylindre de petite hauteur couronnant un autre cylindre ayant même axe que lui. — On les supposera tous deux engagés dans un mur et à moitié de leur diamètre.

Cette ombre se présente souvent dans le dessin de Machines et d'Architecture. On se contentera de trouver le point le plus haut et le point de perte dans l'ombre propre du cylindre.

Le point le plus haut b_1 est, par raison de symétrie, dans le méridien à 45° parallèle au rayon lumineux. — On ramène, par rotation, la section faite par ce plan méridien, à être parallèle au plan vertical.

Le rayon lumineux se projette alors, à l'angle φ . — On mène le rayon φ passant par a ; il perce le cylindre en a_1 qu'il faut ramener en place par une rotation inverse. — a_1 ne quitte pas l'horizontale a, b_1 ; le rayon φ passe par l'axe du cylindre en g et ne quitte pas ce point; une fois ramené, il redevient à 45° , ce qui donne en b_1 le point le plus haut.

Point de perte f_1 . — On considère le plan auxiliaire fuyant à 45° , et passant par l'axe. — Il coupe la colonne et le listel suivant leurs lignes d'ombre propres. — Facile à déterminer.



Sur ce plan suivant le cercle de base du Listel porte ombre suivant le cercle $x'u'$, passant par le point u' d'ombre propre du Listel.

Ce cercle coupe en f_1' l'ombre propre de la colonne et donne le point de porte.

On sait qu'en ce point de porte f_1' , la tangente à la courbe d'ombre portée, est le rayon lumineux.

Ayant le point de porte f_1' et le point le plus haut, ainsi que les tangentes en ces points, on pourra tracer la courbe de b_1 en f_1' . — On prendra le point d_1 où elle coupe l'axe. — Par raison de symétrie le point h_1 situé sur le contour apparent est au même niveau que le point d_1 projeté sur l'axe. — La tangente en h_1 est le contour apparent. — Le point h_1 doit tomber entre le pied du rayon q et celui du rayon à 45° mené par a .

Ombre portée sur le mur. — On remarquera que lorsqu'un cylindre est engagé dans un mur, à moitié de son diamètre, l'ombre portée $a'_1 b'_1$ (fig. 2) est à la même distance de la ligne d'ombre propre, que l'axe du cylindre. —

La distance ig portée en ih donnera donc rapidement la ligne d'ombre portée.

Cela posé, si l'on revient au listel, on obtiendra en $u'_1 v'_1$ l'ombre portée

par la ligne d'ombre propre $v'u'$, en prenant $v's' = v'z'$.

L'ombre portée par la colonne s'obtiendra de même en $f_2' k_2'$.

Le point de perte f_1' donne un point de brisure en f_2' .

En m' l'ellipse d'ombre est tangente à 45° . — En v_1' elle est tangente à la verticale $v_1' u_1'$.

Toutes ces données suffisent, dans la pratique du dessin, pour déterminer rapidement les ombres que nous cherchons.

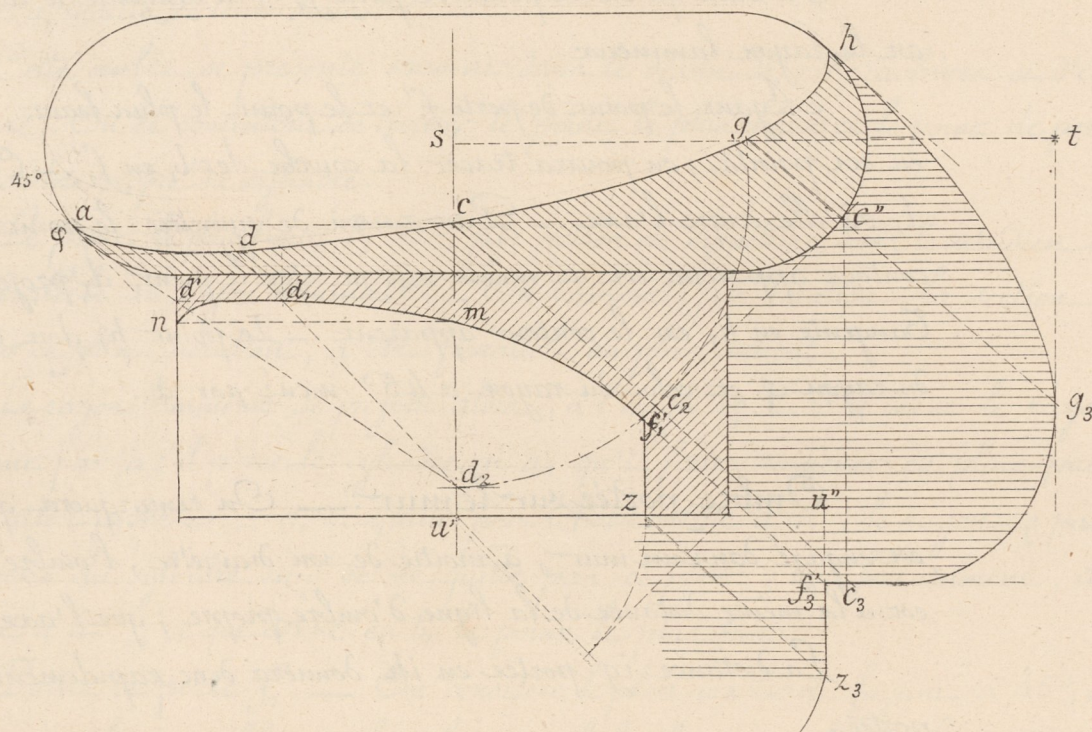
4°. Ombre de l'astragale.

On désigne ainsi l'ombre portée par un tore sur un cylindre vertical ayant même axe que lui. On les suppose, ici, engagés à moitié du diamètre.

On se servira du plan auxiliaire fuyant à 45° .

On cherchera, d'abord, comme ci-dessus, l'ombre propre du tore et celle du cylindre.

Le point le plus haut, d_1 , sera dans le méridien de symétrie parallèle au rayon lumineux. — Par une rotation on l'amènera à se confondre avec le méridien principal. — On lui mènera la tangente à l'angle φ , $d''d_2$. — On ramènera le point d'' en d_1 , comme on a fait pour le listel.



Point de perte f' . — Pour l'obtenir, on cherchera en $d_2 f_1' c_2 g$ l'ombre portée par le tore, ou, ce qui revient au même, par la ligne d'ombre propre du tore sur le plan fuyant à 45° . — On l'obtiendra facilement ainsi. — Le point g , situé sur l'équateur, étant dans le plan fuyant, est à lui-même son ombre portée. (Tangente verticale).

Le point c , projeté sur l'axe, porte ombre en c_2 (Tangente à 45° .)

Le point le plus bas, d , porte ombre en d_2 , sur l'axe. (Tangente horizontale)

Cette courbe auxiliaire se tracera donc facilement.

On prendra son intersection f' , avec l'ombre propre du cylindre, et on aura le point de perte. (Tangente à 45° .)

Ayant d_1 et f_1' , l'ombre s'achève comme pour le listel.

Ombre portée sur le mur. —

L'ombre portée commence au point h . La tangente est à 45° , car cette tangente serait le contour apparent du cylindre d'ombre de la ligne $a.c.d.g$.

Le point sur l'équateur, g , porte ombre en g_3 , obtenu en prenant $sg = gt$. — La tangente est verticale, car au point g , le plan tangent au tore est un plan vertical.

Le point c situé sur l'axe, en projection, porte ombre en c_3 . — Comme la saillie du point c est égale à c'' , le point c_3 est sur la verticale $c''c_3$.

En ce point c_3 , la tangente est horizontale, car le plan tangent au tore, en c , est parallèle à la ligne de terre.

$f'x'$, ombre propre du cylindre, porte ombre en $f_3' x_3$, obtenu comme ci-dessus, en prenant $xu' = xu''$. — Enfin le point de perte f_1' porte ombre au point de brisure f_3' .

Ombres portées sur les Cylindres en creux.

Ombre du Pont. — On désigne ainsi l'ombre portée dans un cylindre creux, par son cercle de base. — On sait que cette courbe est plane et par suite, elliptique. Deux diamètres à angle droit du cercle de base, donneront 2 diamètres conjugués de l'ellipse d'ombre.

Le point a' porte ombre en a_1' , projeté sur l'axe. (Tangente à 45° .)

Le point c' , projeté sur l'axe, porte ombre en c_1' , sur le contour apparent (Tangente verticale).

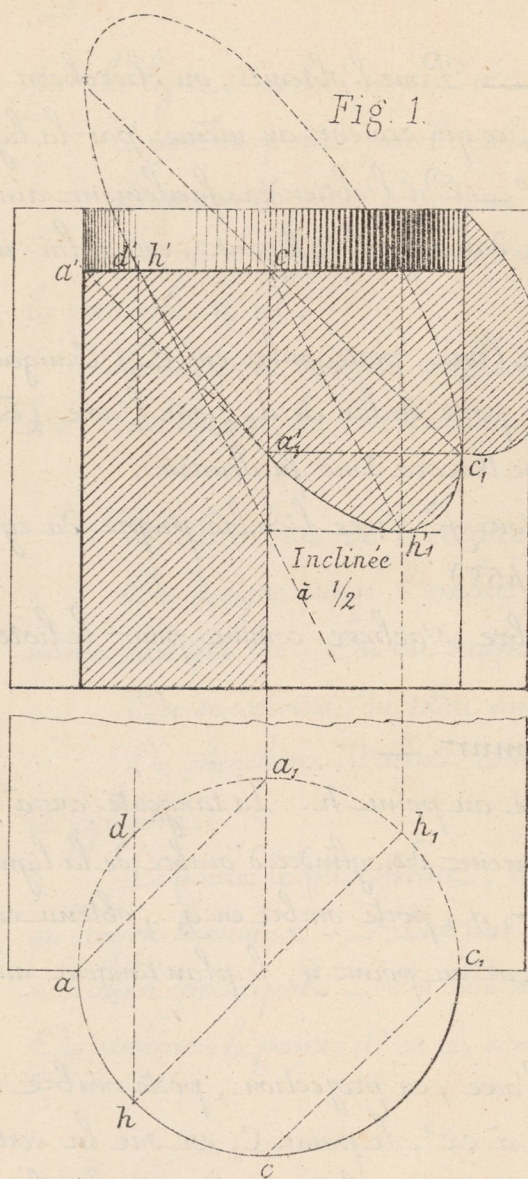


Fig. 1.

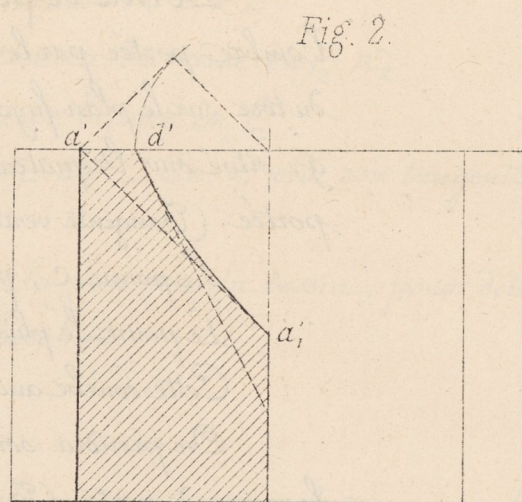


Fig. 2.

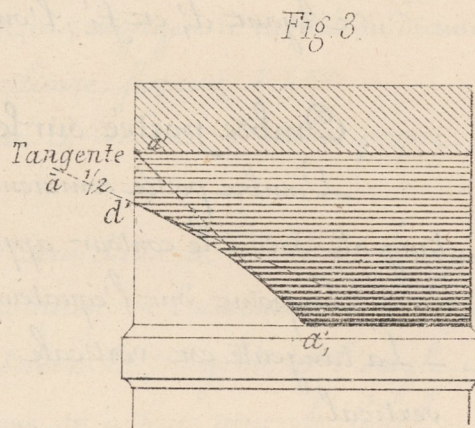


Fig. 3.

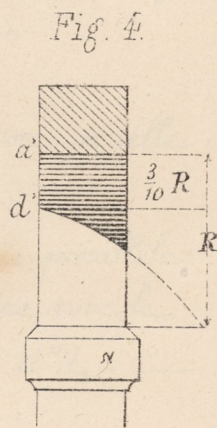


Fig. 4.

Le point de départ d' est le point où la tangente à la base du cylindre serait à 45° . — Les échelles de teintes donneront ce point.

Le point $h'h'$, projeté au même point que le point de départ, porté ombre en h, h' , point le plus bas de l'ombre portée. La tangente au départ, en d' est parallèle au diamètre $c'h'$, et il est facile de voir que ce diamètre est incliné à 2 de hauteur pour 1 de base. Il en est donc de même de la tangente en d' .

Dans la pratique, (fig. 1. 2. 3. 4.) lorsque le cylindre est ouvert, ce qui est le cas pour un pont ou une arcade en coupe, on prend le point de départ d' , comme si on cherchait l'ombre propre d'un cylindre, et l'on mène la tangente inclinée à $\frac{2}{1}$. Par le point le plus haut, a' , de l'intrados, on mène le rayon à 45° , $a'a_1$, jusqu'à la ligne des naissances (si la voûte est plein cintre) et l'on trace le petit arc d'ellipse, $d'a_1$, dont on connaît 2 tangentes.

