XXIX. Kapitel.

Theilung der Felder durch bloße Zeichnung.

§. 319. Aufg.

Ein vorgegebenes Dreyeck (Fig. XLVIII.) BAC dergestalt zu theilen, daß die Theilungslinie XY mit einer gegebenen Seite BC parallel gehe, und des Stücks AXY Inhalt sich zum ganzen Dreyeck ABC verhalte = p : P.

Aufl. I. Man setze durch die der Seite BC gegenüber liegende Spitze A eine Linie DE senkrecht auf AB, und mache AE = AB.

II. Man suche eine Linie = x, die sich gegen AB verhält = p : P.

Man messe also AB nach einem verjüngten Maasstabe, und schließe nach der Regel detri

$$P : p := AB : x.$$

III. Das gefundene x trage man nach dem verjüngten Maasstabe von A nach D, so ist wegen AE = AB

$$AD : AE = p : P.$$

IV. Ueber DE beschreibe man einen Halbkreis, welcher AB in X durchschneidet, und ziehe endlich XY mit BC parallel, so wird die Theilung geschehen seyn.

Bew. Weil XY parallel mit BC, so ist das Dreyeck AXY dem ABC ähnlich; mithin

$\Delta AXY : \Delta ABC = AX^2 : AB^2 = AX^2 : AE^2$.

Nun ferner $AD : AX = AX : AE$ also

$$AX^2 = AD \cdot AE.$$

Mithin $\Delta AXY : \Delta ABC = AD \cdot AE : AE^2$

$$= AD : AE.$$

$$= p : P.$$

Zus. I. Soll ferner das Stück XYWZ sich zum Inhalte des ganzen Dreyecks $= p' : P$ verhalten, und auch WZ mit BC parallel gehen, so schneide man von dem ganzen Dreyecke BAC den Triangel WAZ ab, dessen Inhalt sich zum ganzen BAC verhalte $= p + p' : P$, wobey man denn wie vorhin verfährt.

Solchergestalt kann man durch Parallelen mit der Seite BC, das ganze Dreyeck BAC dergestalt theilen, daß, wenn die Fläche desselben P heißt, die Stücke AXY, XYWZ, WZBC u. s. w. nach der Ordnung die Inhalte p, p', p'' u. s. w. bekommen.

Zus.

Zuſ. II. Ein Dreyeck BAC (Fig. XLIX. Nro. 1.), deſſen Höhe AD iſt, dergeſtalt zu theilen, daß die Theile ſich wie die Stücke BE, EF, FC der Grundlinie BC verhalten, und die Theilungslinien mit der Höhe AD parallel laufen, ſo ziehe man durch B und C, auf BC die ſenkrechten εd, $\varphi\delta$; Mache $Bd = BD$, $C\delta = CD$, und trage das Stück BE, welches linker Hand AD liegt, von B nach ε, hingegen das Stück CF, welches ſich rechter Hand AD befindet, von C nach φ, beſchreibe über εd, $\varphi\delta$ Halbkreiſe, welche BC in e und f durchſchneiden, und ziehe eg, fh mit AD gleichlaufend, ſo wird die Theilung geſchehen ſeyn.

Denn vermöge der vorhergehenden Aufgabe iſt

$$\Delta Beg : \Delta BDA = B\varepsilon : Bd$$
$$= BE : BD$$

Nun iſt aber auch

$$\Delta BDA : \Delta BAC = BD : BC$$
alſo $$\Delta Beg : \Delta BAC = BE : BC$$
Ebenſo $$\Delta Cfh : \Delta BAC = CF : BC$$

Es verhalten ſich alſo die Dreyecke Beg, Cfh, zum ganzen BAC, wie BE, CF zur Grundlinie BC; Es folgt daraus von ſelbſt, daß

daß auch das mittlere Stück eghf sich zu BAC = EF : BC verhalten muß.

Es ist also das ganze Dreyeck BAC durch Linien ge, hf, die auf BC senkrecht stehen, verlangtermaaßen eingetheilt.

Zus. III. Der Beweis dieses Verfahrens (Zus. II.) gründet sich nicht darauf, daß AD auf der Grundlinie BC senkrecht stehe. Man könnte durch eben das Verfahren die Theilung so bewerkstelligen, daß die parallelen Theilungslinien mit einer durch A unter einem gegebenen Winkel gegen die Grundlinie BC geneigten Linie AD parallel liefen.

§. 320. Aufgabe. Aus einem gegebenen Punkt D, in der Seite BC eines Dreyecks ABC (Fig. XLIX. Nro. 2.), eine gerade Linie DH zu ziehen, welche das Dreyeck in einem gegebenen Verhältniß m : n theile.

Aufl. I. Man theile BC bey G so, daß BG : GC = m : n.

II. Durch D ziehe man DA, und durch G, GH mit DA parallel, bis solche in eine der Seiten BA, AC, bey H einschneide, ziehe hier-

hierauf DH, so wird die Theilung geschehen seyn, so daß

$$BDAH : \triangle DHC = m : n.$$

III. Bew. Man ziehe GA, so hat man folgende Vergleichung zwischen den in der Figur vorkommenden Dreyecken.

Wegen der Parallelen DA, GA ist erstlich

$\triangle GHA = \triangle GHD$ also

$GHA + GHC = GHD + GHC$ oder

$AGC = DHC$;

Mithin $ABC : AGC = ABC : DHC$

$ABC - AGC : AGC = ABC - DHC : DHC$

oder

$BAG : AGC = BDAH : DHC$;

Aber $BAG : GAC = BG : GC = m : n$.

Also auch

$BDAH : DHC = m : n$.

§. 321. Aufgabe. Eine jede vorgegebene Figur ABCDEFG (Fig. L.) durch bloße Zeichnung, vermittelst einer Linie $\mu\nu$ dergestalt zu theilen, daß das Stück ABC$\mu\nu$GA einen gegebenen Inhalt = P habe, und die Theilungslinie $\mu\nu$ mit einer angenomnommenen Richtung EM parallel laufe.

Aufl. I. Durch die beyden äussersten Punkte der Figur, oder hier durch A und E, ziehe man RE, AT der gegebenen EM parallel, und verwandele die Figur, nach (§. 303.), in ein Rectangel, dessen Grundlinie dem Abstande der beyden äussersten Parallelen AT, ER gleich ist.

II. Damit die vorgegebene Figur selbst nicht mit vielen Linien, die zur Verwandlung und Theilung nöthig wären, verunziert werde, so ziehe man ausserhalb der Figur, in zureichender Entfernung, TR senkrecht auf AT.

So wäre also erstlich TR die Grundlinie des Rectangels (I.).

III. Um nun das Rectangel selbst zu erhalten, so ziehe man mit RM, durch alle Winkelpunkte der Figur, die Parallelen Bb, Gg, Cc u. s. w., und bemerke auf TR die Punkte β, χ, γ u. s. w., wo die Richtungen βI, χII, γIII u. s. w., als Verlängerungen der erwähnten Parallelen Bb, Gg rc. rc., in TR einschneiden.

IV. So sind Tβ, $\beta\chi$, $\chi\gamma$ u. s. w. die Weiten der Parallelen von einander.

V. Man halbire nach der Ordnung AB, Ab bey 1; Bg, bG bey 2; gC, Gc bey 3 u. s. w.

So sind der Ordnung nach, die Entfernungen

von 1 nach 1 $= \frac{1}{2}$ Bb

von 2 nach 2 $= \frac{Bb + Gg}{2}$

von 3 nach 3 $= \frac{Gg + Cc}{2}$

u. s. w.

die mittlern arithmetischen Proportionalen zwischen jedem Paare nächst aufeinander folgeuder Parallelen der Figur.

VI. Diese mittlern Proportional-linien trage man nun der Ordnung nach längst RM von R, nach 1, von R nach 2 u. s. w. Man ziehe von T nach 1 eine gerade Linie, welche β I in k durchschneidet, und nun ferner durch k die Linie k l mit T 2 parallel u. s. w., so erhält man nach und nach die Punkte k, l, m, n, o, p; und Rp wird die Höhe des Rectangels (I.). Auch sind nach und nach die Rechtecke

TR . βk = Δ ABb

TR . χl = Δ ABb + Trap. BbGg

TR . γm = Δ ABb + Tr. Bb Gg + Tr. Gg Cc.

VII. Gesetzt nun, von der Figur solle ein Stück Fläche = P abgeschnitten werden.

Man drücke den Inhalt P auch durch ein Rechteck aus, dessen Grundlinie = TR wäre, d. h. man dividire P mit TR, so kommt die Höhe des Rectangels $= \frac{P}{TR}$, die ich = h nennen will.

VIII. Diese Höhe fasse man mit dem Zirkel und vergleiche sie mit einer von den Linien βk, χl, γm u. s. w.

Gesetzt, man fände γm zunächst kleiner, als h; so wird also der gegebene Inhalt P, oder das Rectangel TR . h, zwischen die Rectangel TR . γm und TR . φn fallen, d. h. die Theilungslinie $\mu\nu$ wird in der Figur zwischen die Parallelen Cc und Ff zu liegen kommen.

Um also die Lage von $\mu\nu$ zu finden, so muß man an Cc ein Trapezium Cc$\mu\nu$ setzen, dessen Inhalt $= P - TR . \gamma m = TR . h - TR . \gamma m = TR . (h - \gamma m) = p$ (§. 308.)

IX. Dieses muß man nach (§. 309.) bewerkstelligen, weil hier Cc kleiner ist als Ef.

Man trage also von γ nach t die Größe h; so ist das Stück $mt = h - \gamma m$.

Man

Man mache $\varphi r = mt$, und halbire $\gamma\varphi$ bey w. Lege an w und r ein Parallel-lineal, und ziehe mit wr durch R eine Parallele Ry; so ist $w\varphi : \varphi r = TR : Ty$ oder

$$\tfrac{1}{2}\gamma\varphi : h - \gamma m = TR : Ty$$

$$\text{Also } Ty = \frac{2 . TR . (h - \gamma m)}{\gamma\varphi}$$

X. Diese solchergestalt gefundene Ty ist der Werth m (§. 308.), weil nemlich die

$$\begin{array}{r|c|} \text{dortigen } p & c \\ \text{hier } TR\,(h - \gamma m) & \gamma\varphi \end{array}$$

bedeuten. $\gamma\varphi$ ist nemlich der beyden nächsten Parallelen Cc, Ff Abstand.

XI. Man mache nun $\gamma\eta = Ty$

$\gamma K = Cc$ (= a §. 308.)

$Kd = \varphi L = Ff$ (= b das.

so ist $\gamma d = b - a$.

Zwischen $\gamma\eta = Ty = m$ (X.) und $\gamma d = b - a$ suche man eine mittlere geometrische Proportional-linie γq.

Man erhält sie, wenn man über ηd einen Halbkreis beschreibt, der TR in q durchschneidet.

Man

Man fasse demnächst $Kq = \surd (K\gamma^2 + \gamma q^2) = \surd (a^2 + \frac{1}{2}(b - a) m)$, trage sie von K nach s, und ziehe sx parallel mit KL, so ist γx der Abstand der gesuchten Theilungslinie $\mu\nu$, von der nächst kleinern Parallele Cc (§. 309.). Wenn man daher durch x mit RM die Parallele $\mu\nu$ ziehet, so ist das Stück ABC$\mu\nu$GA dem verlangten Inhalte P gleich.

XII. So ist also hier eine der brauchbarsten Aufgaben bey der Felder-theilung, durch bloße Zeichnung aufgelöset. Daß die bisherige Konstruction weniger Zeit erfordert, als die arithmetische Auflösung davon, (§. 311.) wird ein jeder bey der Probe selbst wahrnehmen.

XIII. Wenn mehrere Theile durch Linien, welche mit MR parallel laufen, von der Figur abgeschnitten werden sollen, wenn z. E. ferner das Stück zwischen $\mu\nu$ und $\omega\pi$ den Inhalt P' haben sollte, so weiß man, daß von A angerechnet, nur die Größe P+P' von der ganzen Figur abgeschnitten werden darf; wobey denn nach der bisherigen Auflösung verfahren wird.

XIV. Bisher war Cc kleiner, als Ff (IX.). Die Konstruction von IX — XII. wird nach (§. 309. Zus. II.) abgeändert, im Falle die Parallele Cc größer, als Ff wäre.

XV. Wenn Cc von Ff nur um eine geringe Größe unterschieden wäre, so dürfte man nur durch den Punkt t (IX) mit TR eine Parallele tz, bis an die gerade Linie mn, und dann durch den Punkt z mit RM, die parallele Scheidungslinie $\mu\nu$ ziehen. Den Beweis davon wird ein jeder leicht selbst finden.

Anmerkung.

I. Daß die gerade Linie TR, welche bey der Division (vorherg. §. VII.) gebraucht wurde, nach dem Maasstabe, nach welchem die Figur ABCDEFG verzeichnet, und der Inhalt P angegeben worden ist, gemessen werden müsse, bedarf wohl kaum einer Erinnerung.

II. Es wird übrigens die Bestimmung der Scheidungslinie $\mu\nu$ desto sicherer und richtiger ausfallen, je nach einem größern verjüngten Maasstabe die ganze Figur entworfen ist. Ueberhaupt ist dies ein für allemal zu merken, daß bey allen Theilungen, die auf dem Papiere vorgenommen werden, die Figur niemals zu klein gezeichnet seyn muß.

III. Die Anwendung dieser Aufgabe, auf die Theilung der krummlinigten Figuren, bedarf wohl keiner besondern Erläuterung. Wenn ich dabey annehme, daß man die Parallelen

Bb, Cc u. s. w. ziemlich nahe neben einander gezogen habe, so kann man meistens nur nach (vorhergeh. §. XV.) die Lage der Scheidungslinie $\mu\nu$ bestimmen, ohne daß ein für die Ausübung beträchtlicher Fehler daraus entstände.

IV. Begreiflich kann man die ganze Konstruction, vom Xten Absatze des vorhergehenden §es angerechnet, ersparen, wenn man den Abstand der Scheidungslinie $\mu\nu$ von der Parallele Cc berechnet, nach (§. 308.); die zur Berechnung nöthigen Stücke giebt der erwähnte Xte Absatz an. Die Zeichnung vom ersten Absatze des vorhergehenden §es bis zum Xten, dienet, das Trapezium CcFf, in welches $\mu\nu$ fallen muß, zu finden, ohne daß man nöthig hätte, alle einzelnen Trapezien ABb, BbGg u. s. w. würklich zu berechnen, wie im 311ten §., welches allerdings bey Theilungen der Figuren, eine Ersparung der Zeit ist.

§. 322. Lehrsatz. Es sey (Fig. LI. Tab. VI.) ABCDFGH eine willkührliche Figur. Man verwandle sie nach (§. 296.) in ein Dreyeck, dessen Grundlinie AH ist, und die Spitze in die Verlängerung der an der Grundlinie liegenden Seite HG falle, d. h. man ziehe bis an die verlängerten Seiten DC, FD u. s. w. mit den Diagonalen AC, AD, AF, AG u. s. w. nach der Ordnung die Parallelen Ba, ab, bc, cα, und finde solchergestalt die Spitze des Dreyecks bey α. Durch α sey αn mit HA parallel gezogen. — Die Verlängerungen von Ba, ab, bc schneiden αn bey δ, γ, β; Es sey nun E ein willkührlicher Punkt innerhalb AH, und von E gedenke man sich nach den Winkelpunkten G, F u. s. w. nach der Ordnung gerade Linien gezogen; durch α ziehe man mit der ersten EG eine Parallele αe, bis an die verlängerte Seite GF: Ich behaupte, wenn man nun durch β und e eine gerade Linie βef bis an die verlängerte Seite FD ziehet; darauf ferner durch γ und f wieder eine gerade Linie γg u. s. w., so werde auch βe mit FE, γf mit DE u. s. w. parallel seyn.

Bew. I. Ich will erstlich darthun, daß βe mit FE parallel ist.

Man ziehe durch F die Linie Fh mit AH parallel, und verlängere AG, EG, bis solche bey h und m in Fh einschneiden.

So hat man das Dreyeck FEh;

Dieses vergleiche man mit dem Dreyecke βeα;

II. Weil eα parallel mit EG oder Em, und Fh parallel mit AH, oder mit $\alpha\beta$ gezogen

gen worden, so ist der Winkel $EmF = e\alpha\beta$. Könnte man nun erweisen, daß auch $Em:Fm = e\alpha:\alpha\beta$, so wäre das Dreyeck EFm dem $e\beta\alpha$ ähnlich; mithin müßte auch βe mit FE parallel seyn.

III. Um die erwähnte Proportion zu erweisen, so will ich erst verschiedene Winkel, die in den Vierecken $AFGE$, $\beta c e \alpha$ vorkommen, benennen, und mit einander vergleichen. Wobey man denn überlege, daß βc mit FA, αc mit GA, $\alpha\beta$ mit HA, und αe mit GE parallel sind.

IV. Man nenne also

$$\begin{aligned} FAG &= \beta c\alpha \text{ (III.)} &&= \lambda \\ GAE &= \beta\alpha c &&= \tau \\ AGE &= c\alpha e &&= \rho \\ AGF &= \alpha c e &&= \psi \end{aligned}$$

So ist auch $FhA = hAE = \tau$ (IV.) und $FmE = mhG + mGh = \tau + \rho$.

V. Dieses vorausgesetzt, hat man in dem Drenecke $c\alpha e$

$$\sin c\alpha e : ce = \sin \alpha c e : e\alpha;\ \text{also}$$

$$e\alpha = \frac{ce \sin \psi}{\sin \rho} \text{ (IV.)}$$

Auch $\sin c\alpha e : ce = \sin ce\alpha : c\alpha$; also

$$c\alpha = \frac{ce \sin(\rho + \psi)}{\sin \rho}.$$

VI. In dem Dreyecke $c\beta\alpha$
$\sin c\beta\alpha : c\alpha = \sin \beta c\alpha : \beta\alpha$

$$\beta\alpha = \frac{c\alpha \cdot \sin \lambda}{\sin(\lambda + \tau)}$$

$$= \frac{ce \sin(\rho + \psi) \sin \lambda}{\sin \rho \sin(\lambda + \tau)}. \text{ (V.)}$$

VII. Also aus (V. VI.)
$e\alpha : \alpha\beta = \sin \psi \sin(\lambda + \tau) : \sin \lambda \sin(\rho + \psi)$

VIII. In dem Dreyecke GFm ist der Winkel $GFm = AGF - GhF = \psi - \tau$.

Nun $\sin FmG : FG = \sin FGm : Fm$

$$Fm = \frac{FG \sin(\rho + \psi)}{\sin(\rho + \tau)} \text{ (IV.)}$$

IX. Ferner $\sin FmG : FG = \sin GFm : Gm$

$$Gm = \frac{FG \sin(\psi - \tau)}{\sin(\rho + \tau)} \text{ (VIII.)}$$

X.

X. Nun ist ferner in dem Dreyecke FAG

$$\sin FAG : FG = \sin AFG : AG$$

$$AG = \frac{FG \sin(\lambda + \psi)}{\sin \lambda} \text{ (IV.)}$$

XI. Und im Dreyecke AGE

$$\sin AEG : AG = \sin GAE : EG$$

$$EG = \frac{AG \sin \tau}{\sin(\rho + \tau)}; \text{ (IV.)}$$

$$= \frac{FG \sin(\lambda + \psi) . \sin \tau}{\sin \lambda \sin(\rho + \tau)}; \text{ (X.)}$$

XII. Mithin (IX. XI.)

$$Em = EG + Gm$$

$$= \frac{FG}{\sin(\rho + \tau)} \left(\frac{\sin(\lambda + \psi) \sin \tau}{\sin \lambda} + \sin(\psi - \tau) \right)$$

XIII. Also (VIII. XII.)

$$Em : Fm = \frac{\sin(\lambda + \psi) \sin \tau}{\sin \lambda} + \sin(\psi - \tau) : \sin(\psi + \rho);$$

$$= \sin(\lambda + \psi) \sin \tau + \sin \lambda \sin(\psi - \tau) : \sin \lambda \sin(\psi + \rho)$$

XIV. Aber aus (Trig. S. XII.) ist

$$\sin(\psi - \tau) = \sin \psi \cos \tau - \sin \tau \cos \psi$$
$$\sin(\lambda + \psi) = \sin \lambda \cos \psi + \sin \psi \cos \lambda$$

XV. Diese Werthe in (XIII.) substituirt, geben demnach

$$Em:Fm = \sin\psi(\sin\tau\cos\lambda + \sin\lambda\cos\tau) : \sin\lambda\sin(\psi+\rho)$$
$$= \sin\psi\sin(\lambda+\tau) : \sin\lambda\sin(\psi+\rho)$$

XVI. Hieraus erhält man endlich

$Em : Fm = e\alpha : \beta\alpha$; (XV. VII.)

Es ist mithin βe mit FE parallel (II.).

XVII. Es wird sich nun auch leicht erweisen lassen, daß γf mit DE parallel seyn müsse. Denn wenn man sich durch β, F die gerade Linie βL gedenkt, so erhellet, daß in Rücksicht des Punktes γ, die Linie βL das ist, was vorhin αH in Rücksicht des Punktes β war. — Weil also eben erwiesen worden, daß βe oder βf mit EF parallel ist, so wird man völlig nach ähnlichen Schlüßen erweisen können, daß auch γf mit DE parallel seyn müsse. Man darf nur überlegen, daß in dem Beweise für γf die Linien βL, FD, EF, βf, und die Vierecke $\beta\gamma b f$, $AEDF$ das sind, was im vorigen Beweise für βe, nach eben der Ordnung die Linien αH, GF, EG, αe, und die Vierecke $\alpha\beta c e$, $AEFG$ waren. So wird man demnach auch γf mit DE parallel finden.

Daraus würde nun weiter auch δg mit EC parallel bewiesen, vorausgesetzt, daß der Punkt g nicht

nicht zwischen C und D (wie hier der Fall ist), sondern in die Verlängerung von DC, zwischen C und a fiele u. s. w.

Daß also diese Schlüsse so lange fortgesetzt werden können, bis man, wie hier bey g, unmittelbar auf den Umfang der Figur stößt.

Geometrischer Beweis dieses Satzes.

Denen zu gefallen, die den eben geführten analytischen Beweis zu schwer finden mögten, und an dergleichen Betrachtungen nicht gewöhnt sind, will ich noch einen geometrischen beyfügen.

1. Nachdem man α e mit E G parallel gezogen hat, so sey nun auch e f mit E F gleichlaufend bis an die verlängerte F D, und ich werde erweisen, daß die Punkte e, f mit β in gerader Linie liegen müssen.

2. Es ist die ganze Figur ABCDEFGH $= \Delta AH\alpha$, oder, wenn man $A\beta$ und $H\beta$ sich gezogen vorstellet (um die Figur nicht mit zu vielen Linien zu verwickeln, so ziehe ich $A\beta$ nicht wirklich aus), $= \Delta AH\beta$.

3. Wenn man ferner durch β und F die gerade Linie βL ziehet, so ist

$\Delta AH\beta = \Delta AL\beta + \Delta HL\beta =$ ABDDFGH (2)

4. Weil

4. Weil Ba mit AC, ab mit AD, $b\beta$ mit AF parallel sind, so hat man auch die Figur $ABCDFL = \Delta AL\beta$ (§. 296.).

5. Also aus (3)

$$ABCDFGH - \Delta AL\beta = \Delta HL\beta \text{ oder } (4)$$
$$ABCDFGH - ABCDFL = \Delta HL\beta$$

d. i.

$$HGFL = \Delta HL\beta.$$

6. Man ziehe nun von e nach E eine gerade Linie, so ist hier das Viereck $EHGe = \Delta EH\alpha$ (weil nemlich αe mit EG parallel, und folglich $\Delta EGe = \Delta EG\alpha$, mithin $\Delta EGe + \Delta EGH = \Delta EG\alpha + \Delta EGH$), $= \Delta EH\beta$.

7. Oder $ELFe + HGFL = \Delta EL\beta + \Delta HL\beta$, d. i. $ELFe = \Delta EL\beta$ (5).

8. Oder $\Delta ELF + \Delta EFe = \Delta ELF + \Delta EF\beta$,

d. h.

$$\Delta EFe = \Delta EF\beta.$$

9. Nun ist ef mit EF parallel (1) mithin

$$\Delta EFf = \Delta EFe.$$

10. Folglich (9. 8.)

$$\Delta EFf = \Delta EFe = \Delta EF\beta.$$

11.

11. Da diese Dreyecke einerley Grundlinie EF haben, und einander gleich sind, so müssen ihre Spitzen β, e, f in einer einzigen geraden Linie liegen, und weil ef mit EF parallel ist (1), so liegt β in der Verlängerung dieser Parallele fe, oder wenn man durch β und e eine gerade Linie ziehet, so muß diese mit EF parallel seyn.

12. Auf eine ähnliche Art würde man auch erweisen, daß die gerade Linie γfg mit ED parallel seyn muß u. s. w.

Diese merkwürdige Eigenschaft der Punkte α, β, γ, δ u. s. w. führt nun auf eine sehr leichte Auflösung folgender Aufgabe.

§. 323. Aufgabe. Ueber der Linie AH befinde sich eine Figur ABCDFGH, man soll vermittelst gE, ein Stück gDFGHE von der ganzen Figur abschneiden, welches sich gegen die Figur verhalte, wie HE : HA.

Aufl. I. Man verwandele nach (§. 296.) die ganze Figur, wie in voriger Aufgabe, in den Triangel AHα.

II. Man gedenke sich nun das Stück EgDFGH auch in einen Triangel, dessen Grundlinie EH wäre, verwandelt.

Man

Man würde nemlich g f mit E D, f e mit E F, e α mit E G nach der Ordnung parallel ziehen, und so für das erwähnte Stück das Dreyeck E H α bekommen.

III. So wird man nun leicht umgekehrt sehen, daß man den Punkt g, durch welchen die Theilungslinie g E gehen würde, dadurch fände, daß man α e mit E G; e f mit E F, und f g mit E D parallel zöge. — Die Parallelen nemlich so lange fortsetzte, bis man, wie bey g, unmittelbar auf den Umfang der Figur stiesse.

IV. Da aber das Ziehen der Parallelen etwas beschwerlich ist, so kann man, vermöge der im vorigen Lehrsatze bewiesenen Eigenschaft der Punkte α, β, γ u. s. w., kürzer auf folgende Art verfahren.

Man ziehe erstlich α e mit E G parallel. — Nun aber, durch β und e, die gerade Linie β f, bis an die Verlängerung von F D, hierauf durch γ und f abermals die gerade Linie γ g, bis an die Verlängerung von D C u. s. w. Dies Verfahren setze man so lange fort, bis man, wie hier schon bey g geschiehet, unmittelbar auf den Umfang der Figur kömmt, so wird E g die gesuchte Theilungslinie seyn.

Zus. I. Es erhellet, daß man solchergestalt mit äusserster Bequemlichkeit, durch Hülfe

der

der Punkte α, β, γ u. s. w. (§. 323.), die Figur in so viel gleiche Theile theilen kann, als man verlangt. Denn das Verhältniß EH : HA kann seyn, welches man will.

Zus. II. Wäre der Inhalt des Stückes EgHG = p, der ganzen Figur = P, so müßte man EH : HA = p : P machen, welches sich allemal durch den verjüngten Maasstab bewerkstelligen läßt.

Zus. III. Die Theilungslinien, wie gE, stossen solchergestalt alle an die gegebene Seite AH der Figur, und so ist die Aufgabe (§. 314.) durch bloße Zeichnung bewerkstelligt.

Anmerkung.

über die Punkte α, β, γ u. s. w., wenn die Figur sehr einwärts gehende Winkel hat.

§. 324. In diesem Falle können nach (§. 296.) die Linien, wie Ba, ab, bc, in deren Verlängerungen die Punkte δ, γ u. s. w. liegen, unterweilen entweder gar nicht in die verlängerten Seiten DC, FD u. s. w. einschneiden, oder die Punkte a, b, c u. s. w. können so weit ausserhalb der Figur fallen, daß die Figur selbst nach (§. 296.) gar nicht in ein Dreyeck verwandelt werden könnte, sondern die Verwandwandlung nach (§. 297.) vorgenommen werden müßte, in welchem Falle aber offenbar auch die Punkte β, γ, δ unbestimmt bleiben. Um sie aber dennoch zu finden, und die Figur nach Verhältnissen, die man längst H A abgetragen hat, bequem theilen zu können, so verfahre man auf folgende Art.

Man nehme innerhalb A H einen Punkt E nach Gefallen. — Da nun das Dreyeck A H α, mithin auch der Punkt α, gefunden wird, man mag die Verwandlung nach (§. 296.), oder nach (§. 297.) vornehmen, so ziehe man durch α mit E G eine Parallele α e, bis an die verlängerte Seite G F; durch e mit E F wieder eine Parallele e f, bis an die verlängerte Seite F D; verlängere hierauf e f bis an α n, so findet sich der Punkt β. Eben so der Punkt γ, wenn man durch f mit E D eine Parallele f g ziehet, und sie aufwärts verlängert u. s. w. Den Punkt δ würde man aber jetzt nicht finden, weil man bey g schon auf den Umfang der Figur gekommen ist.

Um ihn zu bestimmeu, muß man einen andern Punkt X, der näher bey A liegt, als der zuerst angenommene E, zu Hülfe nehmen, wobey man denn nur in Ueberlegung zu ziehen hat, daß eine gerade Linie, die man sich durch γ und D gezogen vorstellet, in Rücksicht des Punktes δ

und

und des Umfanges A B C D, eben das ist, was vorhin die gerade Linie durch α und G, in Absicht des Punktes β, und des Umfanges A B C D F G war; Um also δ zu bestimmen, so ziehe man jetzt durch γ mit X D eine Parallele, bis an die verlängerte Seite D C, wo sie bey p einschneide. Nun durch p eine Parallele mit X C, so wird sie in den Punkt δ einschneiden. Auf diese Art kann man also durch willkührlich angenommene Punkte, wie X und E, die zur Theilung der Figur erforderlichen Punkte β, γ, δ u. s. w. finden, wenn man gleich die Verwandlung der Figur in ein Dreyeck, nach (§. 297.), vorzunehmen genöthigt wäre.

§. 325. Aufgabe. Eine Figur ABCDE (Fig. LII.) so zu theilen, daß alle Theilungslinien nach einem willkührlichen, innerhalb der Figur liegenden Punkt F zulaufen.

Aufl. I. Man verwandele die Figur erst in ein Dreyeck, dessen Spitze bey F, und die Grundlinie längst einer Seite der Figur, z. E. längst A E, falle.

II. Um dieses zu leisten, verlängere man vorher alle Seiten der Figur, ausser den beyden B C, C D, die hier dem Punkte F gegenüber liegen.

III. Mit F B ziehe man C b, und mit F A die Linie b c parallel.

IV. Eben so mit F D die Parallele C d, und mit F E die Parallele d e, so wird das Dreyeck c F e der vorgegebenen Figur gleich seyn, wie sich leicht aus dem bisherigen herleiten läßt.

V. Gesetzt nun, von der Figur solle ein Stück abgeschnitten werden, welches sich zur ganzen Figur verhielte, wie p : P.

VI. Man suche zu P, p, und der Grundlinie c e des Dreyecks (IV.), eine vierte Proportional-linie, und trage sie auf c e, z. E. von A bis m, so wäre das Dreyeck A F m dem von der Figur abzuschneidenden Stücke gleich.

VII. Von diesem Dreyecke liegt aber ein Stück E n m ausserhalb der Figur.

Um ès in die Figur hinein zu bringen, so muß man, nach der bisher gelehrten Methode, den Punkt m an den Umfang der Figur reduciren.

Man ziehe also mit F E durch m eine Parallele m r bis an die verlängerte E D, und durch r mit F D wieder eine Parallele r t. Weil hier r t unmittelbar an den Umfang der Figur stößt, so wird die gezogene F t das Stück A F t D E = dem Dreyecke A F m = dem gegebenen Inhalte (V.) abschneiden.

Zus.

Zus. I. Wäre die vierte Proportionallinie (VI.) größer, als Ae, daß also m über e hinausfallen würde, so muß man solche längst ce so tragen, wie qm anzeigt, und hierauf die Punkte q und m immer von einer verlängerten Seite auf die nächstfolgende reduciren, wie in (VII.), bis man auf den Umfang der Figur kommt.

Zus. II. Die bisherige Auflösung gilt auch, wenn die Figur einwärts gehende Winkel hat. Nur muß man, im Falle die Verwandlung der Figur in ein Dreyeck nach dem 296sten §. nicht angienge, vorher nach (§. 297.) die einwärts gehenden Winkel weggeschafft haben.

§. 326. Aufg. Von einer Figur ABCDE u. s. w. (Fig. LIII. Tab. V.) ein beliebiges Stück abzuschneiden, ohne daß man nöthig hat, die ganze Figur selbst vorher in einen Triangel zu verwandeln.

Aufl. I. Der abzuschneidende Inhalt heiße p; und man setze, der verjüngte Maasstab, nach welchem die Figur auf dem Felde gezeichnet worden ist, sey gegeben. Dieses wird bey gegenwärtiger Aufgabe unumgänglich erfordert.

II. Man

II. Man setze, die Theilungslinie Ks solle durch den Punkt K der Seite AB gehen.

III. Man verwandele den gegebenen Inhalt p in ein Dreyeck, dessen Grundlinie = KB, und die Spitze längst der an KB zunächst liegenden Seite BC falle.

IV. Die Höhe dieses Dreyecks wäre also $= \frac{2\,p}{KB}$, wo man KB nach dem verjüngten Maasstabe (I.) gemessen haben muß.

V. Diese berechnete Höhe trage man senkrecht auf KB von B bis n, und ziehe nr parallel mit AB bis an die verlängerte BC, so wird das Dreyeck KBr den gegebenen Inhalt p haben.

VI. Von diesem Dreyecke liegt nun das Stück mrC ausserhalb der Figur.

Um es in die Figur hinein zu bringen, so reducire man den Punkt r an den Umfang der Figur, indem man rt mit KC, und ts mit KD parallel ziehet, so ist, wenn man Ks ziehet, das Stück KsDCB = dem Dreyecke KrB = dem Inhalte p; mithin Ks die gesuchte Theilungslinie.

Zus. I. Man siehet leicht, daß der Punkt K nicht in der Seite A B zu liegen braucht. Er könnte nach Gefallen auch innerhalb der Figur angenommen werden, und so erhielte man die Theilung der Figur aus einem Punkte, der innerhalb der Figur läge.

Anmerkung.

§. 327. Das bisherige wird zureichen, die gewöhnlichsten und brauchbarsten Fälle, welche in der Ausübung vorkommen können, sowohl durch Rechnung, als Zeichnung aufzulösen. Daß sich in der Theorie noch mancherley andere Bedingungen gedenken lassen, welche die Theilungslinien haben sollen, ist wohl offenbar. — Allein es würde wider meine Absicht seyn, mich auf solche Fälle einzulassen, und die Abhandlung über die Theilung der Figuren könnte leicht zu einem ganzen Buche anwachsen. Daher werde ich es bey dem bisherigen bewenden lassen, und hoffe übrigens, daß, wenn in der Ausübung auch einmal ein anderer Fall vorkäme, solcher doch nach den bisherigen Gründen und nach gehöriger Ueberlegung, sich ohne Schwierigkeit werde bewerkstelligen lassen.

Schriftsteller, die man über das bisherige sonst noch nachlesen kann, sind z. E.

F. Commandini tractatus de superficierum divisionibus.

Simon Stevin Geom. Practique Lib. IV.

Clavii geometria pract. Lib. VI.

Ozanam Cours de mathématique Tom. III. pag. 33, von welcher Abhandlung auch eine deutsche Uebersetzung unter dem Titel: Anweisung, die geradlinigten Figuren nach einer gegebenen Verhältniß ohne Rechnung zu theilen, mit illuminirten Kupfern (Frankfurt und Leipzig 1776.), herausgekommen ist.

Meines Vaters Methode findet man auch in C. H. Wilkens Entscheidung der Gränzstreitigkeiten ꝛc. ꝛc. Halle 1757.

Im Vten Bande der Abhandl. der Bayerischen Acad. d. W. findet sich auch von Herrn Alb. Euler eine Abhandlung über Theilungen der Figuren.

Ferner über die Verwandlung derselben in J. H. Lamberts Beyträgen zur Math. II. Bd. — Vollimhaus Anweisung zu Felder- und Landtheilungen ꝛc. ꝛc. (Hannover u. Leipz. 1773.).

Auch in Hrn. G. R. Böhms Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde; In J. Karl Schulzens Taschenbuch zur gründlichen Anwendung der Meßkunst (Berl. 1782.) Bugge theoreretisch practische Anl. zum Feldmessen, aus d. Dänischen von Ludolph Herrmann Tobiesen. Altona 1798. und andern Schriften der practischen Geometrie findet man die Theilungen der Felder auseinander gesetzt.

Ich werde nun im nächstfolgenden Kapitel einige Fragen auflösen, die bey Landvertauschungen, Repartirungen u. dgl. vorkommen können, und deren Zusammenhang mit dem bisherigen gezeigt werden muß.