XXVIII. Kapitel.

Theilung der Felder durch Rechnung.

§. 307. Eine der wichtigsten und häufigsten Aufgaben in der Feldmeßkunst besteht darinnen, von einem vorgegebenen Stücke Landes einen verlangten Theil abzuschneiden, oder es selbst in mehrere Theile einzutheilen, die entweder von gleicher Größe seyn, oder gegen einander gegebene Verhältnisse haben sollen.

In Rücksicht der Theilungslinien können nun allerley Bedingungen vorkommen.

Die gewöhnlichste und zugleich brauchbarste ist, daß die Theilungsgränzen nicht gebrochen, sondern gerade, und so viel als möglich, mit einander parallel laufen sollen, es müßten denn die parallelen Theilungsgränzen bey gewissen Arten von Figuren Unbequemlichkeiten haben, die zu vermeiden, man lieber die Theilungslinien anders nähme.

Auch

Auch kann der Fall vorkommen, daß alle Theilungslinien sich in einem gewissen Punkte durchschneiden, oder daß sie alle an eine gegebene Seite der Figur anstoßen sollen, wie wenn z. E. längst dieser Seite ein Weiher läge, oder ein Fluß vorbey gienge, den die Interessenten gemeinschaftlich auf eine bequeme Art benützen wollten u. dgl., so daß jeder Interessent sogleich von seinem Grundstücke aus, hinfahren könnte, ohne seines Nachbars Grund und Boden zu berühren.

Diese und ähnliche Fälle werde ich nun erst durch Rechnung aufzulösen suchen, und dann im folgenden Kapitel zeigen, wie man sie auch durch bloße Zeichnung bewerkstelligen könnte.

§. 308. Aufgabe. Ein Trapezium (Fig. XL.), welches zwey paralele Seiten AB und CD hat, dergestalt zu theilen, daß das Stück ABHE einen gegebenen Inhalt $= p$ habe, und die Theilungslinie HE mit AB parallel laufe.

Aufl. I. Man fälle AG auf CD senkrecht, und nenne die Seiten $AB = a$, $CD = b$, $HE = y$, die ganze Höhe $AG = c$; die Entfernung der zu suchenden Theilungslinie HE von der Seite AB, oder $AF = x$.

II.

II. Man gedenke sich AM mit BD parallel, so ist $CM = CD - AB = b - a$,

$HL = HE - AB = y - a$.

Nun in dem Dreyecke ACM

$CM : HL = AG : AF$; oder

$b - a : y - a = c : x$; also

$$x = \frac{c.(y-a)}{b-a}$$

III. Die Fläche des Trapezii ABHE ist

$$\frac{HE + AB}{2}.AF = \frac{(y+a)}{2}.x = \frac{(y+a)(y-a)c}{2(b-a)} \text{ (II.)}$$

oder wegen $(y+a)(y-a) = y^2 - a^2$

die Fläche des Trapez. $= \frac{c(y^2-a^2)}{2(b-a)}$

IV. Dieses Trapezium soll nun den Inhalt p haben, folglich muß seyn

$$\frac{c(y^2-a^2)}{2(b-a)} = p \text{ oder}$$

$$y^2 - a^2 = \frac{2(b-a)p}{c}$$

mithin $y = \sqrt{\left(\frac{2(b-a)p}{c} + a^2\right)}$

V. Und folglich (II.)

$$x = \frac{c}{b-a}\left(-a + \sqrt{\left(\frac{2(b-a)p}{c} + a^2\right)}\right)$$

VI. Dieser Ausdruck ist zur Berechnung etwas unbequem, weil eine Quadratwurzel dabey auszuziehen ist. Um diese zu vermeiden und die ganze Rechnung auf Logarithmen zu bringen, so weil ich mit dieser Formel folgende Veränderung vornehmen.

Ich nehme erstlich an, daß b größer, als a, mithin b — a eine positive Größe ist.

VII. Man setze in (Trig. S. XVI. 2.) das dortige $B^2 = a^2$, und das dortige $A^2 = \frac{2(b-a)p}{c}$. Man suche einen Winkel $= \psi$, dessen Tangente $= \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{2(b-a)p}}{a\sqrt{c}}$, so wird die Quadratwurzel in (VI.) oder

$$\sqrt{\left(\frac{2(b-a)p}{c} + a^2\right)} = a \sec \psi = y \text{ (IV.)}$$

VIII. Mithin $x = \frac{c}{b-a} \cdot (-a + a \sec \psi)$

$$= \frac{ac}{b-a} (\sec \psi - 1)$$

$$= \frac{ac}{b-a} \left(\frac{1 - \cos \psi}{\cos \psi} \right)$$

Aber wegen $1 - \cos \psi = \sin \psi \tan \frac{1}{2} \psi$ (Trig. S. XIII. 27.)

$$x = \frac{ac}{b-a} \cdot \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \tan \tfrac{1}{2} \psi$$

$$= \frac{ac}{b-a} \tan \psi \tan \tfrac{1}{2} \psi$$

IX. Man setze aber, es sey b kleiner, als a, mithin $b - a$ eine negative Größe, so verwandelt sich erstlich der Werth von

$$x \text{ in } \frac{c}{a-b} \left(a - \sqrt{\left(a^2 - \frac{2(a-b)p}{c} \right)} \right)$$

Man setze nun in (Trig. S. XVI. 1.) das dortige $B^2 = a^2$ und $A^2 = \frac{2(a-b)p}{c}$, und suche einen Winkel ψ, dessen Sinus $= \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{2(a-b)p}}{a\sqrt{c}}$; so wird die Wurzelgröße

√

$$\left(a^2 - \frac{2(a-b)p}{c}\right) = a \cos\psi = y \text{ (IV.)}$$

Mithin $x = \frac{ac}{a-b}(1 - \cos\psi)$ oder

$x = \frac{ac}{a-b} \sin\psi \tan \frac{1}{2}\psi$. (Trig. S. XIII. 27.)

X. Exempel. Es sey $b = 364'$; $a = 216'$; $c = 240'$; Von dem Trapezio, dessen Inhalt solchergestalt 69600 Quadr. Fuß hielte, sollte man ein Stück abschneiden, dessen Inhalt $p = 34800$. Q. F. wäre.

Es ist also $b - a = 148'$. Weil nun b größer, als a, so wird x nach der Formel (VIII.) berechnet.

Erst für den Winkel ψ ist

$\log.\tan\psi = \frac{1}{2}(l.2p + l.(b-a)) - (l.a + \frac{1}{2}l.c.)$

log. 2 p	= 4,84260	log. a	= 2,33444
log. (b—a)	= 2,17026	½ l. c	= 1,19010
	7,01286		3,52455
halb	= 3,50643		
abgezogen	= 3,52455		

$\log.\tan\frac{1}{2}\psi = 9{,}98188 - 10$; also $\psi = 43^\circ.48'$

l. tang $\frac{1}{2}\psi = 9{,}60422 - 10$

log. a = 2,33445

log. c = 2,38021

4,30076

abg. l(b—a) = 2,17026

log. x = 2,13050

Also x = 135,07

Wenn man also in (Fig. XL.) AF = 135′ nimmt, und durch F mit AB parallel ziehet, so ist das Trapezium ABHE = dem gegebenen Inhalte p.

XI. Bey einer Zeichnung, wo es immer erlaubt ist, das Unbemerkbare wegzulassen, ist es zureichend, den Winkel ψ nur bis auf die Minuten, so wie man ihn unmittelbar in den Sinustafeln findet, zu nehmen.

Die Secunden, nach der gewöhnlichen Art, durch Proportionaltheile zu suchen, würde hier sehr überflüssig seyn, weil sie auf den Werth von x einen so geringen Einfluß haben, daß der Fehler auf dem verjüngten Maasstabe, von welchem man nachher das berechnete x abtrüge, völlig unmerklich ist. Aus eben der Ursache ist es auch nicht nöthig, aus den Tafeln die Logarithmen weiter, als bis auf 5 Decimalstellen zu nehmen.

XII. Der Werth von $y = a \sec \psi$ würde für (X.) = 299,1.

Verzeichnung der Formeln

§. 309. I. Die Berechnung des Werthes von x im vorigen §. bleibt indessen für die

die Ausübung noch immer etwas beschwerlich. Ich werde also zeigen, wie man ihr durch eine Konstruction zu Hülfe kommen könne.

II. Man berechne erstlich die Höhe eines Dreyecks, dessen Grundlinie $= AG = c$, und der Inhalt $= p$ wäre. Nennet man diese Höhe $= m$, so muß seyn $\frac{mc}{2} = p$, also

$m = \frac{2p}{c}$.

III. Folglich (§. 308. V.)

$$x = \frac{c}{b-a}\left(-a + \sqrt{\left((b-a)m + a^2\right)}\right)$$

IV. Man verlängere also AB auf beyden Seiten, und nehme (Fig. XL.) $Ab = m$ (II.); $Bd = DC = b$, so ist $Ad = b - a$; Man halbire bd bey c, und durchschneide mit $ef = ed = eb$ das heraufwärts verlängerte Perpendikel GA.

Die Weite von B nach f trage man von B nach φ, und ziehe durch φ mit DB eine Parallele, welche AC in H durchschneidet, so wird H der Punkt seyn, durch welchen eine mit CD parallel gezogene HE, von dem ganzen Trapezio ABCD, das gegebene Stück $p = AHBE$ ab schneiden wird.

V.

V. Bew. Es kömmt darauf an, darzuthun, daß die Höhe AF des gefundenen Trapezii ABHE, dem Werthe von x in (III.) gleich ist. Dieß erhellet so:

VI. Weil $Ab = m$; $Ad = b - a$ (IV.) und die drey Punkte d, f, b in einem Halbkreise liegen (IV.), so ist Af die mittlere geometrische Proportional-linie zwischen Ad und Ab, oder zwischen m und $b - a$; mithin

$$m : Af = Af ; b - a$$

oder $$Af^2 = m.(b - a).$$

VII. Nun ist in dem rechtwinklichten Dreyecke BAf; $Bf^2 = Af^2 + AB^2 = (b - a)m + a^2$. (VI.) also

$$Bf = \sqrt{\left((b - a)m + a^2\right)}$$

VIII. Nun wurde $B\varphi = Bf$ gemacht (IV). Mithin ist

$$A\varphi = B\varphi - BA = -a + \sqrt{\left((b - a)m + a^2\right)}$$

IX. Weil nun φH mit BD, oder mit AM parallel läuft, so ist $HL = A\varphi$ und

$$CM : HL = AG : AG \text{ oder (VIII)}$$

$$b - a : -a + \sqrt{\left((b - a)m + a^2\right)} = c : AF$$

Mithin $$AF = \frac{c}{b - a}\left(-a + \sqrt{\left((b - a)m + a^2\right)}\right)$$
$= x$ (III,)

X. Es

X. Es ist also bey der bisherigen Konstruction nichts zu berechnen, als die Größe $m = \frac{2p}{c}$; welches ohne viel Mühe geschehen kann. So wäre z. E. für die Größen p und c aus (§. 308. X.)

$$m = \frac{2p}{c} = \frac{69600}{240} = 290'$$

Welche Größe man nach dem verjüngten Maasstabe, nach welchem das Trapezium aufgetragen worden, von A bis b trägt (VI.).

Zus. I. Wenn vorgegeben wäre, was das Trapezium ABHE für ein Theil des ganzen ABCD seyn sollte, so wird die Bestimmung des Werthes von m (X) noch einfacher. Gesetzt, p sollte $\frac{v}{n}$ des Trapezii ACBD seyn.

Weil nun Trapez. ABCD $= \frac{a+b}{2} . c$; so wäre

$$p = \frac{v.(a+b)\,c}{2n}; \text{ mithin}$$

$$m = \frac{v.(a+b)}{n}$$

Man theile also die Summe der beyden Seiten AB + CD in n gleiche Theile, nehme v der:

dergleichen Theile, so hat man m, oder bey der Konstruction die Linie AB.

Sollte z. E. $p = \frac{1}{2}$ ABCD seyn, so wäre $\frac{v}{n} = \frac{1}{2}$; folglich $AB = m = \frac{AB + CD}{2}$, wo man also AB von D nach K tragen, und CK halbiren müßte.

Zus. II. Die Konstruction (§. 309) gilt nur für den Fall, wenn b größer ist, als a.

Wäre aber (Fig. XLI.) b kleiner als a, so würde die Konstruction nach der Formel (§. 307. IX.) auf folgende Art aussehen,

Man mache, wie vorhin, $Bd = DC = b$;

und $AB = m = \frac{2\,p}{c}$. (m. s. auch Zus. I.)

Halbire bd bey e, und durchschneide, wie vorhin, das aufwärts verlängerte Perpendikel GA bey f, mit $ef = eb = ed$.

So ist wiederum $AB : Af = Af : Ad$, mithin $Af^2 = (a - b)\,m$.

Aus f durchschneide man AB mit $fg = AB = a$; so ist

$Ag = \sqrt{(fg^2 - Af^2)} = \sqrt{(a^2 - (a - b)\,m)}$

also $Bg = a - Ag = a - \sqrt{(a^2 - (a - b)\,m)}$.

Nimmt man endlich $B\varphi = Ag$; und ziehet durch φ mit BD die Parallele φH, so wird, wie

wie vorhin (§. 309. IV), die Parallele mit AB durch H, das verlangte Trapezium ABHE = p abschneiden.

Oder auch, man ziehe sogleich durch g die Linie gE parallel mit AC, und durch E die Theilungslinie EH parallel mit AB.

Anmerkung.

Wenn von einem Trapezio CHED (Fig. XLII.) ein Stück HEIK = p abgeschnitten werden soll, und es wären die Seite HE = a, der Winkel IHE = α und HEK = β bekannt, so kann man auch aus diesen gegebenen Stücken, die mit HE parallele Theilungslinie IK ziehen. Ich suche auf HG den Punkt I durch welchen IK gezogen werden muß.

I. Es ist, wenn man CH, DE verlängert, bis sie sich in A durchschneiden.

$\Delta AIK : \Delta HAE = AI^2 : AH^2$, weil beyde Dreyecke einander ähnlich sind.

II. Also

$\Delta AIK - \Delta AHE : \Delta AHE = AI^2 - AH^2 : AH^2$

oder wegen

$AI^2 = (AH + HI)^2 = AH^2 + 2AH \,.\, HI + HI^2$

und $\Delta AIK - \Delta AHE = p$

$$p : \Delta AHE = 2AH \,.\, HI + HI^2 : AH^2$$

III.

III. Nun ist aber

$$\Delta AHE = \frac{HE \cdot AF}{2} = \frac{HE \cdot AH \sin\alpha}{2}$$

demnach (II.)

$$p : \frac{HE \sin\alpha}{2} = 2AH \cdot HI + HI^2 : AH$$

IV. Oder wenn man die äußeren und mittleren Glieder multiplicirt, und mit dem zweyten dividirt

$$\frac{2 \cdot p \cdot AH}{HE \sin\alpha} = 2AH \cdot HI + HI^2$$

V. Also

$$\frac{2 \cdot p \cdot AH}{HE \sin\alpha} + AH^2 = AH^2 + 2AH \cdot HI + HI^2$$
$$= (AH + HI)^2$$

VI. Folglich wegen $HE = a$

$$HI = -AH + \sqrt{\left(\frac{2 \cdot p \cdot AH}{a \cdot \sin\alpha} + AH^2\right)}$$

VII. Nun ist

$$\sin\beta : AH = \sin A : HE$$

und wegen

$$A = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta)$$
$$= \alpha + \beta - 180^\circ$$

sin

$\sin A = -\sin(\alpha + \beta)$ also wegen $HE = a$

$$AH = -\frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

VIII. Dieser Werth von AH wird positiv so bald die beyden Winkel α und β zusammen mehr als 180° ausmachen, Außerdem bleibt AH negativ

IX. In beyden Fällen kann man HI (VI.) durch ein Verfahren wie (§. 308. VII. IX.) durch Hülfe eines neuen Winkels ψ nach (Trig. S. XV. 2.) dessen Tangente oder Sinus man sucht, berechnen.

X. Ich finde aber in diesem Verfahren, ein Stück $= p$ von einem Trapezio abzuschneiden, keine besonderen Vorzüge vor dem §. 308 rc., wo man statt der Winkel $HAB = \alpha$, $ABE = \beta$, und $AB = a$, die Seiten $AB = a$; $CD = b$ und die Höhe $AC = c$ als gegeben ansah. Indessen hat Hr. Prof. Merrem in Duisburg in einem der hiesigen Königl. Soc. d. Wiss. eingesandtem Aufsatze (M. s. Gött. G. A. 1801. S. 1361) auch das in gegenwärtiger Anmerkung gewiesene Verfahren für die Ausübung nützlich gehalten, und ich habe daher geglaubt, auch hier die Berechnungsweise mittheilen zu müssen, wenn man etwa davon Gebrauch machen wollte. Durch Substitution des Wer-

thes

thes von AH (VII.) in die Formel für HI (VI.) können sich übrigens noch Abkürzungen in der Berechnung von HI darbieten, mit denen ich mich aber hier nicht weiter beschäftigen will.

Man s. über diese Auflösung auch Kästners geom. Abh. Erste Sammlung (Göttingen 1790.) S. 436. u. f.

§. 310. Aufgabe. Ein vorgegebenes dreyeckigtes Feld ACD (Fig. XLII. Tab. IV.) durch Linien, die mit einer Seite desselben CD parallel laufen, in eine beliebige Anzahl gleicher oder ungleicher Theile zu theilen.

Aufl. I. Die Grundlinie CD des Dreyecks ACD heiße b, die Höhe AG = c.

II. Gesetzt, von dem Dreyecke solle durch HE, die mit CD parallel ist, ein Stück AHE abgeschnitten werden, dessen Inhalt = p. Wie groß wird man AF = x nehmen müssen?

III. Man setze, in dem bisher (§. 308. u. f.) betrachteten Trapezio ABCD (Fig. XL.) falle der Punkt B mit A zusammen, oder es sey BA oder a = o, so stellet das Trapezinm ein Dreyeck vor, dessen Grundlinie = b, und die Höhe = c,

IV.

IV. Man setze also in der Formel (§. 308 V.) $a = o$, so wird in dem Dreyecke CAD (Fig. XLII.)

$$AF = x = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{2bp}{c}} = \sqrt{\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{2bp}{c}} = \sqrt{\frac{2cp}{b}}$$

mithin $\log. x = \frac{1}{2}(\log. 2 + l. c + l. p - l. b)$, welches also leicht zu berechnen ist.

Zus. Sollte das Dreyeck ACD in lauter gleiche Theile durch Parallel-linien HE, IK getheilt werden, so erwäge man folgendes:

Gesetzt ACD solle z. E. in drey gleiche Theile getheilet werden. Es solle also $AHE = \frac{1}{3} ACD$, und $AIK = \frac{2}{3} ACD$ seyn, so ist in der Formel (IV.) erstlich $p = \frac{1}{3} ACD = \frac{1}{3} \cdot \frac{bc}{2}$; mithin $AF = \sqrt{\frac{2c}{b} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{bc}{2}} = \sqrt{\frac{c^2}{3}}$.

Zweytens für das Stück $AIK = \frac{2}{3} ABC$ ist in der Formel (IV.) $p = \frac{2}{3} ABC = \frac{2}{3} \cdot \frac{bc}{2}$

mithin $AL = \sqrt{\frac{2c}{b} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{bc}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3} c^2}$

So

So finden sich also durch Berechnung der Werthe AF, AL, die Punkte F und L, durch welche man mit CD Parallelen ziehe, um AHE = $\frac{1}{3}$ ACD; und HEIK = $\frac{1}{3}$ ACD, folglich auch IKCD = $\frac{1}{3}$ ACD zu erhalten.

So wird auf eine ähnliche Art erhellen, daß, wenn ein Dreyeck in n gleiche Theile getheilt werden sollte, nach der Ordnung die Werthe

$$AF = \sqrt{\frac{c^2}{n}} = \frac{c}{n}\sqrt{n}$$

$$AL = \sqrt{\frac{2c^2}{n}} = \frac{c}{n}\sqrt{2n}$$

$$AG = \sqrt{\frac{3c^2}{n}} = \frac{c}{n}\sqrt{3n}$$

u. s. w.

berechnet, und nach dem verjüngten Maasstabe abgetragen werden müssen. Daß alles durch Logarithmen berechnet wird, verstehet sich von selbst.

Die Art, die Parallelen HE, IK u. s. w. ohne Rechnung, durch bloße Konstruction zu finden, werde ich in der Folge erläutern.

§. 311. Aufg. Von einer vorgegebenen Figur MN (Fig. XLIII.) Stücke Mvn, vnpq abzuschneiden, die einen gegebenen Inhalt haben, und deren Scheidungslinien vn, pq mit einer gegebenen Linie MS parallel laufen.

Aufl. I. Man ziehe durch alle Winkelpunkte der Figur nach der Ordnung mit MS Parallelen A, B, C, D u. s. w. nach Anweisung der punktirten Linien, und bemerke deren Durchschnitte a, b, c, d u. s. w. auf einer Linie SW, die auf MS senkrecht stehet.

II. Man messe alle Parallelen A, B, C, D u. s. w., und von a angerechnet, die Entfernungen ab = a, ac = b, ad = c, ac = d u. s. w.

III. So kann man daraus nach der Ordnung die Trapezien I, II, III, IV u. s. w. berechnen, wozu man sich hier der Formel (§. 277. Zus. 1.) bediene.

IV. Man addire zum ersten Dreyeck oder Trapezio das zweyte Trapezium, und schreibe die Summe besonders; Zu dieser Summe addire man das dritte Trapezium, und schreibe

die

die Summe wieder besonders u. s. w. Mit einem Worte, man berechne nach der Ordnung folgende Summen der Trapezien:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & = S\,\mathrm{I} \\ \mathrm{I} + \mathrm{II} & = S\,\mathrm{II} \\ \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} & = S\,\mathrm{III} \\ \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} & = S\,\mathrm{IV} \end{array}$$

u. s. w.

V. Gesetzt nun, das abzuschneidende Stück Fläche Mvn solle den Inhalt p haben.

VI. Man suche unter den Summen (IV.) diejenige aus, welche zunächst kleiner als p ist.

Gesetzt, S IV sey z. E. zunächst kleiner, als p.

So weiß man daraus, daß die Scheidungslinie vn zwischen die beyden Parallelen D, E des Trapezii V nothwendig fallen muß, und so in andern Fällen.

VII. Der Unterschied p — S IV giebt das Stück Fläche mwvn, welches man an S IV anhängen muß, damit man das gesuchte Stück Mvn = p erhalte.

VIII. Oder, welches auf eins hinausläuft, von dem Trapezio V, oder von mwrt, dessen gegen gegeneinander über stehenden Parallelen D und E, und deren Abstand $af - ae = e - d$ (II.) bekannt sind, muß durch die Parallele vn ein Stück mwvn, dessen Inhalt $= p - \mathrm{SIV}$, abgeschnitten werden.

IX. Schneidet also die Scheidungslinie nv das Perpendikel SW bey z, so muß man die Weite ez der beyden Parallelen mw, vn nach den Formeln (§. 308.) berechnen, wo denn die dortigen Größen

	a	b	c	p	x
hier	D	E	$e - d$	$p - \mathrm{SIV}$	ez

bedeuten.

Wenn übrigens D kleiner ist als E, so bedient man sich der Formel (§. 308. VIII.). Im andern Falle aber der (§. 308. IX.).

X. Was ich bisher blos zur Erläuterung von der Scheidungslinie vn, welche zwischen die Parallelen D, E fällt, gesagt habe, gilt überhaupt, die Scheidungslinie mag zwischen welche Parallelen man will, fallen, welches denn allemal aus (VI.) beurtheilt wird.

XI. Das andere Stück vnpq abzuschneiden, verfährt man eben so.

Nur wird dieses Stücks Inhalt vorher zu des erstern Mvn Inhalt addirt, und das ganze Stück Mqp auf einmal abgeschnitten, so wie man denn überhaupt, wenn von einer Figur mehrere Theile abgeschnitten werden sollen, niemals jeden Theil besonders bestimmet, sondern allemal erst den ersten Theil abschneidet, dann die Summe des ersten und zweyten, hierauf die Summe der ersten drey u. s. w. Dieß geschiehet, um die Anhäufung der Fehler zu vermeiden, die aus der unmittelbaren Aneinandersetzung einzelner Stücke zu befürchten wären.

Exempel.

XII. Es seyen in der vorgegebenen Figur nach der Ordnung die Parallelen A, B u. s. w. und die Weiten a, b, c u. s. w. folgende:

A = 120′	ab = 20 = a
B = 154	ac = 33 = b
C = 200	ad = 75 = c
D = 212	ae = 90 = d
E = 240	af = 176 = e
F = 220	ag = 250 = f
G = 205	ah = 275 = g
	ai = 317 = h

so

so findet man daraus nach der Ordnung
das Dreyeck I = S_I = 1200 Qu. Fuß.
Trapez. II = 1781

also S_{II} = 2981
Trapez. III = 7434

S_{III} = 10415
Trapez. IV = 3090

S_{IV} = 13505
Trapez. V = 19436

S_V = 32941
Trapez. VI 17020

S_{VI} = 49961
Trapez. VII = 5312

S_{VII} = 55273
Dreyeck VIII = 4305

S_{VIII} = 59578 = Inh. d. Fig.

XIII. Gesetzt nun, von dieser Figur sollen folgende Stücke

Mvn = p = 25627 Qu. Fuß
vnpq = p′ = 28380

abgeschnitten werden.

XIV. So schneidet man erstlich 25627 Qu. Fuß, und hierauf p + p′ = 25627 + 28380 = 54007 Q. Fuß, vom Anfange M angerechnet, von der Figur ab.

XV. Für den ersten Theil 25627 Q. F. siehet man, daß von obigen Summen der Trapezien, die Summe der ersten viere, nemlich SIV = 13505, zunächst kleiner ist, als 25627; also muß die Theilungslinie vn zwischen D und E, also zwischen 212′ und 240′ fallen.

Um deren Abstand von D zu finden, so ist p — SIV = 12122 (in §. 308. VIII. = p)

D	=	212	(daselbst = a)
E	=	240	(daselbst = b)
e — d	=	86	(daselbst = c)

Diese Werthe demnach in die erwähnte Formel substituiret, geben x = 56, 7, oder in gegenwärtiger Figur die Weite ez.

Nimmt man also ez = 56, 7, oder beynahe 57 Fuß, und ziehet durch z die Parallele vn, so ist das erste Stück Mvn = 25627 Q. F. abgeschnitten.

XVI. Eben so ist für das zweyte Stück 54007 (XIV.) die Summe SVI = 49961 zunächst kleiner; der Unterschied ist = 4046, und die Scheidungslinie pq muß zwischen F = 220 und G = 205 (XII.) fallen. Um deren Abstand von der Parallele F zu finden, so muß man, weil F größer ist als G, nach der Formel

mel (§. 308. IX.) rechnen, in welcher $a = 220$, $b = 205$, $p = 4046$ und $c = 25$, nemlich $= ah - ag = g - f$ (XII.).

So findet sich $x = 18,8$, oder beynahe $= 19$.

Man nehme also in der Figur die Weite $gy = 19$ Fuß, und ziehe durch y die Parallele pq, so ist das Stück $Mpq = 54007$; Mithin auch $vpnq = 28380$ (XIII.), wie verlangt wurde.

Zus. Es kann sich eräugnen, daß die Trapezien, wie z. E. $mwrt$, in welche eine Theilungslinie, wie vn, fällt, entweder völlig Parallelogramme sind, oder sehr wenig davon abweichen. In beyden Fällen braucht man die Rechnung des Abstandes der Scheidungslinie vn von der nächstvorhergehenden Parallele D, nicht nach den Formeln (§. 208.) zu führen, sondern, weil alsdann das Stück, wie $mwvn$, auch als ein Parallelogramm zu betrachten ist, dessen Inhalt (VII.) und Grundlinie $mw = D$ gegeben sind, so findet man die Höhe dieses Parallelogramms, wenn man geradehin den Inhalt mit der Grundlinie dividirt.

So käme in obigen Beyspiele, das Trapezium $mwrt$ als ein Parallelogramm be-

trach-

trachtet, die Höhe ez oder x (XV.) = $\frac{p - Siv}{D} = \frac{12122}{212} = 57,1$, welches von dem obigen Werthe 56,7 um eine für die Ausübung unbeträchtliche Größe unterschieden ist.

Begreiflich wird der Fehler desto geringer seyn, je kleiner der Unterschied zwischen den beyden Parallelen, zwischen denen die gesuchte Theilungslinie fällt, ist; auch je weniger der Unterschied, wie p — Siv, beträgt.

In obigem Beyspiele ist E — D = 28, also ohngefähr = $\frac{1}{8}$ D. Ferner mvwn, oder p — Siv = 12122; also ohngefähr $\frac{3}{5}$ des Trapezii mrwt; Und dennoch fand sich, mvwn als ein vollkommenes Parallelogramm betrachtet, nur ein geringer Fehler in der Bestimmung des Werthes von x.

Man kann demnach sagen: Wenn der Unterschied zweyer Parallelen, wie D und E, nicht größer ist, als ohngefähr $\frac{1}{8}$ der Parallele D, und das von dem Trapez. mwrt abzuschneidende Stück mvwn = π nicht über $\frac{3}{5}$ des Trap. mwrt beträgt, so ist es erlaubt, die Höhe des abzuschneidenden Stücks geradehin durch eine Division der Grundlinie D in den Inhalt des Stücks π zu berechnen, und der Fehler, den man dadurch begehet, wird für die Ausübung unbeträchtlich seyn.

Auf diese Art kann man oft Rechnungen ersparen, die man sonst umständlicher nach den Formeln (§. 308.) zu führen hätte.

Eben so wäre z. E. auch für die zweyte Scheidungslinie pq der Abstand von der Parallele $F = \frac{4046}{220} = 18,4$, welches von obigen wahren Werthe 18, 8 (XVI.) wieder nur um eine Kleinigkeit unterschieden ist.

Anmerkungen über gewisse Unbequemlichkeiten bey Figuren mit sehr einwärtsgehenden Winkeln.

§. 312. Wenn eine Figur, wie $\alpha\beta\gamma\ldots\psi\alpha$ (Fig. XLIV.), sehr einwärts gehende Winkel hat, so kommen bey Theilungen, deren Scheidungslinien mit einer gegebenen parallel laufen sollen, oft sehr ungestaltete Figuren heraus; αS sey z. E. die Linie, mit der die Scheidungslinien der von der Figur abzuschneidenden Stücke parallel laufen sollen. Es sey erstlich durch Linien, welche jetzt mit αS parallel gezogen werden, die ganze Figur wieder in lauter Dreyecke und Trapezien zerlegt. Gegenwärtig kommen ausser den Trapezien vier Dreyecke I. V. VI. VIII. zum Vorschein. Diese, nebst den Trapezien, werden nun aus den gemessenen Parallelen und dem Abstande derselben

ben berechnet, und nach der Ordnung der numerirten Inhalte I, II, III u. s. w. zusammen addirt, um, wie im vorhergehenden §., die Summen S_{I}, S_{II}, S_{III} u. s. w. zu erhalten.

Gesetzt nun, von dieser Figur solle ein Stück Fläche $= P$ abgeschnitten werden. Man fände die Summe S_{V} zunächst kleiner, als P.

Den Unterschied $P - S_{V}$ würde man also hier in das Dreyeck VI hineinzutragen haben, d. h. an die Grundlinie dieses Dreyecks δr müßte man ein Trapezium $\delta r q n$ setzen, dessen Inhalt $= P - S_{V}$ wäre.

Die Höhe dieses Trapezii fände man nach den Formeln (§. 308.), in welchen $b = \delta r$; $p =$ dem Inhalte des Trapezii $\delta r q n$, $c =$ der Höhe des Dreyecks VI, und $a = o$ gesetzt werden müßte.

So erhielte man demnächst die Figur $\alpha \beta \gamma \delta q n \eta \mu \psi \alpha =$ dem gegebenen Inhalte P. Ein Stück Fläche also, von einem sehr unordentlichen Umfange.

Hiebey eräugnete sich aber noch eine grössere Unbequemlichkeit. Die Person nemlich, welche das übrige von der ganzen Figur bekommen sollte, würde das Dreyeck $\varepsilon q n$ + dem Stücke $\eta \zeta \phi \mu$ erhalten; welches also gar ein

paar

paar von einander abgesonderte Theile wären, deren Benutzung auf dem Felde große Unbequemlichkeit hätte. Diese und andere Unbequemlichkeiten sind bey Figuren, mit sehr einwärts gehenden Winkeln, oft nicht zu vermeiden, vorausgesetzt, daß die Scheidungslinie, wie q n, nothwendig mit einer gegebenen α S parallel laufen soll.

Hängt es aber von der Willkühr des Feldmessers ab, die Theilung so zu bewerkstelligen, wie sie für jeden Interessenten am bequemsten ausfällt, so kann er oft die Linie, mit der die Theilungen parallel gehen sollen, so wählen, daß oben erwähnte Unbequemlichkeiten großentheils gehoben werden.

So z. E. würden wenigstens keine abgesonderte Stücke, wie vorhin, zum Vorschein kommen, wenn man die Theilungen mit der Richtung S W parallel nähme.

Nach dem Augenmaaße und einer vorläufigen Ueberlegung wird es dem Feldmesser nicht schwer zu beurtheilen seyn, mit welcher Richtung in einer vorgegebenen Figur die Theilungen am bequemsten und schicklichsten parallel gehen.

Freylich giebt es Figuren, wo sich keine Theilung mit irgend einer Linie parallel machen läßt, ohne daß abgesonderte Stücke zum Vorschein kämen. — In solchen Fällen kann man aber

aber oft die Figur schicklicher durch andere Linien theilen, die nicht mit einander parallel laufen. —

In der Ausübung kommen indessen so unordentliche Plätze, wenigstens bey Theilungen der Aecker und Wiesenstücke, so häufig nicht vor. — Daher halte ich das bisher beygebrachte für zureichend.

§. 313. Aufgabe. Eine krummlinigte Figur durch Parallel-linien in gewisse Theile einzutheilen, oder Stücke vorgegebenen Inhaltes davon abzuschneiden.

Aufl. Dieses Verfahren ist wesentlich von dem im vorhergehenden §. nicht unterschieden. — Vorausgesetzt, daß man kleine Theile des Umfangs als geradlinigt ansehen darf.

Eine große Bequemlichkeit ist es bey der Theilung krummlinigter Flächen, wenn man den Parallelen, wie A, B u. s. w., wodurch die krummlinigte Figur in Dreyecke und Trapezien zerlegt wird, durchgehends gleichen Abstand giebt, und man solchen allemal eine oder mehrere ganze Ruthen groß nimmt, je nachdem die Parallelen nahe oder weit von einander seyn dürfen. Alsdann werden nemlich die einzelnen Trapezien I, II u. s. w., und deren Summen

S',

S′, S″ u. s. w., ohne viele Rechnung nach (§. 286. II. III.) gefunden.

Wenn man z. E. die Parallelen nur eine Ruthe weit von einander nimmt, so wird die Fläche I (Fig. XLIII.) geradehin = $\frac{1}{2}$ A Qu. Ruthen; das Trapez. II = $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ B Quadr. Ruthen u. s. w. also

$S_{I} = I = \frac{1}{2} A$ Quadratruthen.
Trapez. II. $= \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$ — —
also $S_{II} = A + \frac{1}{2} B$ — —
Trap. III. $= \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C$ — —
also $S_{III} = A + B + \frac{1}{2} C$ — —
u, s. w.

Wo also diese Summen mit dem von der krummlinigten Figur abzuschneidenden Stücke p zu vergleichen, und die Theilungslinie, wie vn, in vorhergehenden §§. zu bestimmen ist.

Nähme man den Abstand der Parallelen = 2 Ruthen, so würde in Quadratruthen
die Fläche I $= \frac{1}{2} A \,.\, 2° = A$ Qu. Ruth.
Trap. II $= (A + B)\, 2° = A + B$ —
also $S_{II} = 2A + B$ —
III $= B + C$ —
also $S_{III} = 2A + 2B + C$ —
u. s. w.

Schu-

Schuhe und Zolle, welche die gemessenen Parallelen A, B u. s. w. enthalten, muß man hiebey als Decimaltheile von Ruthen betrachten, wo denn die in SI; SII u. s. w. kommenden Decimalstellen, sich auf Quadratruthen beziehen.

§. 314. Aufgabe. Eine vorgegebene Figur ABCDEF (Fig. XLV.), deren Inhalt bekannt, z. E. = 115860 Qu. Schuhe wäre, so zu theilen, daß die Theilungslinien alle an eine gegebene Seite AB der Figur austossen.

Aufl. I. Gesetzt, die Figur solle man in 3 Theile theilen, daß z. E. p = 38620; p′ = 30896; p″ = 46344 Qu. Schuhen wäre.

II. Man schneide also von B nach A das Stück BMSDCB = p = 38620 Q. S. ab.

Dann mache man das Stück NREDCBN = p + p′ = 69516 Q. S., so wird durch die Linien MS, NR die Theilung geschehen seyn, so daß BMSDCB = p, MNRES = p′ und NARF = p″.

III. Die Lage der Scheidungslinien MS, NR zu finden, so müssen die Punkte M, N auf AB gegeben seyn, durch welche die erwähnten Linien gehen sollen.

IV.

IV. Ich will hier z. E. annehmen, daß sich BM, MN, NA verhalten sollen, wie die zugehörigen Stücke p, p′, p″ (I.).

Man messe also AB nach dem bey der Figur zum Grunde liegenden verjüngten Maasstabe.

Ich finde AB = 288 Schuhe.

V. So wird unter der Voraussetzung (IV.) durch die Regel de Tri gefunden BM = 96; MN = $76\frac{4}{5}$; mithin von selbst NA = $125\frac{1}{5}$.

VI. Ich mache also nach dem verjüngten Maasstabe BM = 96, BN = 96 + $76\frac{4}{5}$ = $172\frac{4}{5}$, so sind erstlich die Punkte M, N mit der gehörigen Richtigkeit bestimmt.

VII. Um nun die Lage von MS zu finden, so ziehe man aus M die Diagonalen MC, MD u. s. w., und berechne nach der Ordnung die Dreyecke BMC, CMD, DME u. s. w., so wird sich aus den Summen

$$S = BMC$$
$$S_{I} = BMC + CMD$$
$$S_{II} = BMC + CMD + DME$$
u. s. w.

beurtheilen lassen, zwischen welche Diagonalen MS fallen muß.

Ich

Ich finde BMC + CMD = 24531 Q.S. zunächst kleiner, als p = 38620.

Also wird MS zwischen die Diagonalen MD, ME zu liegen kommen; d. h. an das Viereck MDCB, dessen Inhalt = 24531, wird ein Dreyeck DMS gesetzt werden müssen, dessen Inhalt = 38620 — 24531 = 14089 Quadr. Sch.

Die Grundlinie dieses Dreyecks ist MD. Diese finde ich = 232′. Die Höhe desselben zu berechnen, so muß man bekanntlich den doppelten Inhalt mit der ganzen Grundlinie, oder den einfachen Inhalt mit der halben Grundlinie dividiren. Dieß giebt die Höhe des Dreyecks $= \frac{14089}{116} = 121, 4$ beynahe 121′.

VIII. Man setze also senkrecht auf MD die Linie ar = 121′. Ziehe durch r mit MD eine Parallele, so wird diese auf DE den Punkt S abschneiden, wo MS gezogen, das Dreyeck MDS = 14089, mithin die Figur BMSDCB = p = 38620 Quadr. Schuhe wird.

IX. Auf eben die Art findet man die Theilungslinie NR. Die Fläche MDCB ist schon bekannt = 24531 (VII.) Hierzu addire man nach der Ordnung die Dreyecke NDM, NDE u. s. w., welche sich durch Ziehung der Diago-

nalen

nalen ND, NE u. s. w. ergeben; so findet sich die Fläche NEDCBN = 62215 zunächst kleiner, als p + p′ = 69516 (II.), dergestalt, daß also die Theilungslinie NR in das Dreyeck NFE fallen muß; d. h. an NE = 485′ muß man ein Dreyeck NRE setzen, dessen Fläche = 69516 — 62215 Qu. Sch. = 7301 Q. S.

Die Höhe dieses Dreyecks wird $= \frac{2 \cdot 7301}{485}$ $= 30,1′$. Diese trage man von b nach s, ziehe durch s eine Parallele mit NE, welche FE in R durchschneidet. So wird das Dreyeck NRE = 7301 Q. S., mithin die Fläche NREDCBN = p + p′; weil nun MSDCBM = p, so ist NRESMN = p′. AFRNA = p″, daß also die vorgegebene Figur in 3 Theile p, p′, p″ getheilt worden, deren Inhalte sich wie in (I.) verhalten.

Anmerkung.

§. 315. Bey dieser Art von Theilung fallen die Theilungslinien MS, NR u. s. w. zwar nicht parallel, aber doch in vielen Fällen immer schicklich genug, daß die abgeschnittenen Stücke keine zu unordentliche Gestalt bekommen. Anwendungen dieser Theilungsart sind: wenn z. E. längst AB ein Weiher läge, oder ein Fluß vorbeyflöße, den

die

die Interessenten des vorgegebenen Stück Feldes gemeinschaftlich benützen wollten, ohne daß einer über des andern sein Land gehen dürfte, oder wenn längst AB Gebäude lägen, von denen ein jeder Hauswirth gleich unmittelbar auf sein Feld kommen wollte, ohne nöthig zu haben, seines Nachbarn Grund und Boden zu berühren u. dgl. In allen solchen Fällen werden also Theilungen vorkommen, bey denen die bisherige Aufgabe angewandt wird.

§. 316. Aufgabe. Ein vorgegebenes Stück Feld (Fig. XLVI.) so zu theilen, daß die Theilungslinien alle nach einem gewissen, innerhalb der Figur liegenden Punkte R hinlaufen.

Aufl. I. Man ziehe aus R nach allen Ecken der Figur gerade Linien RA, RB u. s. w., und berechne nach der Ordnung die Dreyecke RAB, RBC u. s. w., nebst deren Summen.

$$S = RAB$$
$$SI = RAB + RBC$$
$$SII = RAB + RBC + RCD$$
u. s. w.

II. Die von der Figur abzuschneidenden Stücke seyen nun nach der Ordnung p, p′, p″ u. s. w.

III. Man vergleiche nun erstlich p mit einer der Summen (I.). Fände man z. E. S1 zunächst kleiner, als p, so fiele die Theilungslinie RM in das Dreyeck CRD, oder zwischen RC und RD.

Man trage an RC ein Dreyeck RMC, dessen Fläche = p — S1, so wird ARM der erste Theil = p.

IV. Die Höhe dieses Dreyecks ist $\frac{2(p-S1)}{RC}$ (§. 314. VII.), welche man senkrecht auf RC von a bis r trägt, und durch r mit RC eine Parallele ziehet, welche CD in M durchschneidet; wo denn, nachdem RM gezogen ist, das Stück ARMCBA = p ist.

V. Eben so mache man ABCDNRA = p + p′; ABCDEFORA = p + p′ + p″ u. s. w.

Aus Vergleichung der Flächen p + p′; p + p′ + p″ u. s. w. mit den Summen (I.) findet sich allemal, in welche Dreyecke DRE, FRA u. s. w. die Theilungslinien RN, RO u. s. w. fallen, welche denn wie RM (IV.) bestimmt werden.

Auf diese Art ist also die vorgegebene Figur in die Theile ARM = p; MRN = p′; NRO = p″ u. s. w. verlangtermaaßen getheilt.

Anmerkung.

§. 317. Diese Aufgabe kann vorkommen, wenn sich z. E. innerhalb eines unter verschiedene Personen zu theilenden Stück Feldes, bey R eine Quelle befände, die einem jeden Interessenten nutzbar werden sollte, ohne daß der eine nöthig hätte, über des andern seine Felder zu gehen u. dgl.

Man siehet übrigens leicht, daß eben die Auflösung statt fände, wenn R z. E. in dem Umfange der Figur ABC u. s. w. läge, und alle Theilungslinien nach diesem Punkte hinlaufen sollten.

Wäre die Figur krummlinigt, so muß man ihren Umfang als aus lauter kleinen geraden Stücken zusammengesetzt ansehen, und eben so verfahren, wobey denn freylich die Theilung etwas beschwerlicher ausfällt.

Aus dem bisherigen wird man zureichend die Gründe verstehen, die man bey Theilungen der Felder durch bloße Rechnung zu befolgen hat. Es sind hiebey ein für allemal folgende zwey Lehrsätze zu bemerken. Wenn die von einem Stück Feldes abzuschneidenden und unmittelbar neben einander liegenden Theile p, p′, p″, p‴ u. s. w. heisen, so muß man nicht nach der Ordnung einen Theil nach dem andern für sich allein in die Figur tragen, sondern erstlich den Theil p, alsdann die Summen p + p′, p + p′ + p″ u. s. w., alle von dem nehmlichen Ende der Figur angerechnet, abschneiden. Zweytens müssen die Trapezien oder Dreyecke, in welche man die Figur zerlegt, um, wie im vorhergehenden, die Summen S, S1, S11 u. s. w. zu erhalten, immer auf eine gewisse Art mit der Lage der von der Figur abzuschneidenden Theile p, p′ u. s. w. übereinstimmen, d. h. wenn die Theilungslinien der Stücke p, p′ u. s. w. mit einer gegebenen Linie parallel laufen sollen, so muß die Figur auch in Trapezien zerlegt werden, die mit dieser Linie parallel gehen. Sollen alle Theilungslinien nach einem und demselben Punkte zulaufen, so muß auch die Figur aus diesem Punkte anfänglich in Dreyecke zerlegt werden u. s. w. Auf diese Art werden nicht nur viele Fehler vermieden, sondern die Vergleichung der Summen S, S1 u. s. w. mit den Größen p, p + p′ u. s. w. wird auch allemal richtig die Gränzen bestimmen, zwischen denen die Scheidungslinien der Theile p, p′ u. s. w. fallen müssen, wie aus dem vorhergehenden zur Genüge erhellet.

Zum Schluße dieses Kapitels will ich noch folgende Aufgabe, deren ähnliche in der Ausübung häufig vorkommen, auflösen.

§. 318. Aufgabe. Es sey (Fig. XLVII.) abcd ein Weiher, oder so etwas; Um ihn herum liegt ein Stück Landes ABCDE, welches unter verschiedene Personen so getheilt werden soll, daß die Scheidungslinien der einzelnen Theile alle an den Umfang des Weihers abcd anstossen.

Aufl. Man nehme innerhalb der Figur abcd einen willkührlichen Punkt R an, und ziehe von ihm, sowohl nach allen Ecken der Figur abcd, als auch der ABCDEF, gerade Linien.

Man berechne nun nach der Ordnung

die Flächen NaAn = △NRA — △nRa
NaBm = △NRB — △mRa,
u. s. w.

Und hierauf die Summen

S = NaAn
SI = NaAn + NaBm
SII = NaAn + NaBm + Bmcl
u. s. w.

Gesetzt, man wolle nun von der Linie An angerechnet, den Theil nABvman = p von der Figur abschneiden.

Man vergleiche also p mit einer von den Summen S, S1 u. s. w., so ergiebt sich, zwischen welche Linien, wie Bm, lc, die Scheidungslinie mv fällt, oder an welche Linie, wie Bm, man ein Dreyeck Bmv setzen muß, dessen Inhalt dem Unterschiede zwischen p, und der nächst kleinern Summe S oder S1 u. s. w. gleich ist.

So wird man also die Lage der Scheidungslinie mv, und so einer jeden andern finden.

Mehreres brauche ich hier zur Erläuterung nicht beyzubringen.
