nearby are their A greets, its innotesting and Cropolity A. G. Dia Balba Holne Mrg. our Chiple,

## me un rice me M. Cota rollo did QCI the second of au S. 369. XI. 111 white We to the Atta new Statistics and March March

ung der Winfig alter ver abres 20 der Man kann in den (S. 369. IX.) angeführe ten Schriften und in folden, welche über-haupt von großen geographischen Meffungen bandeln, unter andern auch erfeben, wie aus folden Bermeffungen Die geographischen lane gen und Breiten ber Derter, welche in Die Winkelpunkte der Drenecke eines über bas vermeffene Land geführten Drepeckenneges fals len , burch Rechnung bestimmt werden fons nen, indem das Berfahren 6. 350 Buf. IV. nicht die geborige Genauigkeit verftattet, wenn in ben Bestimmungen fleinere Theile als eine Beichnung fie geben tann, verlangt werben.

Da bieben zugleich auf Die fpharoidische Geftalt unferes Erdforpers Ruckficht genoms men werden muß, fo mag fur diejenigen, wels che die erforderlichen Kenneniffe ber bobern Mathematit haben, folgendes dienen, um eis nen Begriff von ber Berechnungsart ju geben.

I. Es sen (Fig. XCVI. Tab. IX.) die bafelbft gezeichnete Ellipfe ein Meridian auf der sphäroidischen Erde, A, V die benden Erdpole, AG die halbe fleine Ure der Ellipse, DG die halbe große, M ein Ort auf dem Meridian, und MR eine Normallinie an M, welche die Erdare AGV in R durchschneiz de, so ist MR die Verticallinie des Orts M, und der Winkel ARM des Orts Ubstand vom Pole A, oder die Ergänzung der geographischen Breite des Orts M zu 90°, auf der sphäroidischen Erde. Da zu den solgenden Untersuchungen der Werth der Normallinie, sur jeden Winkel wie ARM, gebraucht wird, so schieße ich ihier erst solgenz des darüber voraus.

II. Man falle MP auf AV fenkrecht, und nenne AP=t PM=z; AG=γ; GD=α; fo ift nach der Gleichung der Ellipse

 $z^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma^2} (2\gamma t - t^2)$ , und die Subnormale  $PR = \frac{z \, dz}{dt} = \frac{\alpha^2}{\gamma^2} (\gamma - t)$ . (Kåstin. Unal. d. Unal. d. Unal. S. 92. Die dortigen y, x sier z und t genannt.) =  $n^2$  ( $\gamma - t$ ), wenn  $\frac{\alpha}{\gamma}$  der Kürze halber mit n bezeichnet wird.

III. Man nenne ben Winkel MRP ober bie Erganzung ber geographischen Breite des Orts Orts zu 90° == n, so ist  $z = PR \tan \eta = n^2 (\gamma - t) \tan \eta$ .

Dies fatt z in die Gleichung ber Ellipfe

(II.) fubstituirt, giebt

 $n^2 (\gamma - t)^2 \tan \eta^2 = 2\gamma t - t^2$ oder das Quadrat von y — t würklich ent: wickelt  $n^2 \gamma^2 tg \eta^2 + (1 + n^2 tg \eta^2) t^2 = 2 \gamma t (1 + n^2 tg \eta^2)$  $n^2 \gamma^2 \tan \eta^2 = (2\gamma t - t^2) (1 + n^2 \tan \eta^2)$ 

 $= \frac{z^2}{n^2} (1 + n^2 \tan n^2) (11)$ 

30(1-- 30) 1-4 = (1- - - - - - 1) No = 200 IV. 20160

 $= \frac{n^2 \gamma \tan \eta}{V(1+n^2 \tan \eta^2)}; \quad \text{Mithin}$ 

Subnormale-

$$PR = \frac{z}{\tan \eta} = \frac{n^2 \gamma}{\sqrt{(1+n^2 \tan \eta^2)}} (III)$$
Und die

PR Normale MR = PR fec n =

$$\frac{n^{2} \gamma}{\cot \eta \sqrt{(1+n^{2} \tan \eta^{2})}} = \frac{n^{2} \gamma}{\sqrt{(\cot \eta^{2}+n^{2} \sin \eta^{2})}} = \frac{n^{2} \gamma}{\sqrt{(1+(n^{2}-1) \sin \eta^{2})}} = \frac{n^{2} \gamma}{\sqrt{(1+(n^{2}-1) \sin \eta^{2})}}$$

V. Run ist aber  $n^2 - 1 = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{(\gamma^2)^2}$  immer

ein sehr kleiner Bruch, weil ben unserer spharoidis schen Erde ber Unterschied zwischen den benden halben Durchmessern AG = 7 und GD = a, also a — 7 wie wir hernach sehen werden, selbst nur sehr klein ist; Daher kann statt

 $\frac{1}{\sqrt{(1+(n^2-1) \ln n^2)}} = (1+(n^2-1) \ln n^2)^{-\frac{1}{2}}$ immer ohne erheblichen Fehler blos geseht were

ben 1 —  $\frac{1}{2}$  (n<sup>2</sup> = 1) sin  $n^2$ . Serner ist  $\frac{\alpha^2}{\gamma}$  =

 $n\alpha = \alpha V (1+n^2-1) = \alpha + \frac{1}{2}(n^2-1)\alpha$ weil statt  $\sqrt{(1+n^2-1)}$  ebenfalls ohne merklichen Gehler gesetzt werden kann

merrichen gehier gelegt werden rann  $1 + \frac{1}{2}(n^2 - 1)$ . Dies giebt beninach  $MR = \alpha(1 + \frac{1}{2}(n^2 - 1))(1 - \frac{1}{2}(n^2 - 1)) fing^2)$ 

Oder wenn man ben der Multiplication der in den Klammern eingeschlossenen Ansdrücke die höhern Potenzen von n2 — 1 wegläst, ohne merklichen Fehler

 $MR = \alpha \left( 1 + \frac{1}{2} (n^2 - 1) - \frac{1}{2} (n^2 - 1) \sin n^2 \right)$   $= \alpha \left( 1 + \frac{1}{2} (n^2 - 1) \cos n^2 \right).$ 

VI. Und folglich

PR = MR  $col\eta = a col\eta (1 + \frac{1}{2}(n^2 - 1)col\eta^2)$ Sodann weiter

 $AR = PR + AP = PR + t = PR + \gamma - \frac{PR}{n^2}$ (II.)

(II.) = 
$$\gamma + PR\left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right) = \gamma + PR\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}(V)$$
  
b.  $\beta$ . (IV)

$$AR = \gamma + \alpha \operatorname{cofn}(1 + \frac{1}{2}(n^2 - 1)\operatorname{cofn}^2) \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}$$

wofur ohne merflichen Fehler gefest werben

$$AR = \gamma + \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha} \text{ cof } \eta$$

weil 
$$\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2}$$
 so wie  $n^2-1=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2}$  nur kleine Brüche sind, so wie auch ohne merklischen Fehler statt.  $\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2}$  gesetzt werden könnte  $\alpha^2-\gamma^2$ 

$$\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}$$

VII. Mach dieser Vorbereitung sen nuns mehr N (Fig. KCVII.) ein anderer Ort auf der Erde, ANV dessen Meridian und NT die Normals oder Verticalslinie desselben, welche in die Erdage ben T einschneide, indem der Winkel NTA = 3 die Ergänzung der geogras phischen Breite des Orts N zu 90° senn wird. So hat man auf eine ähnliche Art, wie oben (V. VI.) für die Normallinie NT den Werth

$$NT = \alpha \left(1 + \frac{1}{2}(n^2 - 1) \operatorname{cof}(\zeta^2)\right)$$

und fur AT ben Werth

$$AT = \gamma + \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha} \operatorname{cof} \zeta$$

Mithin

$$TR = AR - AT = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha} (\cosh - \cosh \zeta)$$

VIII. Liegen nun M und N auf einem Lande, dessen Umfang nicht gar zu groß ist, so daß die geographischen Breiten von M und N nicht über 3 bis 4 Grade von einander unterschieden sind, und also auch der Unterschied  $S - \eta$  nicht über so viel Grade hinausgeht, so sen nunmehr  $\eta = S - 1$ , dann wird

coln=col((-i)=col (col i+lin fini ohne erheblichen Fehler=col (+ i lin 6, wo i in Decimaltheilen des Sinustotus ausge:

druckt werden muß. Mithin

$$TR = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha} i \text{ fin } \zeta.$$

IX. Man ziehe RU fenkrecht auf die Bere langerung von MT, so hat man RU =RTfin d, wenn man den Winkel ATM = & nennt.

X. Mithin fur den fleinen Winkel RMT ohne merklichen Fehler

$$RMT = \frac{RU}{RM} = \frac{(\alpha^2 - \gamma^2) \sin \zeta \sin \delta}{\alpha^2}.i$$

weil

weil es bier blog verftattet ift, ben Werth von RM (V) = a ju fegen, indem wegen der ge: ringen Große des Winkels RMT, das Glied I (n2 - 1) col 42 wenn es weggelaffen wird. Diefen Winkel taum um einige Decimaltheile von Secunden andert, felbit wenn i bren bis 4 Grade betruge.

XI. Run gebente man fich von M einen fenfrechten Bogen ML auf ben Meridian des Orts N, fo fann man ML und NL auf bem Spharoid, bloß als Bogen grofter Rreife auf einer Rugel betrachten, beren Mittels puntt T, und der Salbmeffer

= NT =  $\alpha(1 + \frac{1}{2}(n^2 - 1) \cos(\zeta^2)$ (VII) fenn murde, fo wie auch der Bogen MN als ein folcher von dem Salbmeffer NT angesehen werden barf, so bald, wie wir an: nehmen, Diefe Bogen nicht über einige Grade

betragen.

XII. Diese Bogen ML, NL, find als bekannt anguseben, indem fie nichts anders bedeuten, als die aus einem Drenecken : Dege awischen M und N nach ( G. 362. XVIII) be: rechneten y und x in Beziehung auf den Des ridian des Orts N, deffen geographische Breite = 90° - & als gegeben angefeben wird.

Waren J. B. M. N die Derter g, a in (Fig. LXXX.) fo wurden ML und NL die

Linie gp = y und 'ap = x, beren Werthe nach (S. 362. XVIII) gefunden werden fonnen, bedeuten.

XIII. Diese Cordinaten x, y, ober NL und ML, können nun ohne merklichen Fehler als Bogen größter Kreise benen am Mittele puncte T (XI.) Die Winkel

$$NTL = \frac{NL}{NT}$$
 206264 Sec.

und MTL = ML 206264 Sec. zugehören,

betrachtet werden. Ich will diese Bogen oder Winkel NTL =  $\mu$  und MTL =  $\nu$  nennen.

XIV. Um aus benfelben des Orts M geo: graphische Breite = 90° — 11, oder Abstand vom Pole = 11 = 2 — i zu berechnen, so hat man in dem rechtwinklichten sphärischen Drevecke NML, als auf einer Augelstäche vom Halbmesser NT (XI.)

1) cof MN = cof ML cof NL oder wenn man ben dem Bogen MN jugehör

rigen Winkel NTM = & nennt

 $cof \lambda = cof \mu cof \nu$  wo also  $\mu$  und  $\nu$  aus (XIII.) bekannt sind

2) tang MNL = 
$$\frac{\tan g ML}{\sin NL} = \frac{\tan g v}{\sin \mu}$$

wo MNL ober MNA ben Reigungs, Winkel ber benden Sbenen MNT, ANT ausdrückt, welchen ich mit + bezeichnen will. Allso

$$\tan g \tau = \frac{\tan g \nu}{\sin \mu}.$$

XV. Nun betrachte man weiter bas sphåe rische Dreneck AMN, welchem am Punkte T, die bren ebenen Winkel ATM = 8 (1X.) ATN = 8 (VII) und MTN = \lambda qugehoren.

In demfelben find bekannt der Reigungse winkel MNA = \( \tau, \) und die Winkel \( \) und \( \lambda, \) welche den Bogen AN und MN entsprechen (XIV).

Daraus findet fich fur den Bogen AM, pder den ihm entsprechenden Winkel ATM = &,

nach ber fpharifchen Trigonometrie

col d = col t fin d fin g + col d col g Auch für ben Winkel MAN = p welcher ben Unterschied ber geographischen kans gen der Derter M und N ausdrückt, sogleich

tang p = fin f - tang \( \lambda\)

Sober auch, wenn \( \delta\) nach der erstern Formel ges funden ist, sin \( \delta\): sin \( \tau=\) sin \( \lambda\): sin \( \tau=\)

$$\sin \rho = \frac{\sin \tau \, \sin \lambda}{\sin \delta}.$$

Winkel ATM = & ben Winkel

$$RMT = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2} \text{ fin } \delta \cdot i$$

=  $(n^2 - i)$  fin  $\zeta$  fin  $\delta$ , i (X, VI.) ab, so hat man in dem Dreyecke RTM den Winkel MRT oder ARM =  $\eta = \zeta - i$ .

XVII. Dies giebt 
$$\zeta - i = \delta - (n^2 - i) \sin \zeta \sin \delta$$
, i  $\zeta - \delta = \frac{\zeta - \delta}{1 - (n^2 - i) \sin \zeta \sin \delta}$  oder weil  $n^2 - i = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}$  eine sehr geringe

Große ift, ohne merflichen Rebler

i = ( $\beta - \delta$ ) (1 + ( $n^2 - 1$ ) fin  $\beta$  fin  $\delta$ ) Alfo  $\beta$ —i oder  $\eta = \delta$ —( $\beta$ — $\delta$ ) ( $n^2$ —1) fin $\beta$  fin $\delta$ d,  $\beta$ , die Ergänzung der geographischen Breite des Orts M zu 90° oder

in welchem Ausdrucke der Winkel & aus (XV) bekannt ift, und fin &, fin &, nur fur die Grade und Minuten genommen zu werden brauchen.

XVIII. In diesen für die geographische tange und Breite eines Orts wie M gefundes nen Formeln muffen die Groffen α, γ in dem

tangenmaaße ausgedrückt werden, nach welt chem die Coordinaten ML, NL, (XII.) auf dem trigonometrischen Reze des vermessenen tandes berichnet worden sind. Gesett ML und NL sepen in Pariser Toisen gegeben, so ist nach den neuesten französischen Gradmessungen a = 3271226 Toisen;  $\gamma = 3261432$  T. (M. s. Puissant Tr. des Géodesse p. 136), also and  $\gamma = 334:333$  zu sezen.

Sierans sindet sich teicht  $\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2} = \frac{1}{167}$  einige Decimalen im Nenner 167 weggelassen, auf die man doch nicht mit Sicherheit rechnen kann, indem etwas andere Werthe für  $\alpha$  u.  $\gamma$  y. B. Hr. Prof. Bohnen bergers (v. Zachs M. Corr. Jul. 1802. S. 25) auch auf den angesührten Bruch Einstuß haben. Ja nach ka Places Bestimmungen, nach welchen das Arenverhältniß  $\gamma$  :  $\alpha$  der ele liptischen Meridiane sür die meisten Orte der nördlichen Halbkugel unserer Erde vielmehr = 149: 150 geseht werden könnte, würde sogar  $\alpha^2 - \gamma^2$ 

 $\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2} = \frac{150^2 - 149^2}{150^2} = \frac{2}{75,2}$ 

also fast noch einmahl so groß als obiger Werth ausfallen.

ueber bie verschiedenen Berhaltniffe von α: γ f. m. umständlich in v. Zachs M. Corr. Marz 1811, S. 255. 2c.

Et 2

XIX:

XIX, Man sieht hieraus, was für eine misliche Sache es ift, aus geographischen Messungen, die Längen und Breiten, so gernau als der Ustronom sie jeht vers langt, ableiten zu wollen, wenn nicht ges nau zuvor bestimmt worden ist, was für ein Arenverhältnist ben den elliptischen Meridianen des trigonometrisch aufgenommenen landes zum Grunde gelegt werden muß, weil doch nun einmahl unsere Erde nicht genau ein Umdrezhungssphäroid senn soll, den bestiefe dies dessen Meridiane alle einerlen Ellipse bils deten.

XX. Rimmt man indessen eines von ben angeführten Verhaltnissen an, nach welchen a<sup>2</sup> — 7<sup>2</sup> doch immer nur ein kleiner Bruch ift,

fo ergeben sich in ben gefundenem Formeln noch allerlen Abkürzungen, zumahl wenn die Cordinaten ML, NL in Bogen verwandelt, etwa nur ein zoder einen ganzen Grad auss machen würden, in welchem Falle man aus den angeführten Formeln sehr leicht z. B. de Lambre'sche (v. Zachs M Corr. Jul. 1804. S. 66.) und andere ähnliche ableiztet, womit ich mich aber hier nicht weiter beschäftigen will, da es mir zwecknäsiger scheint, den Weg für die Berechnung der georgraphischen Längen und Breiten gezeigt zu haben

haben, wenn jene Coordinaten felbst feinige Grade, von dem mittelsten Chartenmeridiau angerechnet, betragen. Auch erleichtern die von andern angegebenen Abkürzungsformeln die numerische Berechnung um nichts erhebliches, zumahl wenn man ben den meinigen auf ges wisse constante Logarithmen Rücksicht nimmt, die sich dem Rechner bald darbieten werden.

215 9 41

Tafeln nach solchen Formeln z. B. in (v. Zachs M. Corr. Jul. 1803. S. 81.) scheinen mir die Rechnung auch nicht sehr abzutkürzen, und solche Tafeln gelten übrigens auch nur für ein gewisses Arenverhältnis a: y. Für ein anderes dergleichen zu berechnen, wäre zu weitläuftig.

KXI. Das richtige Arenverhältnis a: y für die Meridiane eines trigonometrisch aufges nommenen kandes, ließe sich zwar aus den Messungen selbst, in Verbindung mit einigen a ftronom isch bestimmten geographischen Breiten, ableiten, wozu obige Formeln in

welchen dann n2 - I ober a2 - 192 als eis

ne gefuchte Groffe angesehen werden mufte, leicht den Weg darbieten. Indessen haben auch diese Bestimmungen ihre Schwierigkeisten (M. f. v. Zachs M. Corr. März. 1811 S. 252.) und die Aussuhrung davon wurde bier

hier felbst zu umständlich senn, weswegen ich mich mit dem Bengebrachten begnügen will.

XXII. Mur muß ich in Rudficht ber Coordingten ML. NL noch folgendes bens bringen. Die Rigur ift fo beschaffen bag in derfelben des Orts N, deffen geographische Breite gegeben ift, Abstand vom Pole A = 3 groffer war, als des Orts M Abstand vom Dole = n. Fur M ift alfo in diefem Falle die Abseiffe NL als positiv zu betrachten (6. 362. XVIII.) (wie 3. B. ap fur ben Drt g auf Dem Rege (Fig. LXXX.)). Huch liegt hier M auf ber westlichen Seite von N; baber auch ML als positiv angesehn wird (6. 362. XVIII) für diefen Kall wird alfo in bem fpharifchen Drepect MNL (XIV) ber Reigungswinfel MNL = T fpißig. Ware dagegen M zwar weft: lich von N. alfo ML positiv, aber & fleiner als n. mithin die Abfeiffe NL negativ, fo murbe der Winkel MNL = T ftumpf, wie fich auch aus der dafur gefundenen Formel

 $\tan \sigma = \frac{\tan \mu}{\sin \nu}$ 

ergiebt, in welcher jest  $\mu = \frac{NL}{NT}$  206264 negativ, also tang  $\tau$  negativ, mithin  $\tau$  stumpf wird. Hiernach wird man sich denn auch ben der Berechnung des Winkels  $\delta$  nach der Forsmel

mel (XV.) zu richten haben, in welcher ale: dann col & negativ zu nehmen ist, wenn F stumpf ist.

XXIII. Auf diese Weise wird es in sedem andern besondern Falle durch Betrachtung des sphärischen Drepecks MNL nicht schwer senn zu entscheiden, wie der darin vorsommende Winkel  $\tau$  spiß oder stumpf zu nehmen senn wird. Der Bogen oder Winkel  $\lambda$  wird vers möge der Formel (XIV.) nach der Natur der Cosinusse von positiven oder negativen Winzeln  $\mu$  oder  $\nu$ , allemal spisig, wie auch ohnes hin klar ift, da  $\lambda$  immer nur ein kleiner Bosgen oder Winkel ist.

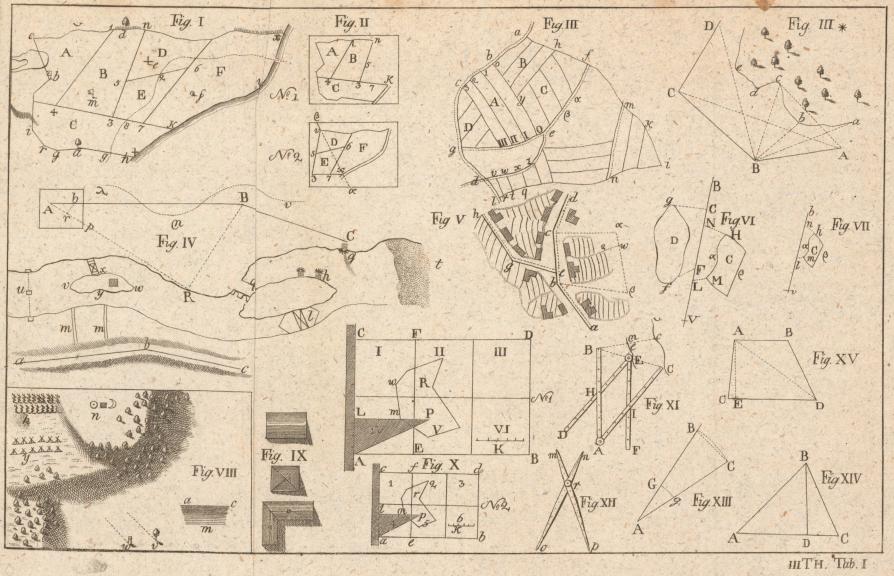
Die bisherige Nechnung durch ein Zahlens benspiel zu erläutern, halte ich für ganz übersflussig, da die Formeln für denjenigen der sie zu astronomischen Bestimmungen gebrauchen will, so einfach sind, daß die numerische Besrechnung nach denselben keiner weitern Erläuterrung bedarf.

Uns allem was ben Gelegenheit dieser Untersuchung bengebracht worden ist, folgt, daß
es eine vergebliche Erwartung ist, wenn man
glaubt, daß geographische Längen und Breiten
aus trigonometrischen Operationen abgeleitet,
mit astronomischen Bestimmungen berselben

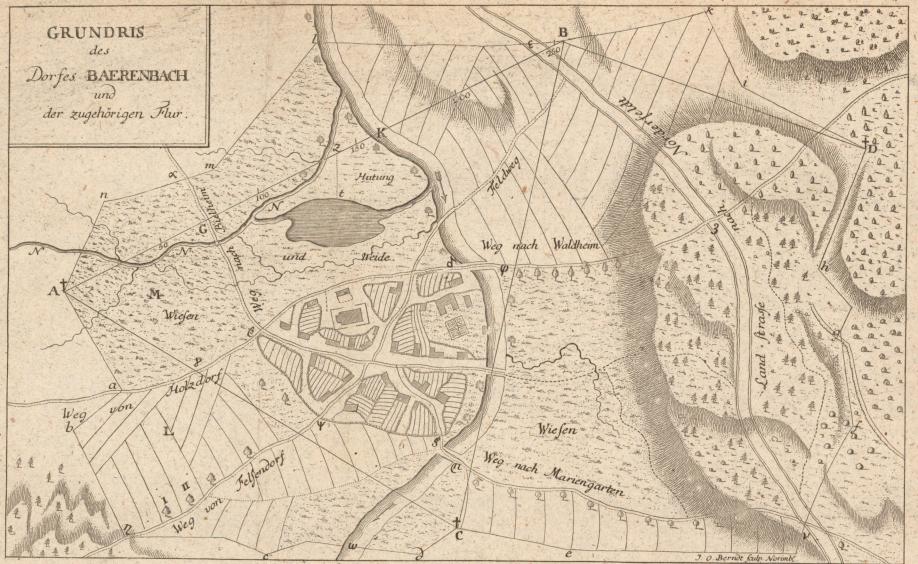
vollkommen übereinstimmen wurden. Abweischungen von 8: 10 Secunden können schon allein wegen (XIX) statt finden, wenn man auch nicht die kocalattractionen berücksichtigen will, wodurch die astronomischen Beobachtungen oft unsicher werden. (v. Z. Monatl. Corr. 1811. Marz. S. 253). Für den gewöhnlischen Gebrauch in der Geographie sind jene Absweichungen unerheblich.

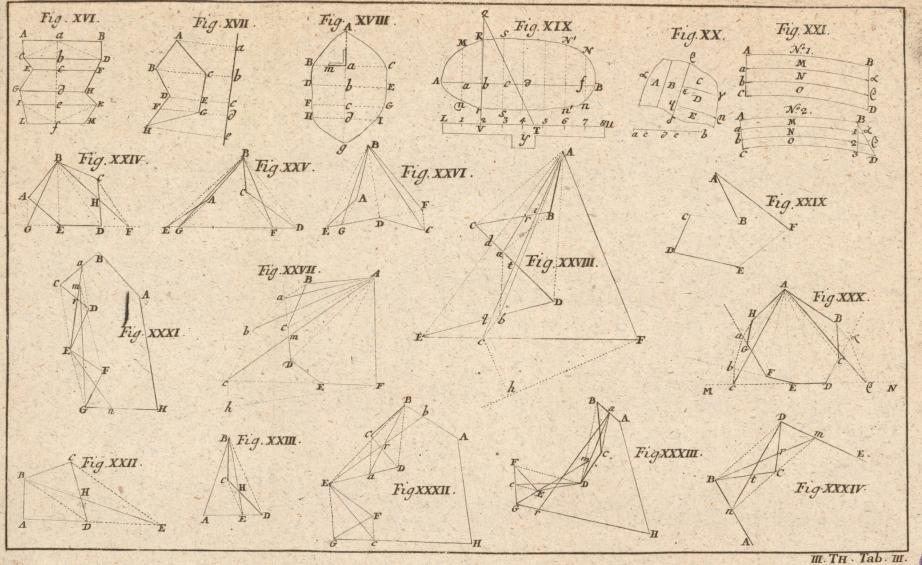
Umständlich über alle biese Untersuchungen siem, in de Lambre methodes analytiques pour la determination d'un arc du Meridien. Puissant traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement à Paris 1307, und dessen Traité de Géodesie, ou Exposition des methodes astronomiques et trigonometriques appliquées, soit à la mésure de la terre, soit à la confection du Canevas des Cartes et des Plans. das 1805. Suanbergs Werf Exposition des operations faites en Laponie etc. wovon man einen Auszug in v. Zachs Monatl. Corresp. Nov. 1805 und in den solgenden Hesten sindet.

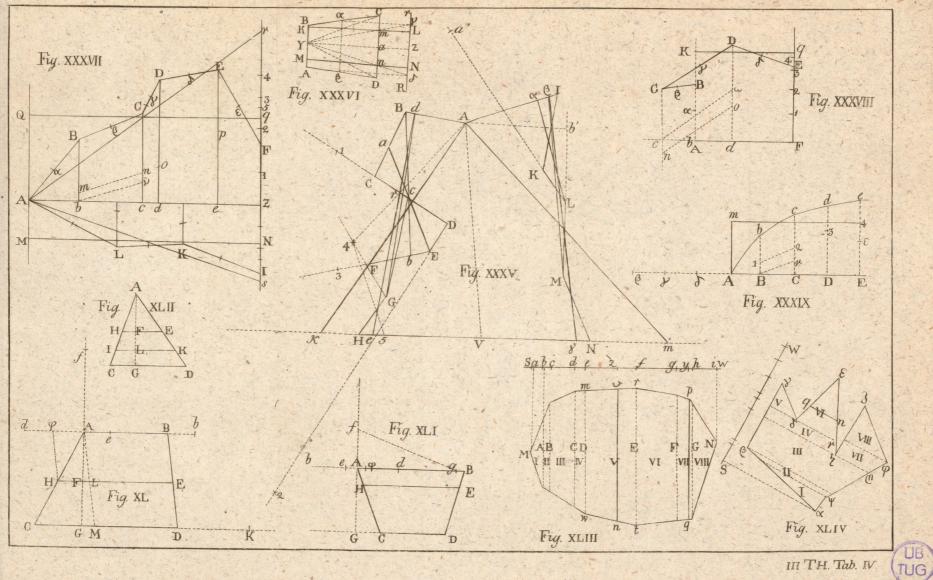


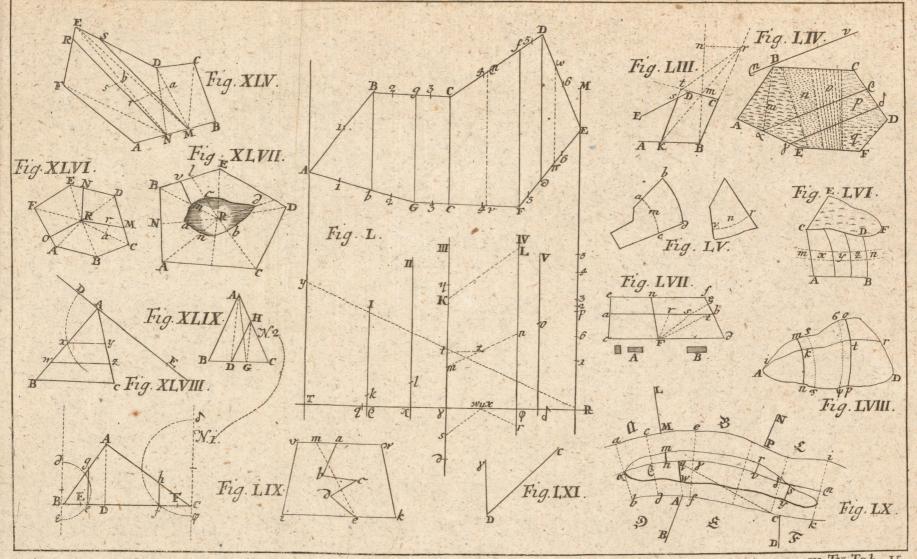


TUG TUG



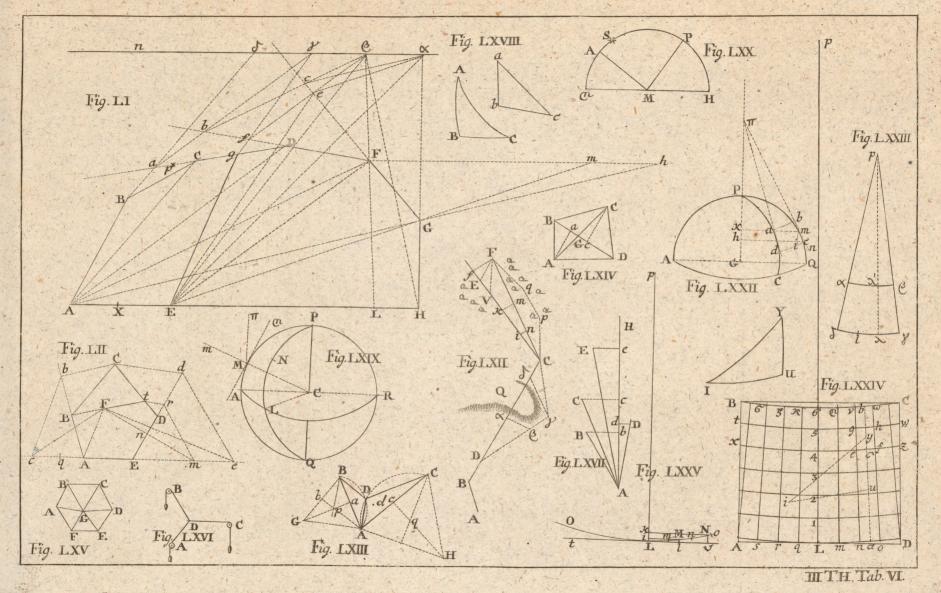




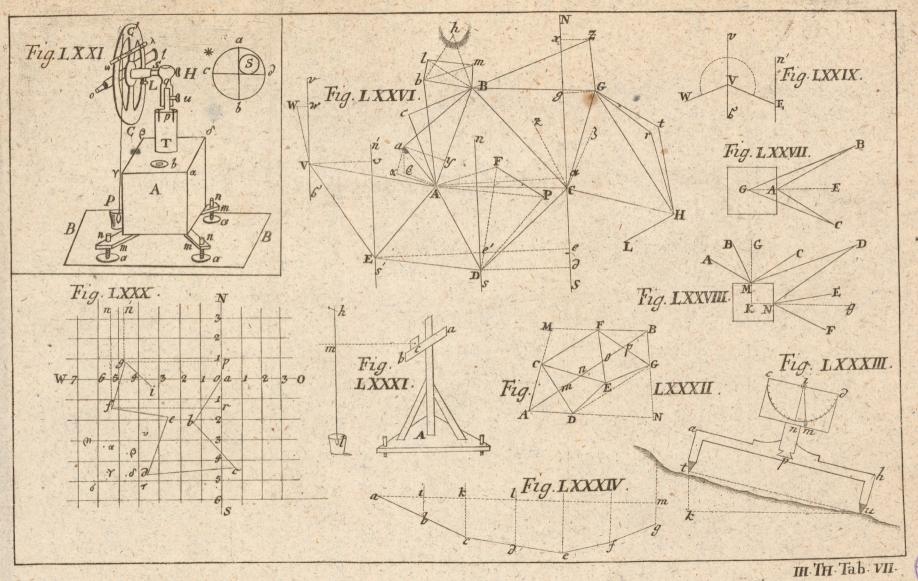


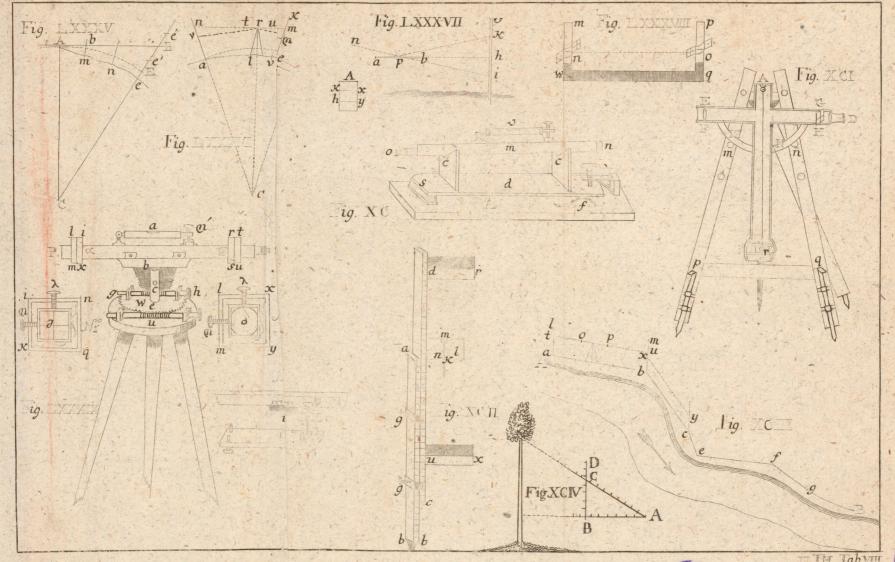
III. TH. Tab. V.

(Ing)









Ti4. Tab.VIII

