

Dreieckspunkte Koordinaten berechnen zu können, muß man ein rechtwinkliges Koordinatensystem annehmen; dies wird man im allgemeinen so wählen, daß der Ursprung mit einem Dreieckspunkt und eine Achse mit einer Dreiecksseite zusammenfällt (Abb. 89).

3. Die verschiedenen Verfahren zur Bestimmung von weiteren Punkten in einem Netz vorhandener Punkte.

Die durch eine neue oder eine alte selbständige Triangulation festgelegten Punkte reichen im allgemeinen als Grundlage für die Durchführung der topographischen Aufnahme nicht aus; man ist daher gezwungen, auf Grund der fehlerfrei anzunehmenden Hauptpunkte weitere Punkte zu bestimmen oder das Punktnetz zu verdichten. Die Bestimmung von solchen Zwischenpunkten kann auf drei Arten erfolgen, nämlich numerisch, graphisch und mechanisch. Bei der numerischen Festlegung werden die dazu erforderlichen Größen gemessen, also in Zahlen ermittelt; die graphische Festlegung erfolgt mit Benutzung des Meßtisches und der Kippregel; die mechanische Festlegung geschieht mit Hilfe einer Meßkammer, also auf photogrammetrischem Wege. Wird ein Punkt numerisch festgelegt, so müssen von den gegebenen Punkten Koordinaten bekannt sein; die Festlegung des Punktes besteht in der Ermittlung seiner Koordinaten. Bei der graphischen Bestimmung von Punkten müssen die gegebenen Punkte in einem bekannten Maßstab aufgezeichnet sein. Für die photogrammetrische Bestimmung von weiteren Punkten in einem vorhandenen trigonometrischen Punktnetz kommt zunächst die Luftphotogrammetrie in Frage; die Erdphotogrammetrie wird nur unter ganz besonderen Verhältnissen zur Anwendung kommen.

Die gegebenen, bereits festliegenden Punkte werden als *Festpunkte* bezeichnet; im Gegensatz dazu heißen die neu zu bestimmenden Punkte *Neupunkte*.

Die Festlegung von Neupunkten kann punktweise, zugweise oder netzweise erfolgen. Bei der punktweisen Bestimmung wird jeder Punkt für sich oder höchstens zwei Punkte gemeinsam festgelegt¹; bei der zugweisen Bestimmung werden mehrere Punkte gemeinsam mit Hilfe eines gebrochenen Linienzuges oder Polygonzuges festgelegt; bei der netzweisen Bestimmung erfolgt die gemeinsame Festlegung von zwei und mehr Punkten mit Hilfe eines Dreiecksnetzes. Die punktweise Bestimmung eines Punktes kann numerisch, graphisch oder photogrammetrisch erfolgen; die zugweise Bestimmung wird am besten numerisch ausgeführt; die netzweise Festlegung von Punkten kann man numerisch oder photogrammetrisch, gelegentlich auch graphisch vornehmen.

4. Punktweise Bestimmung von Neupunkten nach dem numerischen Verfahren.

Bei der numerischen Festlegung von einem Punkt können Strecken und Horizontalwinkel gemessen werden; dabei ist zu beachten, daß die

¹ Die gelegentlich vorkommende gemeinsame Festlegung von mehr als zwei Neupunkten kommt hier kaum in Frage.

Winkelmessung im allgemeinen bequemer auszuführen ist als die Streckenmessung, so daß man diese zunächst nur dann anwenden wird, wenn es sich um kleinere Strecken handelt. Bei Punktbestimmungen für die Zwecke einer topographischen Aufnahme kommen im allgemeinen nur solche Verfahren in Frage, bei denen ausschließlich Winkel gemessen werden; man bezeichnet diese Verfahren auch als trigonometrische Punktbestimmung oder Punkteinschneiden oder Kleintriangulation.

Mißt man zur Festlegung von Neupunkten so viele Winkel als zur eindeutigen Festlegung nötig sind, so heißt dies eine einfache Punktbestimmung; werden mehr Winkel gemessen als unbedingt notwendig sind, so hat man eine mehrfache Punktbestimmung oder eine Punktbestimmung mit überschüssigen Beobachtungen. Führt man überschüssige Beobachtungen aus, so kann man die infolge der unvermeidlichen Messungsfehler auftretenden Widersprüche einer Ausgleichung unterwerfen, oder man benutzt die überschüssigen Beobachtungen nur zum Schutz gegen grobe Fehler. Bei der Bestimmung von Punkten als Grundlage für eine topographische Aufnahme führt man, wie allgemein, wenn irgend möglich überschüssige Messungen aus; man benutzt sie aber im allgemeinen nur zur Aufdeckung von Versehen bei der Messung. Im folgenden ist deshalb nur von der einfachen Punktbestimmung die Rede.

Bei der trigonometrischen Punktbestimmung oder der Punktbestimmung durch Einschneiden kann man die erforderlichen Winkel entweder in Festpunkten oder im Neupunkt messen; im ersten Fall ist durch den gemessenen Winkel eine Gerade, im zweiten Fall ein Kreis bestimmt. Durch einen in einem Festpunkt gemessenen Winkel wird ein Neupunkt „vorwärts eingeschnitten“; durch einen im Neupunkt gemessenen Winkel wird dieser „rückwärts eingeschnitten“. Ein Punkt kann demnach durch zwei Vorwärtseinschnitte, durch zwei Rückwärtseinschnitte oder durch einen Vorwärts- und einen Rückwärtseinschnitt bestimmt sein.

a) In ihrer allgemeinsten Form lautet die Aufgabe der Punktbestimmung durch zwei Vorwärtseinschnitte folgendermaßen: Gegeben sind die Festpunkte A, A', B und B' (Abb. 90) durch ihre Koordinaten (x_a, y_a) , $(x_{a'}, y_{a'})$, (x_b, y_b) und $(x_{b'}, y_{b'})$; gemessen wurden in A und B die beiden Winkel $A'AP = \alpha$ und $B'BP = \beta$. Gesucht sind die Koordinaten (x, y) von P .

Die Ermittlung von x und y kann auf verschiedene Arten durchgeführt werden; löst man die Aufgabe graphisch-numerisch, so ergibt sich das folgende Verfahren¹:

$\alpha)$ Man zeichnet die Festpunkte A, A', B

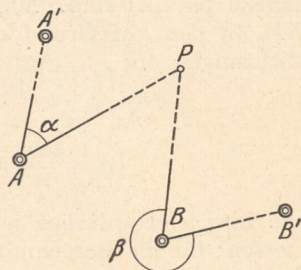


Abb. 90. Punktbestimmung durch zwei Vorwärtseinschnitte.

¹ Die rein rechnerischen Lösungen dieser und der folgenden Aufgaben findet man am besten bei Hammer, E.: Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie.

und B' auf Grund ihrer Koordinaten in passendem Maßstab auf und trägt die Winkel α und β z. B. mit Hilfe ihrer Sehnen in dem Kreis mit dem Halbmesser 1 dm ein.

Durch die so entstehende Zeichnung ist ein Näherungspunkt P_0

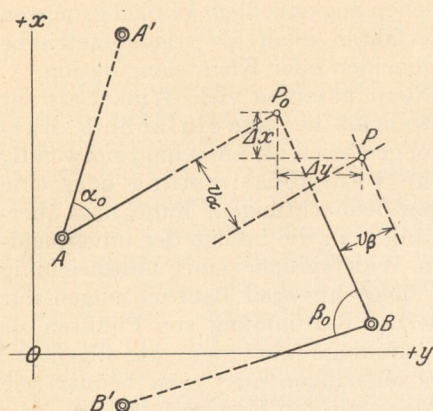


Abb. 91. Graphisch-numerische Lösung des zweifachen Vorwärtseinschnitts.

(Abb. 91) mit den Koordinaten (x_0, y_0) bestimmt, die man in der Zeichnung abmessen kann.

β) Dem Näherungspunkt P_0 entsprechen an Stelle der „gemessenen Winkel“ α und β die „genäherten Winkel“ α_0 und β_0 , die man auf Grund der Richtungswinkel (AA') , (AP_0) , (BB') und (BP_0) erhält aus:

$$\alpha_0 = (AP_0) - (AA')$$

und

$$\beta_0 = (BP_0) - (BB'),$$

wobei die Richtungswinkel zu berechnen sind aus

$$\operatorname{tg}(AA') = \frac{y_{a'} - y_a}{x_{a'} - x_a},$$

$$\operatorname{tg}(AP_0) = \frac{y_0 - y_a}{x_0 - x_a},$$

$$\operatorname{tg}(BB') = \frac{y_{b'} - y_b}{x_{b'} - x_b},$$

$$\operatorname{tg}(BP_0) = \frac{y_0 - y_b}{x_0 - x_b}.$$

γ) Die genäherten Winkel α_0 und β_0 weichen um die Beträge $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ von den gemessenen Winkeln α und β ab, so daß

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0 \quad \text{und} \quad \Delta\beta = \beta - \beta_0.$$

Man hat nun in der Zeichnung die den Neupunkt bestimmenden Geraden AP_0 und BP_0 den im allgemeinen kleinen Winkeln $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ entsprechend zu verändern; dabei hat man zu beachten, daß die Schenkel der beiden kleinen Winkel in der nächsten Umgebung von P_0 nahezu parallel sind. Man verschiebt deshalb die Geraden AP_0 und BP_0 in den auf Grund einer einfachen Überlegung sich ergebenden Richtungen um

$$v_\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\varrho} \overline{AP_0} \quad \text{und} \quad v_\beta = \frac{\Delta\beta}{\varrho} \overline{BP_0}$$

$$\left(\varrho = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ \approx 3440' \approx 206\,000'' \right).$$

Die hierzu erforderlichen Strecken kann man in der Zeichnung abmessen; für die Berechnung von v_α und v_β genügt die Genauigkeit des Rechenschiebers.

δ) Trägt man v_α und v_β unter Verwendung eines entsprechend großen Maßstabes in die Figur ein, so erhält man den Punkt P . Die Koordinatenunterschiede Δx und Δy der Punkte P und P_0 stellen die an den Näherungskoodinaten x_0 und y_0 anzubringenden Ver-

besserungen Δx und Δy vor; mißt man diese in der Zeichnung ab, so erhält man die Koordinaten x und y von P aus

$$x = x_0 \pm \Delta x \quad \text{und} \quad y = y_0 \pm \Delta y.$$

Die Vorzeichen von Δx und Δy ergeben sich unmittelbar aus der Zeichnung.

ε) Sind die so ermittelten Koordinaten noch nicht genügend genau, was schon aus den Werten Δx und Δy beurteilt werden kann, so betrachtet man die ermittelten Werte selbst wieder als Näherungswerte und wiederholt mit ihnen das Verfahren.

Sind die beiden Festpunkte A und B (Abb. 90) gegenseitig sichtbar, so hat man einen besonderen Fall der Punktbestimmung durch zwei Vorwärtseinschnitte (Abb. 92).

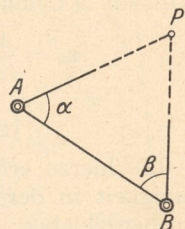


Abb. 92. Besonderer Fall der Punktbestimmung durch zwei Vorwärtseinschnitte.

b) Die Aufgabe der Punktbestimmung durch zwei Rückwärtseinschnitte lautet in der meist vorkommenden Form so:

Gegeben sind die Koordinaten (x_a, y_a) , (x_b, y_b) und (x_c, y_c) der Festpunkte A , B und C (Abb. 93); gemessen wurden die Winkel $APC = \alpha$ und $BPC = \beta$. Gesucht sind die Koordinaten (x, y) von P .

Die graphisch-numerische Lösung der Aufgabe besteht im Grundgedanken darin, daß man mit Hilfe einer maßstäblich ausgeführten Zeichnung für die gesuchten Koordinaten Näherungswerte x_0 und y_0 ermittelt und deren Verbesserungen Δx und Δy zum Teil durch Rechnung, zum Teil durch Zeichnung bestimmt. Der Gang der Lösung ist der folgende:

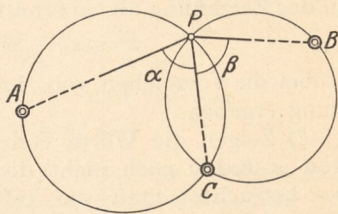


Abb. 93. Punktbestimmung durch zwei Rückwärtseinschnitte.

α) Zeichnerische Ermittlung der Koordinaten (x_0, y_0) eines Näherungspunktes P_0 (Abb. 94).

Man findet P_0 als Schnittpunkt der beiden, durch die Winkel α und β bestimmten Kreise.

β) Berechnung der dem Punkt P_0 entsprechenden „genäherten Winkel“ α_0 und β_0 aus

$$\alpha_0 = (P_0A) - (P_0C)$$

und

$$\beta_0 = (P_0C) - (P_0B),$$

wobei die Richtungswinkel (P_0A) , (P_0B) und (P_0C) zu berechnen aus

$$\operatorname{tg}(P_0A) = \frac{y_a - y_0}{x_a - x_0}, \quad \operatorname{tg}(P_0B) = \frac{y_b - y_0}{x_b - x_0}, \quad \operatorname{tg}(P_0C) = \frac{y_c - y_0}{x_c - x_0}.$$

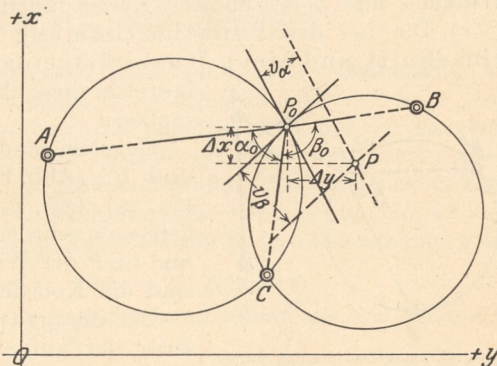


Abb. 94. Graphisch-numerische Lösung des zweifachen Rückwärtseinscheidens.

γ) Berechnung der Winkelunterschiede $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ aus

$$\Delta\alpha = \alpha_0 - \alpha \quad \text{und} \quad \Delta\beta = \beta_0 - \beta.$$

δ) Läßt man in P_0 an die Stelle der beiden den Neupunkt bestimmten Kreise deren Tangenten treten, so muß man diese den kleinen Winkeln $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ entsprechend parallel verschieben um

$$v_\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\varrho} \frac{\overline{P_0 A} \times \overline{P_0 C}}{\overline{AC}} \quad \text{und} \quad v_\beta = \frac{\Delta\beta}{\varrho} \frac{\overline{P_0 B} \times \overline{P_0 C}}{\overline{BC}}$$

$$\left(\varrho = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ \approx 3440' \approx 206\,000'' \right).$$

Die hierzu erforderlichen Strecken kann man mit genügender Genauigkeit in der Zeichnung abmessen; für die Rechnung genügt der Rechenschieber. Die Richtung der Verschiebung — von dem Kreismittelpunkt weg oder auf ihn zu — ergibt sich aus einer einfachen Überlegung.

ε) Verschiebt man die beiden Tangenten in P_0 unter Benutzung eines entsprechend großen Maßstabes um v_α und v_β , so stellen die Koordinatenunterschiede zwischen ihrem Schnittpunkt P und dem Näherungspunkt P_0 die Verbesserungen Δx und Δy vor; mißt man diese in der Zeichnung ab, so erhält man die Koordinaten x und y von P aus

$$x = x_0 \pm \Delta x \quad \text{und} \quad y = y_0 \pm \Delta y,$$

wobei die Vorzeichen von Δx und Δy sich unmittelbar aus der Zeichnung ergeben.

ζ) Zeigen die Werte von Δx und Δy , daß die ermittelten Werte von x und y noch nicht die gewünschte Genauigkeit haben werden, so betrachtet man die gefundenen Koordinaten selbst wieder als Näherungswerte und wiederholt mit ihnen das ganze Verfahren.

Die Festlegung eines Punktes durch zwei Rückwärtseinschnitte versagt für den Fall, daß der Neupunkt P (Abb. 93) auf dem Kreis durch die drei Festpunkte A , B und C liegt; die beiden, durch die gemessenen Winkel α und β bestimmten Kreise fallen dann zusammen.

c) Die bei der Punktbestimmung durch einen Vorwärtseinschnitt und einen Rückwärtseinschnitt zu lösende Aufgabe lautet in ihrer allgemeinsten Form folgendermaßen:

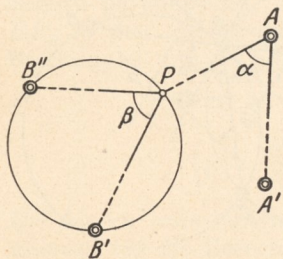


Abb. 95. Punktbestimmung durch einen Vorwärts- und einen Rückwärtseinschnitt.

Gegeben sind die Festpunkte A , A' , B' und B'' (Abb. 95) durch ihre Koordinaten (x_a, y_a) , $(x_{a'}, y_{a'})$, $(x_{b'}, y_{b'})$ und $(x_{b''}, y_{b''})$; gemessen wurden in A der Winkel $A'AP = \alpha$ und in P der Winkel $B'PB'' = \beta$. Gesucht sind die Koordinaten (x, y) von P .

Bei der graphisch-numerischen Lösung der Aufgabe ermittelt man graphisch die Koordinaten x_0 und y_0 eines Näherungspunktes P_0 und bestimmt die an diesen anzubringenden Verbesserungen Δx und Δy halb numerisch, halb graphisch; damit ergibt sich der folgende Rechnungsgang:

α) Ermittlung der Koordinaten (x_0, y_0) von P_0 (Abb. 96) mit Hilfe einer maßstäblich ausgeführten Zeichnung. Man findet P_0 als Schnittpunkt der durch den Winkel α bestimmten Geraden und des durch den Winkel β bestimmten Kreises.

β) Berechnung der durch P_0 bestimmten „genäherten Winkel“ α_0 und β_0 aus

$$\alpha_0 = (AP_0) - (AA')$$

und

$$\beta_0 = (P_0B') - (P_0B''),$$

wobei die Richtungswinkel (AP_0) , (AA') , (P_0B') und (P_0B'') sich ergeben aus

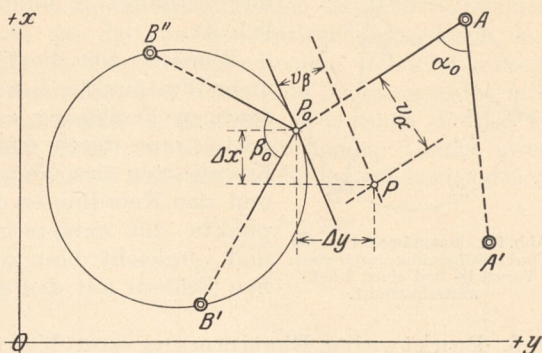


Abb. 96. Graphisch-numerische Lösung des Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens.

$$\operatorname{tg}(AP_0) = \frac{y_0 - y_a}{x_0 - x_a}, \quad \operatorname{tg}(AA') = \frac{y_a' - y_a}{x_a' - x_a},$$

$$\operatorname{tg}(P_0B') = \frac{y_b' - y_0}{x_b' - x_0}, \quad \operatorname{tg}(P_0B'') = \frac{y_b'' - y_0}{x_b'' - x_0}.$$

γ) Berechnung der Winkelunterschiede $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ aus

$$\Delta\alpha = \alpha_0 - \alpha \quad \text{und} \quad \Delta\beta = \beta_0 - \beta.$$

δ) Um von P_0 ausgehend den richtigen Punkt P zu erhalten, muß man den kleinen Winkeln $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ entsprechend die Gerade AP_0 um v_α und die Tangente in P_0 an den Kreis um v_β parallel verschieben; dabei ist

$$v_\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\varrho} \overline{AP_0} \quad \text{und} \quad v_\beta = \frac{\Delta\beta}{\varrho} \frac{\overline{P_0B'} \times \overline{P_0B''}}{\overline{B'B''}}$$

$$\left(\varrho = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ \approx 3440' \approx 206\,000'' \right).$$

Die hierbei gebrauchten Strecken kann man in der Zeichnung abmessen; für die Rechnung genügt der Rechenschieber.

ϵ) Führt man die Verschiebung der Geraden AP_0 und der Tangente in P_0 um v_α bzw. v_β in den auf Grund von einfachen Überlegungen sich ergebenden Richtungen in genügend großem Maßstab aus, so kann man in der sich ergebenden Zeichnung die Verbesserungen Δx und Δy abmessen; man erhält dann die gesuchten Koordinaten x und y aus

$$x = x_0 \pm \Delta x \quad \text{und} \quad y = y_0 \pm \Delta y,$$

wobei die Vorzeichen von Δx und Δy unmittelbar aus der Zeichnung hervorgehen.

ζ) Aus der Größe der Werte Δx und Δy ersieht man, ob die sich ergebenden Werte von x und y die erforderliche Genauigkeit haben; ist dies nicht der Fall, so behandelt man die ermittelten Koordinaten wieder als Näherungswerte und wiederholt mit ihnen das Verfahren.

Ein besonderer Fall der vorliegenden Aufgabe ist der, bei dem die Bestimmung des Neupunktes P (Abb. 97) mit Hilfe von nur zwei Festpunkten durch Messung der Winkel α und β im Festpunkt A und im Neupunkt P möglich ist.

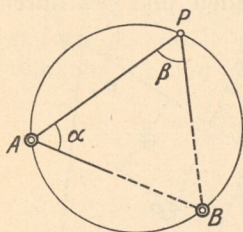


Abb. 97. Besonderer Fall der Punktbestimmung durch einen Vorwärts- und einen Rückwärtseinschnitt.

Wurden zur Bestimmung eines Punktes mehr Festpunkte benutzt als zu seiner eindeutigen Festlegung erforderlich sind, so ermittelt man durch einfaches Einschneiden die Koordinaten des Neupunktes und aus diesen und den Koordinaten der überschüssigen Festpunkte die entsprechenden Richtungswinkel und vergleicht diese zur Aufdeckung von groben Fehlern mit den gemessenen Winkeln.

5. Punktweise Bestimmung von Neupunkten nach dem graphischen Verfahren.

Die graphische Festlegung eines Punktes mit Hilfe des Meßtisches unterscheidet sich von der numerischen Festlegung insbesondere dadurch, daß die erforderlichen Winkel bzw. Richtungen im Gelände mit der Kippregel bestimmt werden. Da die Messung von Strecken für den vorliegenden Zweck noch weniger in Frage kommt als bei der numerischen Festlegung, so erfolgt die Bestimmung eines Punktes entweder durch zwei Vorwärtseinschnitte oder durch zwei Rückwärtseinschnitte oder durch einen Vorwärts- und einen Rückwärtseinschnitt. Mehr noch als beim numerischen Verfahren empfiehlt sich beim graphischen Verfahren die Ausführung von überschüssigen Beobachtungen.

Die Aufstellung des Meßtisches in den Festpunkten zur Bestimmung von Vorwärtseinschnitten geschieht in der früher angegebenen Weise; die Festlegung von Vorwärtseinschnitten ist eine selbstverständliche Sache. Die für Rückwärtseinschnitte in einem Neupunkt zur Bestimmung der erforderlichen Winkel zu zeichnenden Strahlen werden am einfachsten auf Pauspapier festgelegt, so daß sie durch entsprechendes Verschieben in die Zeichnung auf der Meßtischplatte eingepaßt werden können; dies gilt insbesondere für die Festlegung eines Punktes durch mehrere Rückwärtseinschnitte.

6. Punktweise Bestimmung von Neupunkten nach dem photogrammetrischen Verfahren.

Die mechanische oder photogrammetrische Festlegung eines Punktes mit Hilfe von Meßbildern aus einem Luftfahrzeug kann in einem nur geringe Höhenunterschiede aufweisenden Gelände ohne besondere Auswertungsinstrumente ausgeführt werden; in einem Gelände mit größeren Höhenunterschieden erfordert die Punktbestimmung die Benutzung eines Auswertungsinstruments. In beiden Fällen handelt es sich um eine photogrammetrische Punktbestimmung oder photogrammetrische Kleintriangulation mit Hilfe von Luftbildern.