XXVII. Kapitel.

Von Verwandlung der Figuren in gleich große Dreyecke.

§. 292. Da die hieher gehörigen Aufgaben, sowohl zur Berechnung des Flächeninhalts der Figuren, als auch zur Theilung der Felder durch bloße Zeichnung, unterweilen sehr brauchbar sind, und sich als eine sinnreiche Anwendung einiger der ersten Lehrsätze der Geometrie empfehlen, so halte ich es nicht für unnütz, hier das Wesentliche davon beyzubringen.

Ein Parallelogramm in ein Dreyeck zu verwandeln, wird schon in den Elementen der Geometrie gewiesen. — Ich wende mich daher sogleich zu folgender Aufgabe.

§. 293. Aufgabe. Ein vorgegebenes Viereck ABCD (Fig. XXII.) in ein gleich großes Dreyeck zu verwandeln, dessen Spitze sich in einer gegebenen Ecke der Figur, z. E. bey B, befinde, und die Grundlinie längst AD falle.

Aufl.

Aufl. Man ziehe aus B die Diagonallinie BD, verlängere AD, und ziehe durch C mit BD eine Parallele CE, so wird, nachdem man BE gezogen hat, das Dreyeck ABE = dem Vierecke ABCD.

Bew. Weil CE mit BD parallel, so ist ΔBDE = ΔBCD, weil sie auf einer gemeinschaftlichen Grundlinie BD stehen; also nach Abzug des Stücks BHD, welches beyde Dreyecke gemein haben, ΔCBH = ΔDHE, also ABHD + ΔBCH = ABHD + ΔDHE, oder ABCD = ΔABE.

Zus. I. Das Stück DHE ausserhalb des Vierecks ist dem BCH innerhalb desselben gleich.

Zus. II. Wenn, wie bey (Fig. XXIII.) das Viereck ABCD bey C einen einwärts gehenden Winkel hätte, so bleibt, wie die punktirten Linien ausweisen, dieselbe Auflösung, und das Dreyeck ABE = Viereck ABCD; weil noch, wie vorhin, ΔDHE = ΔBCH.

Anmerkung. Die Parallelen, wie BD, CE, brauchen nicht ganz ausgezogen zu werden. Man lege blos an BD die Hypothenuse eines hölzernen rechtwinklichten Dreyecks, und schiebe längst eines an den Katheden gelegten Linials, die Hypothenuse parallel fort, nach C, so wird

sie

sie auf der verlängerten AD den Punkt E schneiden, wo man demnächst von B aus nur die gerade Linie BE zu ziehen hat.

Daß es sowohl hier, als künftig, vortheilhaft sey, ein etwas grosses Dreyeck zur Ziehung der Parallelen zu gebrauchen, wird jeden die Erfahrung lehren.

§. 294. Aufgabe. Ein Fünfeck ABCDE (Fig. XXIV.) in ein gleich grosses Dreyeck zu verwandeln.

Aufl. Ich setze, die Spitze des Dreyecks solle in B seyn.

Aus B gehen zwey Diagonal-Linien BD, BE.

Mit der ersten ziehe man durch C die Parallele CF, welche die Verlängerung von ED in F schneidet.

So ist, nachdem man BF gezogen hat, das Dreyeck DHF = BHC, folglich das Fünfeck ABCDE = dem Vierecke ABFE, welches man nun nach dem vorhergehenden §. in ein Dreyeck BGF verwandelt, indem man mit BE durch A eine Parallele AG bis an die Verlängerung von FE, und hierauf BG ziehet.

Zus. I. Sind in dem Fünfecke ABCDE (Fig. XXV.) bey A und C einwärts gehende

Win-

Winkel, so bleibt, nach Anweisung der punktirten Linien, einerley Auflösung mit der vorhergehenden, und es wird das △BGF = dem Fünfecke.

Zus. II. Hätte das Fünfeck die Gestalt ABCDE (Fig. XXVI.), so daß bey A und D einwärts gehende Winkel wären, so ziehet man wieder, wie vorhin, mit den Diagonalen BD, BE, durch C und A Parallelen CF, AG, welche in ED, oder deren Verlängerung, bey F und G einschneiden, und es ist abermals das Dreyeck BGF = dem Fünfecke ABCDE.

Weil überhaupt in dem Beweise der Aufgabe nichts vorkömmt, was das Fünfeck auf besondere Winkel einschränkte, so bleibt die daselbst gegebene Auflösung allgemein, das Fünfeck mag, wie man will, gestaltet seyn.

§. 295. Lehrsatz. Es sey (Fig. XXVII.) ABCDEF ein Vieleck von einer beliebigen Anzahl Seiten. Aus einem Winkelpunkte, z. E. A, gehen die Diagonalen AC, AD, AE u. s. w. Wenn man nun nach der Ordnung mit der ersten Diagonale AC, durch B eine Parallele Ba ziehet, welche in die dem Dreyeck ABC zunächst liegende Seite DC, oder in deren Verlängerung, bey a einschneidet, nun ferner mit der zweyten Diagonale AD, durch den Punkt a wieder eine Parallele ab ziehet, welche in die

Seite

Seite ED, oder deren Verlängerung bey b eintrift, hierauf abermals durch b, mit AE die Parallele bc ziehet, die in EF bey c einschneiden u. s. w., bis man mit allen Diagonalen fertig ist, so wird allemal das Dreyeck, wie AcF, welches sich ergiebt, wenn man von A, nach dem letzten Punkt c eine gerade Linie Ac ziehet, dem Inhalte der Figur ABCDEF gleich seyn.

Bew. Man ziehe von A nach a, b, u. s. w. gerade Linien, so hat man erstlich wegen der Parallelen Ba, AC

$$\Delta AaC = \Delta ABC; \text{ mithin}$$

I. $ACDEF + \Delta ABC = ACDEF + \Delta AaC$

d. h.

Sechseck $ABCDEF$ = Fünfeck $AaDEF$

II. Nun ferner, weil ab mit AD parallel

$$\Delta AbD = \Delta AaD; \text{ mithin}$$

$$ADEF + \Delta AaD = ADEF + \Delta AbD$$

d. h.

Fünfeck $AaDEF$ = Viereck $AbEF$.

III. Eben so endlich wegen $\Delta AcE = \Delta AbE$

$$\Delta AEF + \Delta AbE = \Delta AEF + \Delta AcE$$

d. h.

Viereck $AbEF = \Delta AcF$ = Fünfeck $AaDEF$ (II) =
= Sechseck $ABCDEF$ (I.)

Man

Man siehet leicht, wie durch das gewiesene Verfahren überhaupt ein Vieleck von n Seiten, auf eines von n — 1; und dieses wieder auf eines von n — 2 Seiten u. s. w. gebracht wird, bis man auf ein Dreyeck kömmt.

Zus. I. Der Satz würde seine Richtigkeit haben, wenn statt der auswärtsgehenden Winkel, wie (Fig. XXVII.), auch hin und wieder einwärtsgehende vorkämen, wie (Fig. XXVIII.) ausweiset.

Daselbst sind die Winkel bey B und D einwärtsgehend.

Man ziehe wieder, wie vorhin, mit AC, AD, AE, die Parallelen Ba, ab, bc;

so hat man nach ähnlichen Schlüssen, wie vorhin, $\Delta ABC = \Delta AaC$; aber nun

$$ACDEF - \Delta ABC = ACDEF - \Delta AaC$$

d. h.

I. Sechseck ABCDEF = Fünfeck AaDEF

$$\Delta AaD = \Delta AbD\text{; also}$$

$$ADEF + \Delta AaD = ADEF + \Delta AbD$$

oder:

II. Fünfeck AaDEF = Viereck AbEF

$$\Delta AbE = \Delta AcE\text{; also}$$

$$\Delta AEF - \Delta AbE = \Delta AEF - \Delta AcE$$

d. h.

d. h.

Viereck AbEF = ΔAcF mithin aus (II. I.)

ΔAcF = Sechseck ABCDEF

Begreiflich sind diese Schlüsse im Wesentlichen, von denen für (Fig. XXVII.) nicht unterschieden.

Hier in dem Beweise für (Fig. XXVIII.) werden nur die Dreyecke ABC, AaC, AbE, AcE abgezogen, da sie hingegen im Beweise für (Fig. XXVII.) addirt wurden, d. h. die Dreyecke ABC, AaC, AbE, AcE in dem Beweise für (Fig. XXVII.) negativ gesetzt, geben den Beweis für (Fig. XXVIII.)

Und so wird man überhaupt in jedem Falle, die Figur mag einen oder mehrere einwärtsgehende Winkel haben, den Beweis für sie eben so führen können, als man ihn von einer Figur, die eben so viel Seiten, aber lauter auswärtsgehende Winkel hätte, führen würde, wenn man nur allemal überlegt, welche Dinge man in dem Beweise für lauter auswärtsgehende Winkel, als negativ ansehen müsse, damit der Beweis für einwärtsgehende Winkel herauskomme.

Zus. II. In (Fig. XXVII.) hat man auch

ΔAaD = Viereck ABCDA

ΔAbE = Fünfeck ABCDEA

u. s. w.

Zus. III. Das Dreyeck AFc hat mit der Figur ABCDEF allemal ein gewisses Stück, z. E. (Fig. XXVII.) AmDEF gemein; dieses beyderseits vom Dreyecke und der Figur weggenommen, läßt das Stück EDmcE = dem Stücke mCBAm.

So findet man nach einiger Ueberlegung auch in (Fig. XXVIII.), daß die Flächenräume ABi + tDq = iCt + Eqc;

Das heißt so viel:

Die Stücke, welche das Dreyeck, und die ihm gleich große Figur, nicht mit einander gemein haben, sind von gleicher Fläche. Ein Satz, von dem wir künftig Gebrauch machen werden.

§. 296. Aufgabe. Eine Figur ABCDEF (Fig. XXVII. oder Fig. XXVIII.) in ein Dreyeck zu verwandeln, dessen Grundlinie eine von den Seiten der Figur, z. E. AF, ist, dessen Spitze c aber in eine von denen der Grundlinie AF benachbarten Seiten, z. E. in EF, oder deren Verlängerung, fällt.

Aufl. Man ziehe nach der Ordnung mit den aus A gehenden Diagonal-Linien AC, AD, AE, wie im vorhergehenden Lehrsatze, die Parallelen Ba, ab, bc; bey c, wo die letzte Parallele

rallele bc in EF, oder deren Verlängerung, einschneidet, ist die Spitze des Dreyecks AcF, welches am Inhalte der vorgegebenen Figur gleich ist.

Bew. Ist aus dem Lehrsatze (§. 295.) klar.

Zus. I. Obgleich diese Auflösung allgemein ist, die Figur mag aus- oder einwärtsgehende Winkel haben, so ereignet sich doch im letzten Falle sehr oft die Unbequemlichkeit, daß die Durchschnitte der Parallelen, mit den verlängerten Seiten, wie a, b, c, gar zu weit ausserhalb der Figur fallen, und daher oft ein Royalbogen nicht zureichen würde, die erwähnten Durchschnitte anzugeben. Es kann sich selbst der Fall ereignen, daß eine Parallele gar nicht in die gehörige Seite einschneidet, wie wenn z. E. in (Fig. XXIX.) die Punkte D und C mit A in gerader Linie lägen, oder die Diagonallinien AC und AD zusammenfielen, wo alsdann a unendlich weit hinaus fallen würde. Dieser Fall schadet zwar der Allgemeinheit des Lehrsatzes (§. 295.) gar nicht; allein die Ausübung bedarf alsdann einer Abänderung, von der ich in der Folge reden werde. Vorläufig wird also die Auflösung dieser Aufgabe, nur auf solche Figuren anwendbar seyn, die lauter auswärtsgehende Winkel haben, wo sich die erwähnten Schwierigkeiten nicht vorfinden, weil da niemals ein paar Diagonallinien zusammenfallen.

Zus. II. Man gedenke sich durch F (Fig. XXVII. XXVIII.) eine willkührliche gerade Linie Fh, und durch c mit AF die Parallele ch gezogen, so ist, wenn man Ah ziehet, das Dreyeck AFc = AFh; also auch AFh der Figur ABCDEF gleich, d. h. die Figur kann in ein Dreyeck verwandelt werden, dessen Grundlinie eine von den Seiten der Figur z. E. AF ist, dessen Spitze h aber in eine willkührliche durch F gezogene Linie fällt.

§. 297. Aufgabe. Eine vorgegebene Figur ABCDEEGH (Fig. XXX.), die lauter auswärtsgehende Winkel hat, in ein Dreyeck zu verwandeln, dessen Spitze sich in einer von den Ecken der Figur, z. E. in A, befinde, dessen Grundlinie aber längst einer von den Seiten der Figur, z. E. längst DE falle.

Aufl. I. Man gedenke sich von A nach E und D gerade Linien gezogen, so liegt linker Hand AE ein Theil von dem Umfange der Figur, AHGFE, und eben so rechter Hand AD der Theil ABCD.

II. Beyde Stücke AEFGHA, ADCBA verwandle man in Dreyecke; ersteres in ein Dreyeck, dessen Grundlinie AE wäre, und die Spitze in EM, oder in die Verlängerung von ED fiele; das andere Stück, rechter Hand AD, aber in eines, dessen Grundlinie AD wäre, und die Spitze ebenfalls in die Verlängerung von ED, längst DN, fiele.

III. Diese Verwandlungen können, weil lauter auswärtsgehende Winkel vorhanden sind, nach (§. 296.) bewerkstelliget werden, wenn man nach der Ordnung mit den Diagonalen AG, AF, AE, die Parallelen Ha, ab, bc, und mit den Diagonalen AC, AD, die Parallelen Bα, $\alpha\beta$ ziehet.

So ist, wenn man von A nach c und β gerade Linien ziehet, das $\Delta AcE = AHGFEA$; das $\Delta AD\beta = ABCDA$ (§. 296.). Mithin $\Delta AcE + \Delta AED + \Delta AD\beta$, oder $\Delta cA\beta =$ dem Inhalte der Figur.

Zus. I. Wenn die Figur einwärtsgehende Winkel hätte, von der Beschaffenheit, daß die Unbequemlichkeiten (§. 296. Zus. I.) sich nicht ereigneten, so könnte man, vermittelst eben dieses Verfahrens (III.), die Figur in ein Dreyeck verwandeln. Um sich hiebey nicht zu irren, so muß man an die Durchschnitte auf den verlängerten Seiten, nemlich an a, b, c u. s. w., nach der Ordnung die Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. schreiben, um anzudeuten, daß a zur ersten Parallele H a, b zur zweyten ab u. s. w. gehöre. Ohne diese Vorsicht mögte man sonst leicht mit einer gewissen Diagonale eine unrechte Parallele ziehen. So aber weis man immer, welcher der letzte Durchschnitt war, durch den man allemal mit der neuen Diagonale parallel ziehet.

Zus. II. Weil $\Delta AEc = AHGFEA$, so hat man, vermittelst des bisher gewiesenen Verfahrens, die gebrochenen Gränzen AHGFE gleichsam in die geradlinigte Ac verwandelt, ohne Nachtheil des Inhalts der Figur. Eben so die gebrochene Gränze ABCD in die geradlinigte Aβ.

§. 298. Aufgabe. Die Aufgabe des 296sten §es, im Falle die Unbequemlichkeiten mit den einwärtsgehenden Winkeln (§. 296. Zus. I.) statt finden sollten, aufzulösen.

Auflösung. I. Es sey (Fig. XXXI.) ABCDEFGH die Figur, welche man in ein Dreyeck verwandeln soll, dessen Grundlinie AH sey, und dessen Spitze in GH, oder deren Verlängerung, falle. Bey D und F befinden sich einwärtsgehende Winkel.

II.

II. Hier muß man nun erstlich suchen, diese einwärtsgehenden Winkel wegzuschaffen.

Man ziehe durch D mit CE eine Parallele. — Ich setze nun, daß diese Parallele in eine von denen, dem Winkel CDE benachbarten Seiten CB oder EF einschneidet; es geschehe dieses z. E. auf CB bey a; man ziehe hierauf Ea, so ist $\Delta Cra = \Delta ErD$, mithin die Figur EaBAHGFE der vorgegebenen (I.) gleich, und hat jetzt nur noch den einwärtsgehenden Winkel F.

III. Schnitte die Parallele durch D auch in EF ein, so könnte man auf eine ähnliche Art auch von C, nach diesem Durchschnitte eine gerade Linie ziehen, und so den einwärtsgehenden Winkel D weggeschafft haben.

IV. Um nun noch den Winkel F wegzuschaffen, so ziehe man mit EG eine Parallele durch F. Schneidet diese abermals in die benachbarten Seiten (welches jetzt Ea und GH sind), z. E. in Ea bey m, oder in GH bey n, so wird im erstern Falle von G nach m, im andern von E nach n eine gerade Linie gezogen, und in beyden Fällen wird der einwärtsgehende Winkel F weggeschafft seyn, so daß die in (II.) erhaltene Figur EaBAHGFE, sich in EaBAHnE, oder in GmaBAHG, worin

lau-

lauter auswärtsgehende Winkel vorkommen, verwandelt. — Eine von beyden kann man nun nach dem 296sten §. in das verlangte Dreyeck verwandeln, welches denn der in (I.) vorgegebenen Figur gleich seyn wird.

V. Wenn aber die durch D mit CE parallel gezogene Linie (Fig. XXXII.) die benachbarten Seiten (II.) gar nicht schneidet (von Verlängerungen dieser Seiten ist hier die Rede nicht), so wird doch gewiß eine mit BD durch C parallel gezogene Linie in ED eintreffen. Es geschehe dieses bey a. Ziehet man nun Ba, so ist wegen $\Delta BCr = \Delta Dra$, ohne Nachtheil des Inhalts der Figur, die Gränze BCDE in BaE verwandelt. Bey a wird aber nun ein einwärtsgehender Winkel BaE seyn, der sich nach (II.) wird wegschaffen lassen. Man ziehe mit BE durch a eine Parallele; sie schneidet die dem Winkel BaE benachbarte Linie BA in b. Ziehet man nun Eb, so ist ferner, ohne Nachtheil des Inhalts der Figur, die gebrochene Gränze BaE, und folglich auch die BCDE, in die geradlinigte Eb verwandelt; und es bleibt nur noch der bey F sich befindende einwärtsgehende Winkel wegzuschaffen, oder die gebrochene Gränze EFG in eine geradlinigte zu verwandeln, übrig.

VI. Die mit EG durch F gezogene Parallele, schneidet hier sowohl Eb (V.), als auch GH. Letztere in c. Man ziehe Ec, so ist der Winkel EFG weggeschafft, und nun endlich die Figur cEbAHc, der vorgegebenen GFEDCBAH gleich, und von einwärtsgehenden Winkeln befreyt: wo man denn cEbAHc, nach (§. 296.), in das verlangte Dreyeck verwandeln kann.

VII. Wenn in der vorgegebenen Figur mehrere einwärtsgehende Winkel C, D, E (Fig. XXXIII.) nach der Reihe auf einander folgen, so schafft man einen nach dem andern, nach (II. oder V.), fort; oder wie man es sonst am bequemsten findet. Hier würde ich mit BD durch C eine Parallele, und durch E mit FD eine Parallele ziehen. Erstere schneidet BA in a, die andere FG in c; ziehet man nun Da und Dc, so ist die gebrochene Gränze BCDEF in die aDc verwandelt. Diesen einwärtsgehenden Winkel aDc aber ferner wegzuschaffen, müßte man wohl nach (V.) verfahren, weil eine mit ac durch D gezogene Parallele, weder zwischen a und A, noch zwischen c und G einschneidet. Hier würde ich also mit GD durch c eine Parallele ziehen. Sie schneide Da in m, so wäre erstlich die gebrochene Gränze GcD in die geradlinigte Gm verwandelt, und man hätte nur noch den Winkel Gma wegzuschaffen. Man ziehe also ferner

ner mit Ga durch m eine Parallele; sie schneidet GH in r; wenn ich endlich ar ziehe, so sind alle einwärtsgehenden Winkel weggeschaft, und man hat also nur die Figur AHra in einen Triangel zu verwandeln, nach (§. 297.).

VIII. Wer das bisherige wohl eingesehen hat, wird leicht in jedem Falle beurtheilen, wie man es am bequemsten anzufangen habe, daß die einwärtsgehenden Winkel wegfallen, und statt der vorgegebenen Figur, endlich eine herauskomme, die lauter auswärtsgehende Winkel hat.

Um die Figuren nicht durch gar zu viele Linien undeutlich zu machen, so habe ich einige Parallelen nicht würklich ausgezogen, sondern blos ihre Durchschnitte auf den gehörigen Seiten der Figur angegeben.

Man siehet leicht, daß die bisherige Wegschaffung der Winkel immer auf dem Satze beruhet, daß, wenn z. E. durch die Spitze eines beliebigen Winkels C (Fig. XXXIV.), mit der durch beyde benachbarte Spitzen B, D gehenden Linie BD, eine Parallele nCm gezogen wird, welche in die dem Winkel DCB benachbarten Seiten DE, AB, bey m oder n einschneidet, alsdann eine entweder von B nach m, oder

von

von D nach n gezogene gerade Linie, die gebrochene Gränze BCD allemal, ohne Nachtheil des Inhalts der Figur, in die geradligten Bm oder Dn verwandelt. Denn weil nm mit BD parallel, so ist $\triangle BDm$ allemal $= \triangle BDC$, mithin nach Abziehung des gemeinschaftlichen Dreyecks BrD, das $\triangle Drm = \triangle BrC$, und folglich die Figur ABCDE u. s. w. = der Figur ABmE u. s. w. Und eben so auch die Figur ABCDE u. s. w. = AnDE u. s. w.

Auch in (V.), wo die Parallele nicht in die benachbarten Seiten einschneidet, wird man doch die Anwendung dieses Satzes wahrnehmen, und so überall in dem bisherigen (V. VII.)

§. 299. Aufgabe. Eine jede Figur, die auch einwärtsgehende Winkel hat, in ein Dreyeck zu verwandeln, dessen Spitze in einer willkührlichen Ecke der Figur liege, die Grundlinie aber längst einer gegebenen Seite der Figur falle, die beyden Seiten natürlicherweise ausgenommen, die an der erwähnten Ecke unmittelbar anliegen.

Aufl. I. Es sey (Fig. XXXV.) die Fläche ABCD u. s. w. in ein Dreyeck zu verwandeln,

deln, dessen Spitze bey A, und die Grundlinie längst HN falle.

II. Man gedenke sich von A, innerhalb der Figur, eine gerade Linie AV gezogen, die NH in V schneidet, so liegt

III. Auf der einen Seite von AV ein Stück der Figur, nemlich ABCDEFGHV, welches man in ein Dreyeck verwandele, dessen Grundlinie AV wäre, und die Spitze in die gerade Linie NH, oder deren Verlängerung, falle.

IV. Rechter Hand AV liegt hier das Stück AIKLMN. Auch dieses verwandele man in ein Dreyeck, dessen Grundlinie AV wäre, und die Spitze längst HN falle, so wird die Aufgabe gelöset seyn.

V. Erst muß man aber, damit nach (§. 297.) verfahren werden kann, die einwärtsgehenden Winkel, aus den Stücken (III. IV.) wegschaffen (§. 298.).

Hier würde ich so verfahren:

VI. Die durch D gehende Parallele mit CE, schneidet CB in a. Ziehet man nun Ea, so ist die gebrochene Gränze BCDE in BaE verwandelt.

VII. Eine Parallele mit BE durch a schneidet EF in b. Zöge man nun Bb, so wäre die ge-

gebrochene Gränze BaE (VI.) ferner in Bb verwandelt.

VIII. Die Parallele mit Gb durch F schneidet Bb (VII.) in c. Zöge man nun Gc, so wäre die Gränze GFb in Gc verwandelt, und statt des Umfanges GFEDCB hätte man nun blos GcB.

IX. Eine Parallele mit GB durch c schneidet BA in d; so wäre nun ferner GcB in Gd verwandelt, und es wäre nun noch blos HGd, durch eine Parallele mit Hd durch G, die NH in e schneidet, in die geradlinigte Gränze ed zu verwandeln, wo denn die Figur AdeV = dem Stücke (III.).

X. Eben so verwandelte man die Gränze IKL erst in $L\alpha$; nun ferner $ML\alpha$ in $M\beta$, und endlich $NM\beta$ in $\beta\gamma$. So ist $A\beta\gamma V$ = dem Stück AIKLMNV.

XI. Diese Figur $Ade\gamma\beta A$ kann man nun, nach (§. 297.), in einen Triangel verwandeln, wenn man mit den Diagonalen Ae, $A\gamma$, durch d und β Parallelen bis an die Verlängerung von NH ziehet: wenn diese in k und m einschneiden, so ist kAm der verlangte Triangel = $Ade\gamma\beta A$ = der in (I.) vorgegebenen Figur.

Ver-

Vergleichung dieses Verfahrens mit der (§. 297.) angegebenen Methode, wenn man solche auch auf gegenwärtige Figur anwenden wollte.

§. 300. Ich will hier dieselbe Figur, vermittelst des Verfahrens (§. 297.), in ein Dreyeck verwandeln.

I. Ich ziehe mit der ersten Diagonale AC durch B eine Parallele, die in die Verlängerung von DC bey 1 eintrift. — Es ist klar, daß man dadurch die gebrochene Gränze ABC in die geradlinigte A 1 würde verwandelt haben, so daß die Figur ABCDE u. s. w. auf die A1DE u. s. w. gebracht wäre.

II. Nun ziehe ich ferner mit der zweyten Diagonale AD eine Parallele durch 1, welche in die Verlängerung von ED bey 2 einschneidet. — Zöge man nun von A nach 2, so wäre ohne Nachtheil des Inhalts der Figur, abermals die gebrochene Gränze A1D (I.) in die geradlinigte A 2 verwandelt.

III. Die Parallele mit der dritten Diagonale AE durch 2, schneidet die Verlängerung von EF bey 3 — die Parallele durch 3 mit der vierten Diagonale AF, schneidet die verlängerte GF bey 4.

IV.

IV. Bis hieher gieng das Verfahren des 297 §. auch bey den einwärtsgehenden Winkeln noch immer gut von statten. Nun aber ereignet sich die Schwierigkeit, daß, wenn man ferner durch den Punkt 4, mit der Diagonale AG eine Parallele ziehen wollte, solche gar nicht, oder wenigstens sehr weit entfernt, in die verlängerte GH einschneiden würde, weil AG mit GH beynahe in einer geraden Linie liegt.

Hier überlege man nun folgendes:

V. Man gedenke sich die gerade Linie A4 gezogen, so ist dies die geradlinigte Gränze, in welche, nach dem bisherigen Verfahren, die gebrochene von A bis F verwandelt worden ist, d. die Figur ABCDEFGH u. s. w. ist = A4GH u. s. w., weil nemlich, wie sich nach und nach erweisen läßt, das Stück Fläche ABGr = r4FEDr wird.

VI. Man hätte also nun eigentlich die gebrochene Gränze A4GH in eine geradlinigte zu verwandeln, welches durch Wegschaffung des einwärtsgehenden Winkels G, nach (§. 298.), auf folgende Art geschiehet.

Man ziehe mit H4 durch G eine Parallele — Sie schneidet HN in 5; zöge man nun von 4 bis 5 eine gerade Linie, so wäre der einwärtsgehende Winkel G weggeschafft, und man

man hätte endlich noch die gebrochene Gränze A45 wegzuschaffen, indem man mit A5 durch 4, bis an die verlängerte NH eine Parallele, und nun nach dem Durchschnitte k von A eine gerade Linie Ak zöge, welche denn endlich die geradlinigte Gränze gäbe, die statt der gebrochenen zwischen A und H gesetzt werden kann.

VII. Eben so würde nun die gebrochene Gränze AIKL u. s. w. reducirt.

Mit der Diagonale AK gehet durch I die Parallele Ia′, mit AL durch a′ die Parallele a′ b′;

Die Parallele mit AM durch b′ würde in die Verlängerung von MN sehr weit einschneiden. Ueberlegt man indessen, daß, wenn man Ab′ zöge, die Gränze AIKLMN eigentlich auf Ab′MN bisher reducirt worden ist, so würde man nun die, nach (§. 297.), durch b′ mit AM parallel zu ziehende Linie weglassen; und dagegen, nach (§. 298.), den einwärtsgehenden Winkel b′MN wegschaffen, und endlich die gebrochene Gränze Ab′MN in die geradlinigte Am verwandeln.

VIII. Wenn man dieses Verfahren mit dem im vorhergehenden §. vergleicht, so siehet man leicht, daß es sich von jenem darin unterscheidet, daß dorten alle zur Verwandlung

der

der gebrochenen Gränze in eine geradlinigte, nöthigen Parallelen, so gezogen und ausgewählet wurden, daß sie unmittelbar in die Seiten der Figur einschneiden, daß hier hingegen die Parallelen auch in die Verlängerungen der Seiten eintreffen. In so fern hat nun das erste Verfahren vor dem zweyten Vorzüge, weil es weniger Raum auf dem Papiere erfordert; da hingegen bey dem andern Verfahren, wo man nach der Ordnung mit den aus einem einzigen Punkte der Figur gehenden Diagonalen, Parallelen ziehet, deren Durchschnitte mit den verlängerten Seiten oft weit hinausfallen. Hingegen sind bey dem ersteren Verfahren zur Wegschaffung der gebrochenen Gränze oft mehrere Linien zu ziehen nöthig, und die bequemste Art, die verschiedenen einwärtsgehenden Winkel wegzubringen, erfordert manchesmal viel Aufmerksamkeit, da sich hingegen das zweyte Verfahren wieder durch seine Simplicität empfiehlt, weil man immer von einer Diagonale auf die nächstfolgende fortgeht, und durch den nächst vorhergehenden Durchschnitt, mit ihr eine Parallele ziehet, die denn auf der gehörig verlängerten Seite, den folgenden Durchschnitt giebt (I. II. III.).

Ich denke also, wenn man, nach Verhältniß der Umstände, beyde Verfahren mit einander verbindet, so wird man auch beyder Vortheile

theile mit einander vereinigen; an solchen Stellen, wo also die Durchschnitte der Parallelen nicht ausserhalb des Papiers fallen, kann man das Verfahren (§. 297.) gebrauchen — und in andern Fällen das (§. 298.), wie z. E. in (IV.) und (VII.) geschehen ist.

Anmerkung.

§. 301. Die bisherige Methode, Figuren in gleichgroße Dreyecke zu verwandeln, hat mein seel. Vater in einer der Königl. Societät der Wiss. in Göttingen vorgelesenen Abhandlung gewiesen. Daß man in ältern Schriften schon ähnliche Aufgaben, aber nicht in der Allgemeinheit, und Anwendung auf alle Gattungen geradlinigter Figuren, in der sie mein Vater vorgetragen hat, findet, ist wohl nicht zu läugnen. Ihm aber deswegen das Verdienst, diese Aufgabe sehr erweitert zu haben, schmälern zu wollen, wie es Hr. Wilke in einer 1756. zu Halle herausgegebenen Schrift über die Verwandlung und Theilung der Felder, noch mehr aber in einer bey Gelegenheit einer Recension über die erwähnte Schrift von ihm herausgekommenen Vertheidigung, gethan hat, ist, ausserdem daß sich Hr. W. diese Erfindung zueignen wollte, ein Umstand, der öfter in der Gelehrten-Republik vorfällt.

Wie

Wie weit sich ihr Gebrauch, bey Feldertheilungen u. dgl., erstrecket, wird sich in der Folge ausweisen.

Daß die Berechnung des Flächeninhalts einer Figur dadurch erleichtert wird, daß man sie vorher in ein Dreyeck verwandelt, welches man demnächst ausrechnet, verstehet sich von selbst.

Die Parallelen müssen freylich mit der nöthigen Vorsicht gezogen werden, wenn das Dreyeck den Inhalt der Figur so genau geben soll, als man ihn unmittelbar finden würde.

Zu wünschen wäre es, daß die Anwendung davon auf krummlinigte Figuren brauchbarer wäre. Denn wenn man gleich den Umfang einer krummlinigten Figur in lauter kleine Stücke, die man als geradlinigt ansehen darf, zerlegen, und solchergestalt die Verwandlung der krummlinigten Figur, auf die Verwandlung einer geradlinigten bringen könnte, so wird man doch finden, daß, wegen der vielen kleinen Stücke, aus denen man sich den Umfang zusammengesetzt gedenket, die Arbeit nach den vorhergehenden Methoden immer sehr mühsam bleibt. — Ich werde daher suchen, sowohl die Verwandlung der geradlinigten, als auch krummlinigten Figuren, jetzt auf eine leichtere Art zu behandeln.

Ein sehr bequemes Verfahren, eine jede Figur in ein gleichgroßes Rechteck, und folglich auch in ein Dreyeck zu verwandeln.

§. 302. Um zu zeigen, worauf das Wesentliche dieses Verfahrens ankömmt, so werde ich erstlich die Verwandlung eines Trapezii, welches zwey parallele Seiten hat, vortragen.

Aufgabe. Ein Trapezium (Fig. XXXVI.) ABCD, wo AB mit CD parallel ist, in ein gleichgroßes Rechteck, dessen eine Seite gegeben ist, zu verwandeln.

Aufl. I, Man ziehe willkührlich YZ auf beyde AB, CD gemeinschaftlich senkrecht;

II. so ist Ya die Höhe des Trapezii.

III. Gesetzt nun, des Rechtecks Grundlinie solle = YZ seyn. Man errichte durch Z eine senkrechte Linie Rr; wie groß wird nun die Höhe des Rechtecks (die längst Rr fallen wird) seyn müssen? damit es an Fläche dem vorgegebenen Trapezio gleich ist.

IV. Man halbire BC und AD bey α und β, und ziehe durch α, β mit YZ Parallelen, welche Rr bey γ und δ durchschneiden.

V. Von Y ziehe man nach γ und δ gerade Linien, die CD in m und n durchschneiden; so wird

wird mn die gesuchte Höhe des Rechtecks seyn, dergestalt, daß, wenn man durch m, n mit YZ Parallelen ziehet, das Rechteck KLMN dem Trapezio ABCD gleich seyn wird.

VI. Bew. Die Fläche des Trapezii ist (§. 276.) $= \frac{AB + CD}{2} . Ya$. d. h. die mittlere arithmetische Proportional-linie zwischen AB und CD, multiplicirt mit Ya.

VII. Weil nun BC und AD bey α und β halbirt worden sind, so ist $\alpha\beta$ diese mittlere Proportionale; nemlich $\alpha\beta = \frac{AB + CD}{2} = \gamma\delta$ (IV).

VIII. Also die Fläche des Trapez. $= Ya . \gamma\delta$.

IX. Nun ist in dem Dreyeck $\delta\gamma Y$, weil mn parallel mit $\gamma\delta$

$$Ya : mn = YZ : \delta\gamma, \text{ also}$$
$$Ya . \delta\gamma = YZ . mn$$

oder die Fläche des Trapezii (VIII.) $= YZ . mn$ = einem Rectangel, dessen Grundlinie $= YZ$, und die Höhe $= mn$; Also das Trapezium = dem Rectangel MKLN.

Zus. I. Es ist auch, wie sich leicht erweisen läßt, das Rectangel KLYZ = Trapez. YBCa, und YZMN = YADa.

Zus. II. Wenn die Punkte B' und A bey Y zusammen fielen, und man also statt des Trapezii das Dreyeck CYD in ein gleich großes Rectangel, dessen Grundlinie = YZ, zu verwandeln hätte, so würde die Auflösung dieselbe bleiben. In diesem Falle halbirte man YC und YD, und verführe, wie vorhin, um die Höhe des Rechtecks zu finden.

§. 303. Aufg. Es sey nun (Fig. XXXVII.) das Vieleck ABCDEFIKLA in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Höhe längst einer beliebigen Seite der Figur, z. E. längst FI, falle, die Grundlinie aber einem Perpendikel von einer beliebigen Ecke der Figur A auf IF gezogen, oder = AZ sey.

Aufl. I. Um die Höhe des Rechtecks zu erhalten, verfahre man auf folgende Art

Man verlängere erstlich FI unbestimmt, und halbire nun nach der Ordnung die Seiten AB, BC, CD, DE, EF, bey α, β, γ, δ, ε.

II. Man fälle von B, C, D, E auf AZ Perpendikulairlinien herunter, die also insgesammt der verlängerten FI parallel seyn werden.

III. An AZ lege man ein Parallel-linial, oder ein hölzernes Dreyeck, ziehe durch α, β, γ, δ, ε Parallelen mit AZ (§. 64.), und bemerke ihre Durchschnitte auf der Verlängerung von ZF, nach der Ordnung mit Zahlen 1, 2, 3, 4, 5.

Die Parallelen sind nemlich $\alpha 1$, $\beta 2$, $\gamma 3$, $\delta 4$, $\varepsilon 5$

IV. Man lege nun an A1 ein Linial, und bemerke dessen Durchschnitt m auf dem ersten Perpendikel Bb.

Hierauf lege man an A2 an, und ziehe durch m mit A2 eine Parallele mn, welche das zweyte Perpendikel Cc bey n durchschneidet.

Ferner ziehe man mit A3 durch n die Parallele no, bis an das dritte Perpendikel u. s. w.

So wird endlich die durch p mit A5 gezogene Parallele, das lezte Perpendikel in q durchschneiden; und Zq wird die Höhe eines Rectangels AZqQ seyn, welches dem Raume ABCDEFZA, oder dtr Summe der Trapezien ABb; BcCc; CcDd; DdEe; EeFZ gleich seyn wird,

V. Bew. Das Dreyeck ABb = dem Rechteck AZ . bm (§. 302. Zus. II.).

VI.

VI. Man gedenke sich durch b mit mn, oder mit A2 (IV.), eine Parallele bν; so ist AZ : Z2 = bc : cν; Also AZ . cν = Z2 . bc; Aber Z2 ist die mittlere arithmetische Proportionale zwischen Bb und Cc (§. 302.). Mithin das Rectangel AZ . cν = dem Trapez. BbCc

Aber nν = bm; Also AZ . nν = AZ . bm = dem Dreyeck ABb (V.).

Mithin AZ. (cν + νn), oder AZ . cn = ΔABb + Trapez. BbCc.

Wenn man sich auf eine ähnliche Art, durch c mit no eine Parallele vorstellet, so erhellet völlig nach ähnlichen Schlüßen, daß das Rechteck AZ . do = ΔABb + Trapez. BbCc + Tr. CcDd.

und so endlich auch das Rechteck AZ . Zq =

ΔABb + Tr. BbCc + Tr. CcDd u. s. w. + Tr. EeZF.

oder das Rechteck AQZq = der Figur ABCDEFZA.

VII. Auf eben die Art verwandelt man den Raum ALKIZA in das Rechteck AZMN, indem man von L, K u. s. w. Perpendikulairlinien auf AZ herabfällt, die Seiten AL, LK u. s. w. halbiret, und wie vorhin verfährt.

VIII. So ist demnach das ganze Rectangel MQNq der vorgegebenen Figur gleich.

Zus. I. 1. Die bisherigen Schlüße gelten, die Figur mag ein- oder auswärts gehende Winkel haben, wie man will.

Zur Erläuterung mag noch die Figur ABCDEF (Fig. XXXVIII.) dienen.

2. Hier sind wieder die Seiten AB, BC, CD, DE nach der Ordnung bey α, β, γ, δ halbirt, und die mit AF parallel gehende Linien $\alpha 1$, $\beta 2$, $\gamma 3$, $\delta 4$ gezogen.

Hier ist nun der Fall, daß das Perpendikel von B, oder Bb, durch A gehet; und das Perpendikel Cc linker Hand A fällt.

3. Legt man also an A1, wie vorhin (IV.), das Linial, so durchschneidet A1 die Bb sogleich selbst bey A;

Nun ziehet man mit A2 eine Parallele durch den eben erhaltenen Punkt A. Sie schneidet die auf Bb folgende Perpendikularhöhe Cc bey n.

Hier fällt also n unterhalb AF.

4. Die Parallele mit A3 durch n schneidet Dd bey o; die Parallele mit A4 durch o schneidet FE bey q; und das gesuchte Rechteck ist AKqF.

5. Daß hier die besondern Umstände, daß Bb durch A gehet, und Cc linker Hand A fällt, in obigem Beweise (V.) nichts wesentliches verändern, wird folgendermaaßen erhellen.

6. Weil

6. Weil F2 die mittlere Proportionale zwischen AB und Cc, oder zwischen Bb und Cc ist, und AF : bc = F2 : cn (3); so ist das Rechteck AF . cn = Trap. ABCc.

7. Nun gedenke man sich cω parallel mit no, oder mit A3 (4), so ist AF : F3 = cd : dω, oder, welches einerley ist,

$$AF : \frac{Cc + Dd}{2} = cd : d\omega,$$

mithin das Rechteck AF . dω = dem Trapez. CcDd.

8. Also wegen do = dω — oω = dω — cn; Wird das Rectangel AF . do = AF . dω — AF . cn = dem Trap. CcDd — Trap. ABCc (6. 7.) oder

das Rectangel AF . do = dem Raume ABCDdA.

9. Und so ferner das Rectangel AF . Fq, oder AFKq = dem Raume (8.) + Trap. DdEF, also = der vorgegebenen Figur ABCDEFA.

10. Man siehet leicht, daß gegenwärtiger Beweis in der Hauptsache von dem vorigen der Aufgabe (§. 303.) nicht wesentlich unterschieden ist. Er verwandelt sich völlig in jenen, wenn man nur das dortige bm = o, und das dortige cn negativ setzet, weil hier der Einschnitt n unterhalb AF fällt, und b und A zusammen fallen.

Zus.

Zus. II. Wollte man die Figur (§. 303.) in ein gleich grosses Dreyeck verwandeln, dessen Spitze in A (Fig. XXXVII.), und die Grundlinie långst der Seit IF fallen sollte, so dürfte man nur Zq = qr; ZN = Ns nehmen, und Ar, As ziehen, so wåre das ΔAsr = dem Rechtecke MQNq, also = der vorgegebenen Figur. Da wåren also auch die gebrochenen Grånzen ABCDEF, u. ALKI in die geradlinigten Ar, As verwandelt.

Anmerkung.

§. 304. Das Verfahren (§. 303.), eine Figur in ein gleich grosses Rechteck, und folglich auch in ein Dreyeck (Zus. II.) zu verwandeln, ist ohnstreitig weit einfacher und zur Ausübung bequemer, als die Auflösung (§. 297.). Dabey mögen die Winkel an der Figur aus- oder einwårts gehende seyn, wie man will, so bleibt die Konstruction immer dieselbe (§. 303. und das. Zus. I.). Auch die Gefahr, sich zu irren, ist hier weniger zu befürchten, und in der Figur selbst brauchen keine anderen Linien, als die Perpendikel Bb, Cc u. s. w., ganz ausgezogen zu werden, so wie denn überhaupt die Konstruction des Rechtecks bey weitem nicht so viel Raum auf dem Papiere einimmt, als es unterweilen bey obigen (Verfahren (§. 297.)

wegen

wegen der Verlängerungen der Seiten erfordert wird.

Was aber gegenwärtiges Verfahren vorzüglich empfiehlt, ist dessen bequeme Anwendung auf die Verwandlung krummlinigter Figuren in gleich große Rechtecke.

Es seyen (Fig. XXXVIII.) die Punkte A, B, C, D u. s. w. in dem Umfange einer krummen Linie, so nahe neben einander angenommen, daß man die Bogen AB, BC, CD u. s. w. ohne beträchtlichen Irrthum für gerade annehmen darf. Halbirt man nun diese Bogen, oder vielmehr die Sehnen AB, BC u. s. w., und verfährt wie vorhin bey Bestimmung der auf die Ordinaten Bb, Cc u. s. w. zu liegen kommenden Punkte m, n, o, p, q, so wird das Rectangel AZQq, der krummlinigten Figur ABCDEFZA desto näher kommen, je näher man die Punkte A, B, C u. s. w. neben einander angenommen hat.

Konstruction der Formel
(§. 283. IV.)

§. 305. I. Längst der Abscissenlinie AE einer krummen Linie Abcde (Fig. XXXIX.) seyen lauter gleiche Theile AB = BC = CD = DE genommen, von einer solchen Größe, daß die Stücke der krummen Linie zwischen den

Ordi-

Ordinaten Bb, Cc u. s. w. ohne merklichen Fehler als gerade Linien angesehen werden dürfen.

II. Wenn man AE = x nennet, und x hier zu n = 4 gleichen Theilen nimmt, so ist, weil hier die Ordinate bey A = o, der Flächenraum bis an die Ordinate Ee, oder

$$AbcdeEA = (\tfrac{1}{2}E + B + C + D)\frac{x}{n}$$

(§. 283. IV.); wo die Ordinaten Bb = B; Cc = C; Dd = D; Ee = E.

III. Gesetzt nun, der Raum AbcdeEA solle in ein Rectangel verwandelt werden, dessen Grundlinie = AE = x; Wie groß wird die Höhe desselben = y seyn.

IV. Die Fläche des gesuchten Rechtecks ist = x. y.

Also soll seyn $x.y = (\tfrac{1}{2}E + B + C + D)\frac{x}{n}$,

mithin $y = \frac{B}{n} + \frac{C}{n} + \frac{D}{n} + \frac{\frac{1}{2}E}{n}$

V. Auf der verlängerten Abscissenlinie EA nehme man also Aβ = AD; Aγ = AC; Aδ = AB, und halbire Ee = E bey ε,

VI. Man ziehe mit βb durch A eine Parallele, welche Bb in 1 durchschneidet, nun mit

γc durch 1 eine Parallele, welche Cc in 2 durchschneidet, durch 2 ferner eine Parallele mit δd, die Dd bey 3 durchschneidet u. s. w., endlich mit $A\varepsilon$ eine Parallele durch 3, welche in Ee bey 4 eintrift, so wird $E4$ die gesuchte Höhe des Rechtecks $AmE4$ seyn, welches dem Flächenraume (II.) gleich ist.

Bew. VII. Es ist $\beta B : Bb = AB : B1$ (VI.); Aber weil βB so viel gleiche Theile als AE enthält (V.); so ist $\beta B = n \cdot AB$; mithin $AB = \frac{1}{n}\beta B$; folglich auch $B1 = \frac{1}{n}Bb = \frac{1}{n}B$.

VIII. Man gedenke sich durch B mit γc, oder mit der Linie durch die Punkte 1, 2 (VI.), eine Parallele Br, so ist wegen

$$\gamma C : Cc = BC : Cr \text{ oder wegen}$$
$$n \cdot BC : Cc = BC : Cr$$

$Cr = \frac{1}{n}Cc = \frac{1}{n}C$; folglich wegen $r2 = B1 = \frac{1}{n}B$, die Linie $C2 = \frac{1}{n}B + \frac{1}{n}C$.

IX. Und so ferner nach ähnlichen Schlüssen

$$C3 = \frac{1}{n}B + \frac{1}{n}C + \frac{1}{n}D$$

$$E4 = \frac{1}{n}B + \frac{1}{n}C + \frac{1}{n}D + \frac{\frac{1}{2}E}{n} = y \text{ (IV.)}.$$

Also E 4 die gesuchte Höhe des Rechtecks.

Anmerkung.

§. 306. Daß die bisherigen Aufgaben dienen können, die Fläche einer krummlinigten Figur, durch Berechnung des ihr gleich großen durch Zeichnung gefundenen Rechtecks, zu bestimmen, ohne daß man, wie sonst, Ordinaten zu messen braucht, wird von selbst erhellen.

Die Aufgabe (§. 303.) hat auch Lambert (Beyträge zur Mathematik, III. Th. p. 60.) abgehandelt, — Daß aber meine Konstruction leichter und einfacher, als die Lambertische ist, wird aus der Vergleichung beyder bald zu ersehen seyn.