

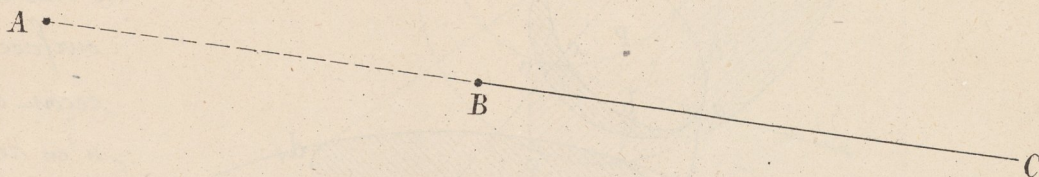
*Cours
de Géométrie descriptive et de Stéréotomie,*

par M. Diller

1^{ère} Partie.

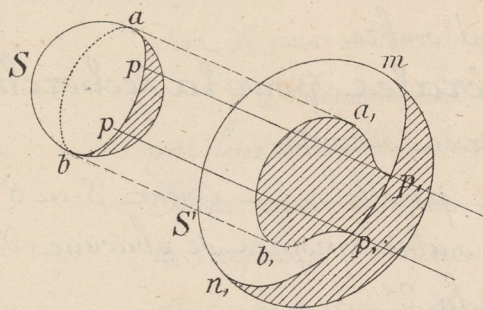
Ombres Linéaires.

La lumière se propage en ligne droite: ce qui veut dire que si A est un point lumineux, et B un point opaque, la portion de l'espace à laquelle l'écran B masquera le flambeau, sera située sur la ligne droite indéfinie AB, et de B en C sur la portion de cette ligne qui se trouve au-delà du point B



Lumière au Flambeau - Lumière au soleil. — Nous supposerons la source de lumière réduite à un point géométrique. Si ce point est à distance finie, on le nomme flambeau. Les rayons lumineux, dans ce cas, sont divergents. Si le point est à distance infinie, la lumière est dite au soleil. — Les rayons lumineux sont parallèles.

Cône et Pyramide d'ombre. — Cylindre et prisme d'ombre: Soit a. b. c. d... une portion de surface, limitée par la ligne a b c d.



Théorème. — A tout point de perte, la tangente à la courbe d'ombre portée est le rayon lumineux, non seulement en projection, mais encore dans l'espace.

En effet, la courbe d'ombre portée $a_1 b_1 p_1 p_1$ est l'intersection de la surface S' et du cylindre d'ombre de la surface S .

Considérons le rayon lumineux du point P_1 . Il est une des génératrices du cylindre d'ombre de S , et par suite appartient au plan tangent à ce cylindre au point p_1 .

D'un autre côté, p_1 étant sur la séparatrice de S' , le rayon $p p_1$ est tangent à S' et contenu dans le plan tangent à S' au point p_1 .

Le rayon lumineux est donc l'intersection de 2 plans tangents au cylindre d'ombre et à la surface S' , et par suite c'est la tangente à la courbe d'ombre portée $a_1 p_1 b_1$.

Théorème.

En projection, le point où le rayon lumineux projeté est tangent au contour apparent d'une surface, donne le point de la séparatrice situé sur ce contour apparent.

En effet. Soit $a p b$, la séparatrice de la surface S .

Soit a , le point où elle touche le contour apparent. — En ce point le plan tangent à la surface est perpendiculaire au plan de projection, ou, pour être plus général, passe par l'œil du spectateur, puisque c'est un point du contour apparent.

Mais ce plan tangent contient un rayon lumineux, puisque le point a appartient à la séparatrice, c'est donc le plan projetant le rayon lumineux sur ce tableau, et sa trace $a a_1$ qui est tangente au contour apparent est la projection d'un rayon lumineux. C. Q. F. D.

Remarque. — Ces deux tangentes extrêmes $a a_1$ et $b b_1$ forment le contour apparent du cylindre d'ombre de la surface S .

Théorème. — La séparatrice d'une surface S et son ombre portée sur une autre surface S' ont pour tangentes communes 2 rayons lumineux en projection.

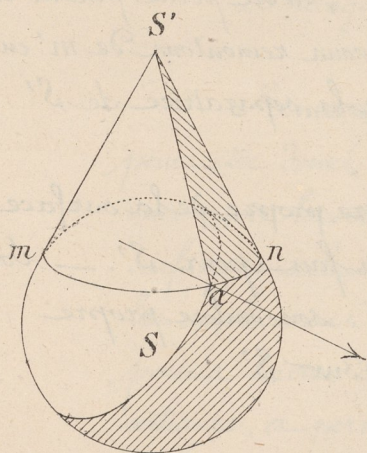
Se dit que les droites aa_1 , et bb_1 , sont tangentes à la fois à la séparatrice abp , et à l'ombre portée a_1b_1p .

En effet ces 2 courbes appartiennent toutes deux au cylindre d'ombre de S . Elles doivent être tangentes à son contour apparent, et nous venons de dire que ce contour apparent était formé des 2 rayons lumineux projetés aa_1 , bb_1 . C. Q. F. D.

2^e. Méthode des surfaces inscrites ou circonscrites.

Deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre lorsqu'elles ont les mêmes plans tangents en tout les points d'une même courbe que l'on nomme leur courbe de contact.

Théorème — Lorsque deux surfaces se raccordent le long d'une courbe de contact, le point où la séparatrice de la 1^{ère} rencontre la ligne de contact donne un point de la séparatrice de la 2^{ème}.



Soit S et S' , deux surfaces se raccordant le long de la courbe mn .

Soit $S'a$, la séparatrice de la 1^{ère} et a le point où elle rencontre la ligne de contact.

Au point a , le rayon lumineux est tangent à la surface S' , puisque a est un point de la séparatrice de S' . — Mais S et S' ont même plan tangent en a . Donc le rayon lumineux en a est aussi tangent à S , et par conséquent a est un point de la séparatrice de S . — C. Q. F. D.

Cette méthode n'est praticable que pour donner des points des lignes d'ombre propre.

Nous la généraliserons dans la théorie du lavir, pour trouver les lignes d'égale teinte sur une surface.

3^e. Méthode des ombres portées et des enveloppes, ou Méthode des projections obliques.

Soient S et S' , deux surfaces; et soit P un plan auxiliaire d'ombre portée. On veut résoudre le problème général des ombres:

1^o. Recherche de l'ombre portée par S' sur le plan P .

On tracera sur S' des courbes convenablement choisies. — Soient $1, 2, 3, \dots$ ces courbes dans l'espace. — On cherchera les ombres portées de ces courbes sur le plan P . Soient $1', 2', 3', \dots$ ces ombres portées.

En raisonnant comme on le fait quand on démontre que le contour apparent d'une surface est l'enveloppe des projections de toutes les courbes tracées sur cette surface, on prouvera que l'ombre portée par la surface S' sur le plan P , est l'enveloppe des courbes $1', 2', 3', \dots$.

On tracera cette enveloppe.

2°. Recherche de l'ombre propre de S' .

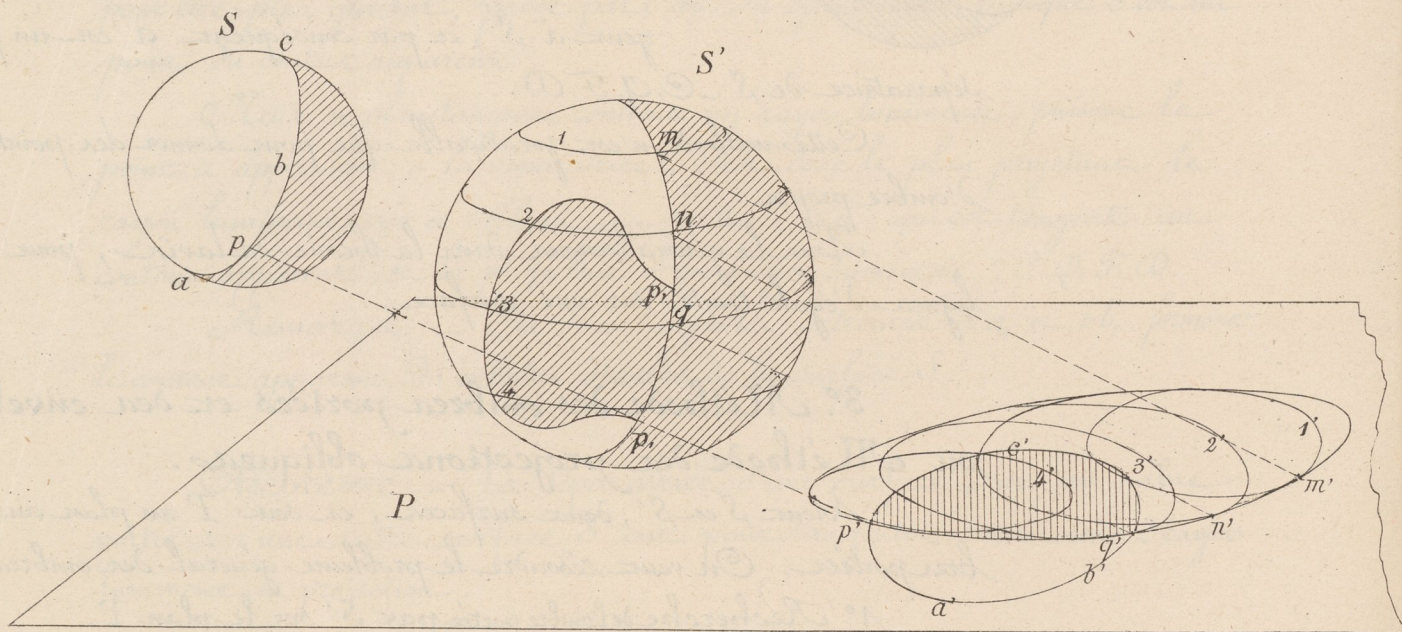
On cherchera les points $m', n', q', \dots$ où l'enveloppe touche les enveloppées $1', 2', 3', \dots$ — Soit m' un de ces points de contact. Le point m' étant un point de l'ombre portée de S' , est aussi l'ombre portée d'un point de la séparatrice de S' .

Mais m' appartient à $1'$, ombre portée par la courbe 1 ; si donc par un rayon lumineux inverse nous remontons de m' en m sur la courbe 1 , nous aurons en m un point de la séparatrice de S' . On fera de même pour tous les autres.

3°. Ombre portée et ombre propre de la surface S .

On fera pour S comme on a fait pour S' . — Soient $a' b' c' \dots$ son ombre portée, et $a, b, c, \dots$ son ombre propre.

4°. Ombre portée par S sur S' .



L'ombre portée $a'b'c'$ de la surface S rencontre en a' la courbe $1'$, ombre portée par la courbe 1 de la surface S' .

Menons le rayon inverse $a'a$, a . Il passera par le point a_1 de la courbe 1, et par le point a de la séparatrice de S .

Le point a porte donc ombre en a' , sur la surface S' .

On obtiendra de la même manière les points de l'ombre portée situés sur les courbes 2. 3. . . . de la surface S' .

5° Point de Perte.

Prenons le point p' où les deux courbes d'ombre portées totales se rencontrent.

Menons le rayon lumineux inverse $p'p$, p .

Il vient passer par le point p_1 de l'ombre propre de S' et par le point p de l'ombre propre de S , — p porte donc ombre en p_1 sur la surface S' et par suite le point p est le point de perte cherché.

La tangente en p_1 à la courbe d'ombre portée, est le rayon lumineux.

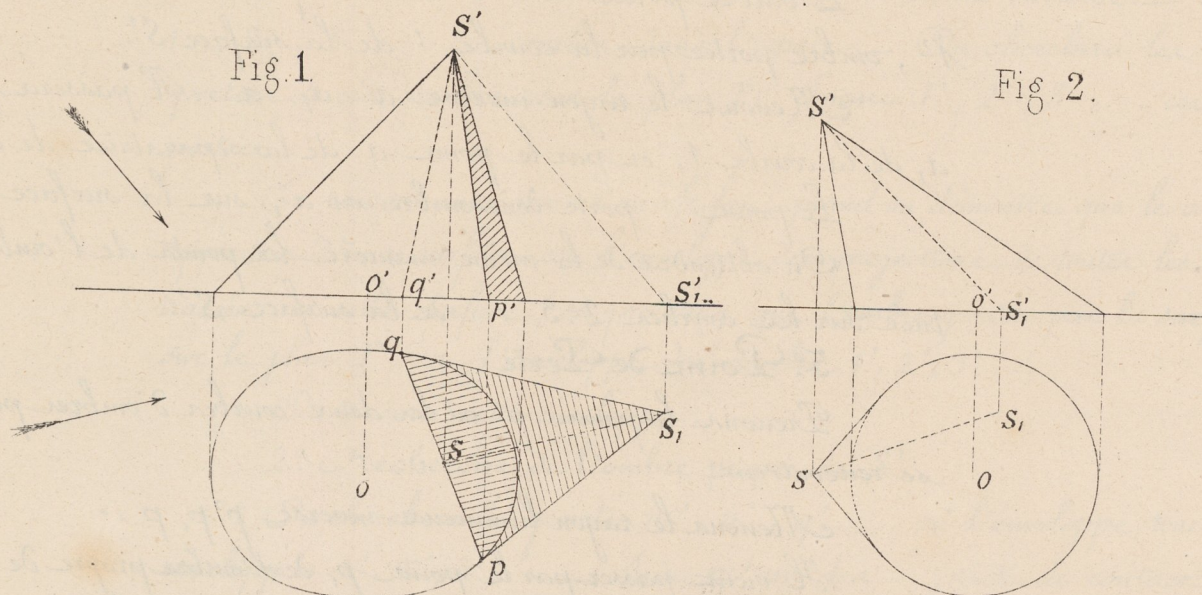
Remarque. — Le plan P , au lieu d'être choisi arbitrairement peut être donné par l'épure même. En architecture, ce sera soit un mur, soit le sol. Au lieu d'un plan, on pourra prendre toute autre surface auxiliaire: un cône, un cylindre — Il est rare que dans les applications il n'y ait pas de surfaces sur lesquelles les ombres portées soient demandées. — Dans ce cas ces surfaces serviront d'auxiliaires, et permettront de remonter des ombres portées sur elles aux ombres propres dans l'espace et aux ombres portées des objets les uns sur les autres.

Ombre propre du Cône.

Soit OO' (fig. 1) sa base sur le plan de projection, — SS' son sommet. On cherche l'ombre portée par le sommet sur le plan de base.

Soit $S_1S'_1$ cette ombre portée. — On mène par ce point les deux tangentes à la base — S_1p — S'_1q . — Ces deux droites déterminent l'ombre portée par le cône sur son plan de base.

Les génératrices des points de contact Sp , — $S'p'$ — et Sq — $S'q'$, sont les lignes d'ombre propre.



Cône sans ombre.

Si (fig. 2) l'ombre portée S_1, S'_1 du sommet tombe dans l'intérieur de la courbe de base il ne sera pas possible de mener du point S_1 des tangentes à cette base. — Le cône n'aura pas d'ombre propre.

Cône Limite.

Enfin, si le point S_1 tombe sur la courbe de base, c'est-à-dire si le rayon lumineux dans l'espace est parallèle à une génératrice du cône, on ne pourra plus mener par S_1 qu'une tangente à cette base, et les deux génératrices d'ombre propre se réduiront à une seule.

Ombre propre d'un cylindre.

Soit OO' (fig. 1) la base du cylindre sur le plan horizontal.

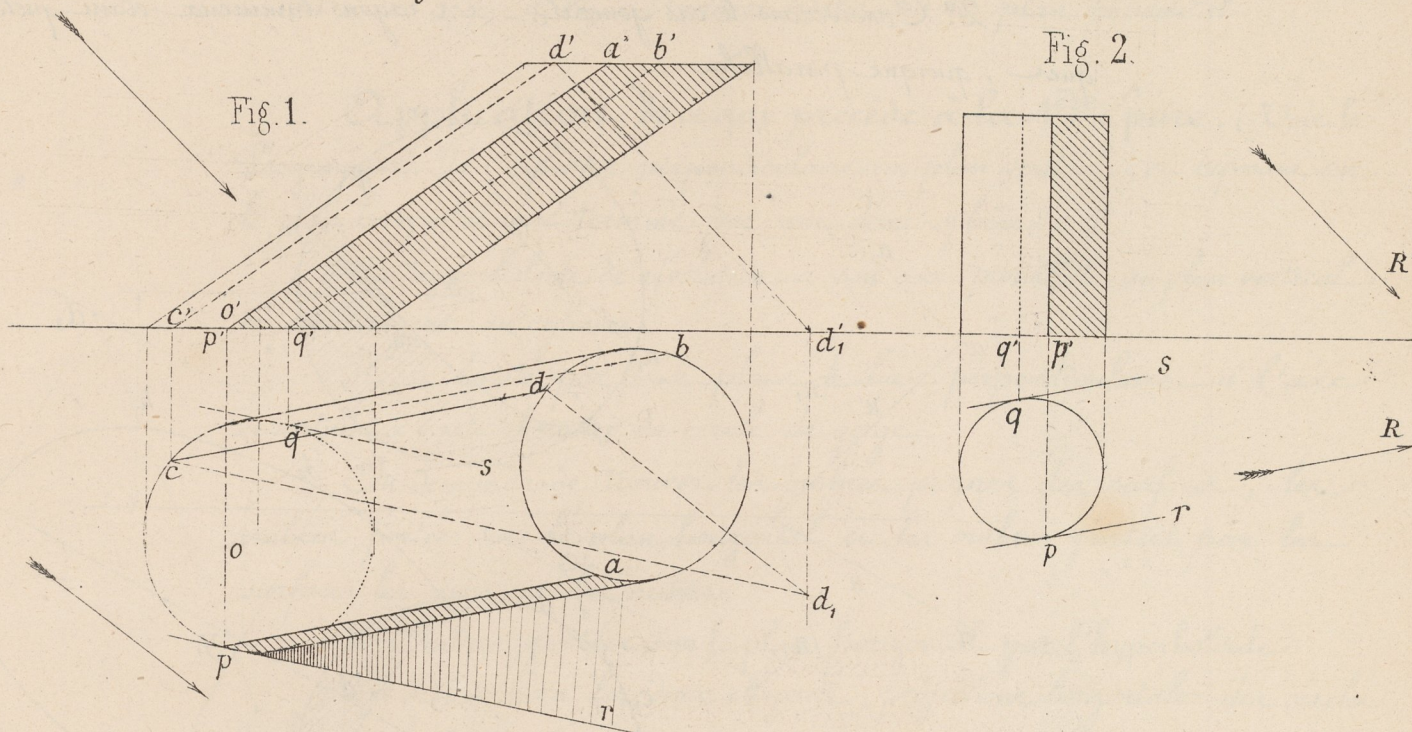
On prendra une génératrice quelconque $cd - cd'$. On cherchera son ombre portée sur le plan de base, en $cd_1 - c'd_1$.

On mènera, à la base, deux tangentes, — $pr - qs$, parallèles à cd_1 . — Ces deux droites constitueront l'ombre portée par le cylindre sur le plan horizontal.

Les génératrices $pa, p'a'$, et $qb - q'b'$, qui passent par le point de contact sont les lignes d'ombre propre du cylindre.

Remarque. — Si le cylindre est perpendiculaire à l'un des plans de projection (fig. 2), il suffira de mener à la base sur ce plan de

projection d'une tangente parallèle à la projection correspondante R , du rayon lumineux

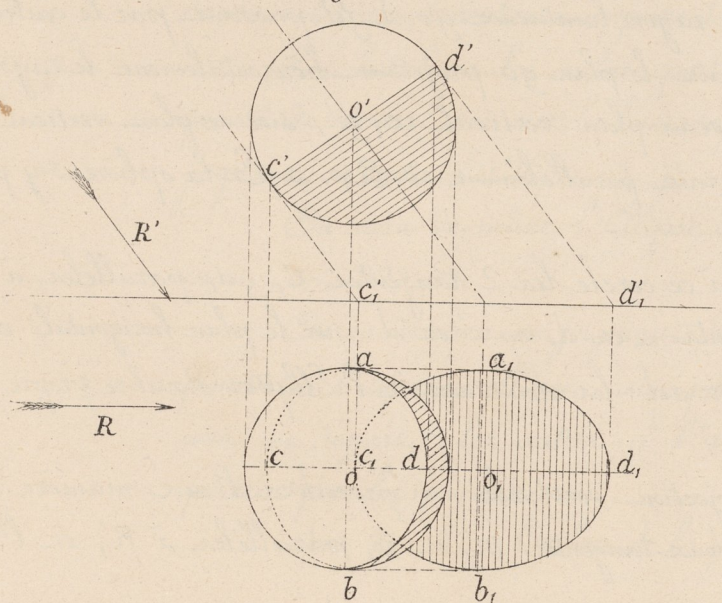


Ombre propre de la sphère.

1°. Considérons le cas simple où les rayons lumineux sont parallèles au plan vertical.

Soit oo' le centre de la sphère ; — RR' les projections du rayon lumineux.

On sait que la courbe de contact est un grand cercle perpendiculaire au rayon lumineux. — Ce sera donc le grand cercle du plan à pour trace verticale $c'd'$.

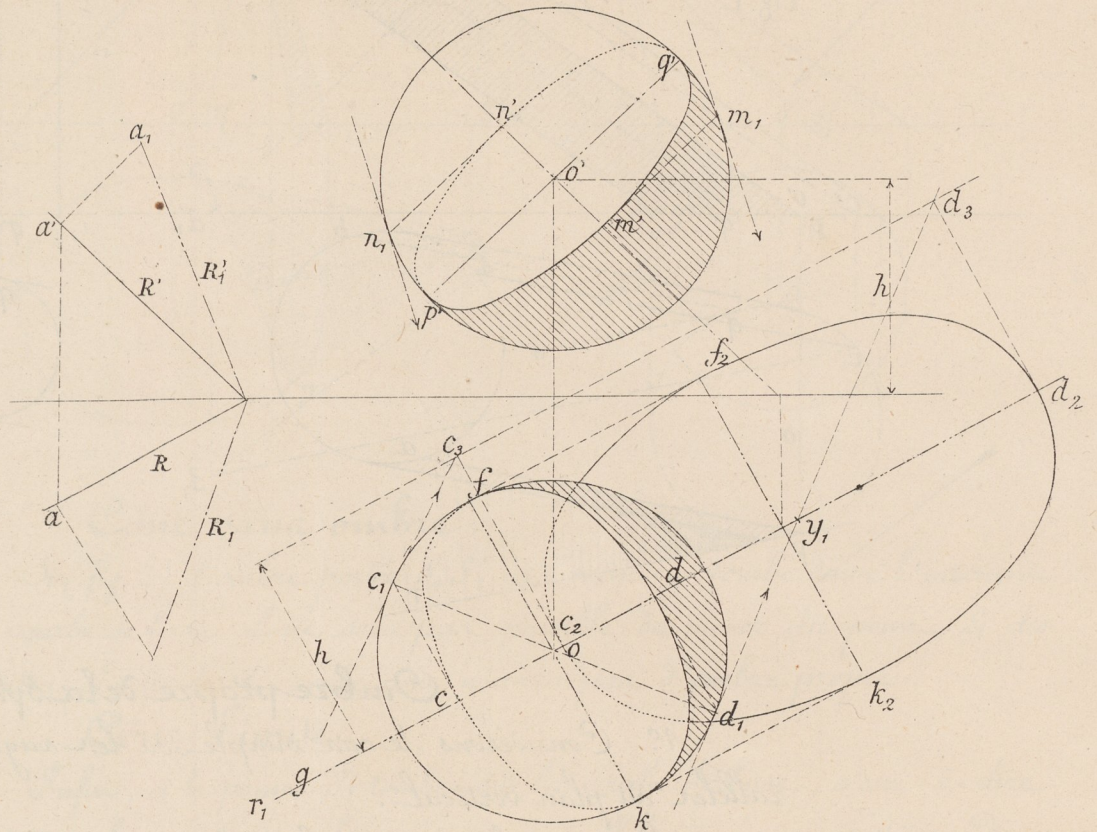


Le problème revient à déterminer la projection horizontale d'un cercle perpendiculaire au plan vertical et projeté verticalement en $c'd'$.

On a en ab et cd les deux axes de l'ellipse projection horizontale. — Et en $c'd$ — a, b , les deux axes de l'ellipse d'ombre portée par

la sphère sur le plan horizontal

2°. Considérons le cas général. — Les rayons lumineux étant quelconques, quoique parallèles. —
g'



Soit $O O'$ le centre de la sphère. — RR' un rayon lumineux rencontrant la ligne de terre. — R , son rabattement sur le plan horizontal — R' , son rabattement sur le plan vertical.

Menons le rayon lumineux go , — go' passant par le centre.

Si l'on prenait le plan go projetant horizontalement le rayon lumineux pour nouveau plan vertical x, y , sur ce plan vertical le rayon lumineux se projetterait parallèlement à R . — Et la sphère s'y projetterait suivant le cercle O .

Menons à ce cercle les 2 tangentes c_1, d_1 parallèles à R . — Ramenons les points c_1 et d_1 en c et d sur le plan horizontal et nous aurons en fk — et cd les deux axes de l'Ellipse d'ombre propre en projection horizontale.

Pour la projection verticale, on procédera d'une manière analogue. — On mènera les deux tangentes m_1 et n_1 parallèles à R' et l'on en

en $m'n' - p'q'$ les deux axes de l'ellipse d'ombre en projection verticale.
— on a en $c_2 f_2 d_2 K_2$, l'ombre portée sur le plan horizontal.

Application de ce qui précède à la 1^{ère} Épure. (Voir le Programme). Un cylindre perpendiculaire au plan vertical, et reposant sur le plan horizontal est terminé par une demi-sphère cc' .

Un hyperboloïde de révolution a son axe parallèle au plan vertical et est tangent au cylindre:

Il est limité par deux plans de base perpendiculaires à l'axe et situés à égale distance du cercle de gorge.

On demande de trouver les ombres propres des surfaces, les ombres portées sur le plan horizontal et les ombres portées par les surfaces les unes sur les autres.

1^o Ombres portées sur le plan horizontal par l'hyperboloïde.

On déterminera les deux ellipses, projections horizontales des cercles de base de la surface.

Par un changement de plan fait en M , on projettera l'hyperboloïde sur un plan perpendiculaire à son axe, et l'on prendra sur sa base 12 points équidistants 1. 2. 3. 4. 11, 12, qui serviront de départ à 12 génératrices d'un même système.

Soit 2, 22, l'une d'elles, projetée verticalement en 2', 22', 32' et horizontalement en 2, 22, 32.

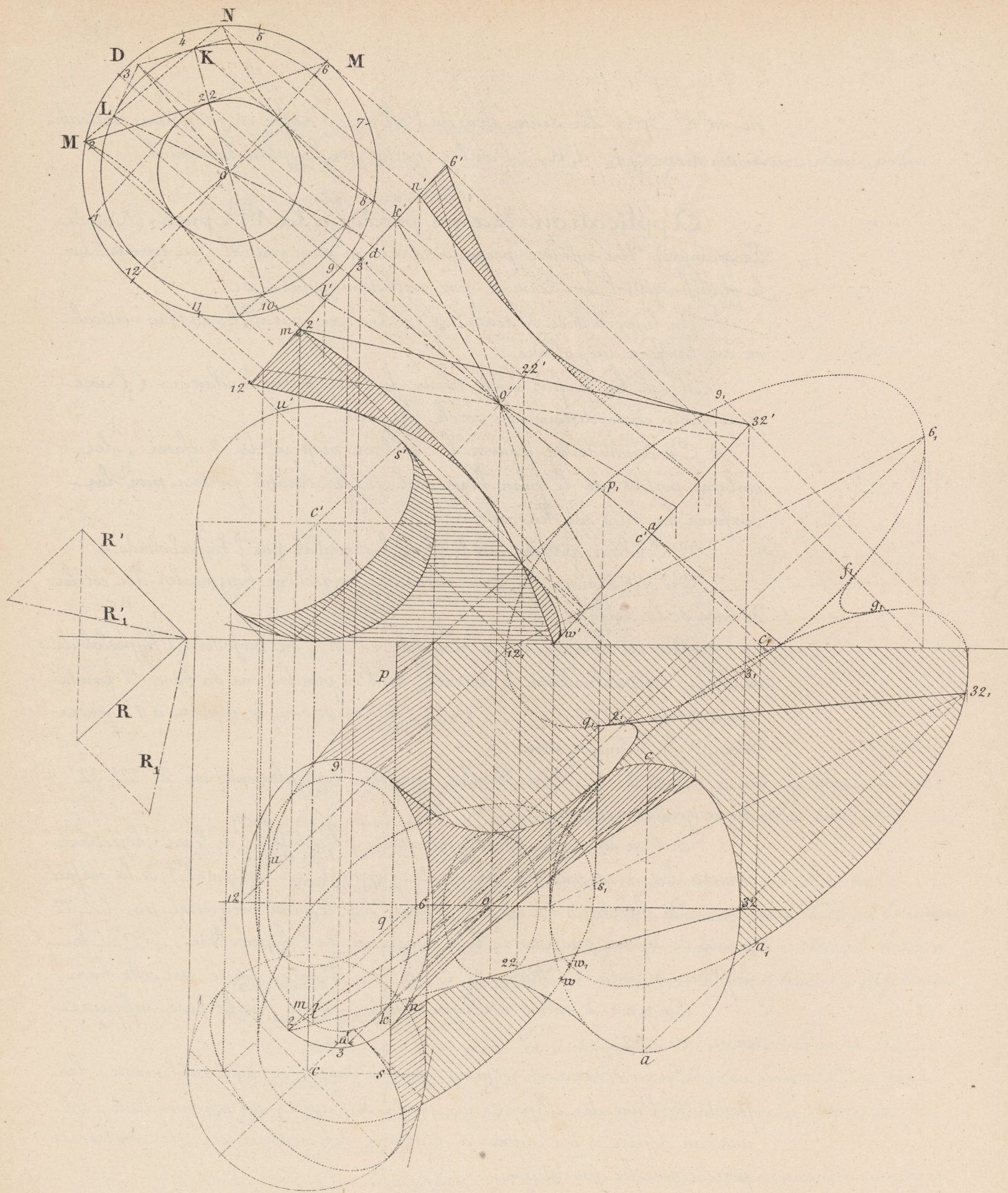
Si l'on détermine les 12 génératrices, l'enveloppe de leurs projections donnera les deux contours apparents (vertical et horizontal) de la surface.

On cherchera les ombres portées sur le plan horizontal par les 12 points de départ pris sur la base supérieure de l'hyperboloïde. — En les joignant on aura l'Ellipse 3, 6, 9, 12, d'ombre portée par cette base.

On aura de même l'Ellipse d'ombre portée par la base inférieure en $a_1, c_1, 32_1$.

On en déduira en joignant deux à deux, et convenablement, les points de l'une des ellipses aux points de l'autre, qui correspondent, les uns au départ, les autres à l'arrivée des génératrices, les ombres portées par les génératrices.

Soit 2, 32, l'ombre de la génératrice 2. 32.



L'ombre portée par l'hyperboloïde sera l'enveloppe de ces ombres portées par l'hyperboloïde. — Ce sera une hyperbole (f, g_1). — (Cela aurait pu être une ellipse.)

2^o Ombre propre.

On prendra, par terre, le point de tangence (2_1) de l'hyperbole enveloppe et d'une génératrice d'ombre portée. On remontera de ce point, au point de l'espace sur la génératrice correspondante, par un rayon lumineux inverse, et l'on aura en $2, 2'$ un point de l'ombre propre de l'hyperboloïde.

(Sur le croquis c'est par hasard que le point d'ombre propre situé sur la génératrice $2-32$, se trouve au départ de cette génératrice sur la base supérieure).

Nature géométrique de la courbe d'ombre propre.

On sait que sur une surface du 2^o la courbe de contact d'un cylindre circonscrit est la section diamétrale conjuguée de la direction des génératrices du cylindre.

On sait de plus qu'un hyperboloïde et son cône asymptote ont pour une même direction les mêmes plans diamétraux conjugués.

Par conséquent, si l'on détermine les deux génératrices d'ombre propre du cône asymptote, et si l'on prolonge le plan de ces deux génératrices, jusqu'à ce qu'il coupe l'hyperboloïde, il donnera comme section la ligne d'ombre propre de cette surface.

Si le cône a une ombre propre, l'ombre propre de l'hyperboloïde sera une hyperbole ayant pour asymptotes les deux génératrices d'ombre propre du cône.

Si le cône n'a pas d'ombre propre, la séparatrice de l'hyperboloïde sera une ellipse.

Pour distinguer ces deux cas, par le sommet $O O'$ du cône asymptote, c'est-à-dire par le centre de la surface, menons un rayon lumineux.

Il perce en $d d'$ le plan de la base supérieure de l'hyperboloïde. — Ce point d est ramené en D sur la projection M . De ce point on peut mener deux tangentes DK , DM à la base du cône asymptote. —