XXVI. Kapitel.

Ausrechnung der Felder.

§. 272. Felder, deren Inhalt man bestimmen soll, haben entweder an ihrem Umfange lauter geradlinigte, oder auch krummlinigte Gränzen.

Geradlinigte Felder zu berechnen, hat weiter keine Schwierigkeit, wenn man nur die Fläche eines Dreyecks zu bestimmen weiß, d. h. die Regel kennet, daß, wenn a und b Grundlinie und Höhe eines Dreyecks bedeuten, die Fläche des Dreyecks $= a \cdot \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} b \cdot a = \frac{a \cdot b}{2}$ sey — wo denn der Inhalt in solchen Quadraten herauskömmt, dergleichen die Längenmaaße waren, womit man a und b gemeinschaftlich ausgemessen hat (§. 270. I.).

Jedes Vieleck läßt sich nun durch Diagonalen, oder auf welche Art man will, in Dreyecke zerlegen. Die Summe der Flächen aller einzelnen Dreyecke, giebt den Inhalt des Vielecks. — Durch ein Beyspiel brauche ich diese ganz bekannte Vorschrift wohl nicht zu erläutern.

tern. — Ich will also nur noch folgende Erinnerungen beyfügen.

Es ist zwar gleichgültig, welche Seite eines jeden Dreyecks man zur Grundlinie annehmen will. — Indessen wählet man gerne die längste Seite, damit die Höhen der Dreyecke nicht zu groß werden, und man die Grundlinien nicht nöthig hat zu verlängern. Auch ist es bequem, wenn eine Diagonallinie zur gemeinschaftlichen Grundlinie zweyer daran gränzenden Dreyecke angenommen wird. Bey der Bestimmung der Höhen muß man übrigens alle mögliche Genauigkeit beobachten. — Am besten mißt man sie, wenn man den einen Zirkelfuß in die Spitze des Dreyecks, welche der Grundlinie gegenüber steht, einsetzt, und den Zirkel so weit eröffnet, daß ein Bogen, den man aus der erwähnten Spitze beschreibt, die Grundlinie berühren würde. Alsdann ist zwischen beyden Zirkelspitzen so genau, als möglich, die Höhe des Dreyecks, die man alsdann auf dem verjüngten Maasstabe, womit die Figur auf dem Felde gezeichnet worden ist, misset.

Wenn man alle Seiten eines Dreyecks weiß, oder messen will, so braucht man die Höhe desselben nicht zu bestimmen, sondern man findet den Inhalt sogleich aus den drey Seiten nach folgender Aufgabe.

§. 273.

§. 273. Aufgabe. Aus den drey Seiten $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$ eines Dreyecks (Fig. XIV.) den Inhalt zu finden.

Aufl. I. Man gedenke sich die Höhe BD, so ist $BD = a \sin A$, und die Fläche des Dreyecks $= \frac{ab \sin A}{2} = F$.

II. Nun ist (Trig. S. VII.)

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos A = c^2$$

Also $\cos A = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$;

mithin

$$1 + \cos A = 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a + b - c)(a + b + c)}{2ab}$$

III. Ferner

$$1 - \cos A = \frac{c^2 - (a - b)^2}{2ab}$$

$$= \frac{(c - a + b)(c + a - b)}{2ab}$$

IV.

IV. Und folglich aus (II. III.);

$$(1 + \cos A)(1 - \cos A)$$

das will sagen $1 - \cos A^2$, oder:

$$\sin A^2 = \frac{(a+b+c).(a+b-c).(c+b-a).(c+a-b)}{4\,a^2\,b^2} = G$$

$\sin A = \sqrt{G}$, und die Fl. des Dr. $F = \dfrac{a\,b\sqrt{G}}{2}$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c).(a+b-c).(c+b-a).(c+a-b)}$$

d. h. wenn man $a + b + c = M$

$a + b - c = N$

$c + b - a = O$

$c + a - b = P$ setzet, so wird

durch Logarithmen, wegen $\log. 4 = \frac{1}{2}\log. 16$

$\log. F = \frac{1}{2}(\log. M + \log. N + \log. O + \log. P - \log. 16)$

V. Durch Worte diese Regel ausgedrückt, so heißt sie so:

1) Man addire erstlich alle drey Seiten des Dreyecks zusammen.

2) Ferner addire man jede zwey Seiten und ziehe von ihrer Summe die dritte ab. — Dergleichen Reste bekommt man drey.

3) Die Summe der Logarithmen der 4 Größen (1) und (2), um den Logarithmen der Zahl 16 vermindert, und alles mit 2 dividirt, giebt den Logarithmen von dem Inhalte des Dreyecks.

4) Verlohnte sichs aber nicht der Mühe, durch Logarithmen zu rechnen, so multiplicire man die Größen (1) und (2) in einander, ziehe aus dem Producte die Quadratwurzel, und dividire sie mit 4, so hat man sogleich des Dreyecks Inhalt.

Ex. Es seyen die drey Seiten $a = 442^{\mathrm{I}}$; $b = 418^{\mathrm{I}}$; $c = 353^{\mathrm{I}}$; so wird $M = 1213$; $N = 507$; $O = 329$; $P = 377$;

$$\begin{array}{rl}
\log M = & 3,0838608 \\
\log N = & 2,7050080 \\
\log O = & 2,5171959 \\
\log P = & 2,5763413 \\
\hline
 & 10,8824060 \\
\log 16 = & 1,2041200 \\
\text{Rest} = & 9,6782860 \\
\hline
\text{halbirt} & 4,8391430
\end{array}$$

Hiezu gehört die Zahl 69047. Also die Fläche des Dreyecks = 690 Qu. Ruthen 47 Q. Schuh, oder den Morgen zu 200 Qu. R. gerechnet, 3 M. 90 Qu. R. 47 Q. S.

Zusatz. Statt von jedem Paare von Seiten die dritte allemahl abzuziehen, um die Werthe von N, O, P zu erhalten, kann man etwas bequemer auch auf folgende Art rechnen.

Ist

Ist nemlich $a + b + c = M$ so hat man auch

$$O = M - 2a$$
$$P = M - 2b$$
$$N = M - 2c$$

d. h. man zieht von M oder der Summe aller drey Seiten der Ordnung nach immer das doppelte einer jeden einzeln Seite ab, so erhält man die Größen O, P, N auf eine etwas kürzere Weise.

Anmerkung.

§. 274. Diese Aufgabe habe ich hier beygebracht, weil ein Feldmesser Gebrauch davon machen kann, wenn er z. E. sogleich auf dem Felde, eines Dreyecks Inhalt aus den drey gemessenen Seiten bestimmen will, ohne nöthig zu haben, es besonders auf dem Papiere vorher zu entwerfen, und dessen Inhalt nach der gewöhnlichen Regel zu berechnen. — Zugleich hat dieses Verfahren den Vortheil, daß man den Fehlern ausbeuget, welche sowohl beym Auftragen des Dreyecks, als auch in der Bestimmung der Höhe desselben, unvermeidlich sind, weil man die Seiten sogleich unmittelbar, wie sie auf dem Felde mit der Meßkette gemessen worden, brauchen kann, ohne zur Berechnung des

Inhalts vorher die Höhe des Dreyecks bestimmen zu müssen.

Freylich ist die Berechnung des Inhalts aus den drey Seiten etwas beschwerlicher, als die gewöhnliche Regel, aber man erhält den Inhalt genauer.

Auf diese Art kann man die Fläche einer ganzen Figur becechnen, wenn man alle Seiten und Diagonalen weiß, ohne daß man die Figur vorher aufs Papier tragen, und die Höhen der Dreyecke, in die man sie zerlegen müßte, bestimmen darf. Denn wenn alle Seiten, und die aus einem gewissen Punkte ausgehenden Diagonalen der Figur bekannt sind, so weiß man auch die drey Seiten eines jeden Dreyecks, in welche die Figur durch diese Diagonalen zerlegt werden würde.

§. 275. Wenn in obiger Formel (§. 273. IV.) alle drey Seiten des Dreyecks einander gleich sind, also $a = b = c$, so wird des gleichseitigen Dreyecks Inhalt $= \frac{\sqrt{3a^4}}{4} = \frac{a^2 . \sqrt{3}}{4}$.

Für ein gleichschenklichtes Dreyeck, wo $a = b$, wird der Inhalt $= \frac{1}{4} c . \sqrt{(2a + c)(2a - c)}$.

§. 276. Aufgabe. Die Fläche eines Trapezii ABCD (Fig. XV.) zu finden, wo AB mit CD parallel, AC und BD aber jede Lage haben können.

Aufl. Man ziehe AD, und nehme AB, CD für die Grundlinien der beyden Dreyecke ABD, ACD an, so ist das Perpendickel AE, die gemeinschaftliche Höhe derselben, mithin die Fläche des Trapezii =

$$CD \cdot \tfrac{1}{2} AE + AB \cdot \tfrac{1}{2} \cdot AE = (AB + CD) \tfrac{1}{2} AE,$$

d. h. die Summe der beyden gegenüberstehenden Parallelen AB und CD, mit ihrem halben Abstande AE multiplicirt.

§. 277. Zus. I. Es seyen in dem Vielecke (Fig. XVI. Tab. III.) AB, CD, EF, GH u. s. w. insgesammt mit einander parallel, so daß das ganze Vieleck in lauter Trapezien, wie (§. 276.), getheilt sey. —

Man nenne nach der Ordnung AB = A, CB = B, EF = C, GH = D u. s. w. af stehe auf allen Parallelen gemeinschaftlich senkrecht, und schneide sie bey b, c, d u. s. w. Man nenne nach der Ordnung ab = b, ac = c, ad = d u. s. w., so wird des ganzen Vielecks

In-

Inhalt R, aus der Summe aller Trapezien =

$$\frac{(A+B)b+(B+C)(c-b)+(C+D)(d-c)\text{etc.}+(E+F)(f-e)}{2}$$

Es sind nemlich nach der Ordnung die Werthe b; c—b; d—c u. s. w., die Höhen der einzelnen Trapezien.

Es wird immer besser seyn, die Höhen dieser Trapezien auf diese Art durch den Abzug jeder zwey nächst auf einander folgenden von a angerechneten Perpendikulärlinien zu finden, als sie stückweise in der Figur von a nach b, von b nach c u. s. w. zu messen. Denn da bey einer jeden solchen Messung ein kleiner Fehler begangen werden kann, so könnte es geschehen, daß nachher die Summe aller Stücken ab + bc + cd u. s. w. nicht mit der ganzen Höhe af übereinstimmte.

§. 278. Zus. II. Man kann den (§. 277.) angegebenen Ausdruck für die Fläche des Vielecks noch auf folgende Art verändern. — Weil

$$(A+B).b = Ab+Bb$$
$$(B+C)(c-b) = Bc+Cc-Bb-Cb$$
$$(C+D)(d-c) = Cd+Dd-Cc-Dc$$

u. s. w.

so

so wird nach gehöriger Rechnung auch

$$R = \frac{(A-C)\,b + (B-D)\,c + (C-E)\,d \text{ u. s. w.} + (E+F)\,f}{2}$$

d. h. man subtrahire von der ersten Parallele die 3te, von der zweyten die 4te, von der dritten die 5te u. s. w., so viel als dergleichen Reste zu machen sind.

Den ersten Rest multiplicire man in den Abstand der ersten und zweyten Parallele, den den zweyten Rest in den Abstand der ersten und dritten Parallele u. s. w. Zur Summe aller dieser Producte addire man endlich ein Product aus der Summe der beyden letzten Parallelen, in den Abstand der letzten Parallele von der ersten, halbire alles, so hat man des Vielecks Inhalt.

Diese Vorschrift ist etwas bequemer, als die Formel (§. 277.), weil man sogleich die Perpendikel b, c, d u. s. w. selbst zur Rechnung gebrauchen kann, ohne sie erst, wie in (§. 277.) erfordert wurde, von einander abzuziehen, oder die Reste c — b, d — c u. s. w. zu berechnen.

Auch fügt es sich unterweilen, daß in gegenwärtiger Formel, Reste A — C; B — D u. s. w. = o werden, wodurch also die zugehörigen Producte (A — C) b u. s. w. selbst = o

wer-

werden, und der Ausdruck noch einfacher wird, welches sich hingegen bey der Formel (§. 277.) niemals ereignen kann.

§. 279. Zus. III. Wenn in (Fig. XVI.) die beyden Punkte A und B in einen a zusammenfallen, und man also statt des Trapezii ABCD, ein Dreyeck CaD hat, so ist A = o. Eben so könnte F = o seyn, wenn sich das letzte Trapezium ILKM in ein Dreyeck IfK verwandelte.

Anmerkung.

§. 280. Die bisherige Aufgabe, mit ihren Zusätzen, dient nun überhaupt, die Fläche einer Figur auf eine leichtere Art zu berechnen, als es durch Zerlegung in Dreyecke geschehen würde. — Denn die Zerlegung in Dreyecke, und die Bestimmung der Höhe eines jeden Dreyecks, ist mühsamer, als wenn man geradehin auf alle Parallelen, wie (Fig. XVI.) ein gemeinschaftliches Perpendikel af zieht, und den Inhalt nach den Formeln (§. 276 u. f.) berechnet. Es sey also eine geradlinigte Figur, wie (Fig. XVII.) vorgegeben, und ihr Inhalt zu bestimmen. Man ziehe durch die bey A zunächst liegenden Winkelpunkte B und C eine gerade Linie, und nun vermittelst eines Linials und rechtwinklichten hölzernen Dreyecks, durch alle übrigen Winkelpunkte D, G u. s. w. Parallelen

rallelen mit BC, nemlich Bb, Dc, Fd u. s. w. Durch den obersten und untersten Punkt A und H, auch mit BC die Parallelen Aa, He. Auf Aa nehme man, wie man es am bequemsten findet, einen Punkt a an, und fälle auf alle Parallelen das gemeinschaftliche Perpendikel ae, so sind die Entfernungen ab, ac, ad, ae die Werthe von den Größen b, c, d u. s. w. in den Formeln (§. 277. u. f.). Die Parallelen BC, DE, FG sind die Werthe von B, C, D u. s. w. Wegen der beyden Dreyecke BAC, HFG sehe man (§. 279.). So würde also hier des Vielecks Inhalt

$$= \frac{(o-C)b + (B-D)c + (C-o)d + (o+D)e}{2}$$

$$= \frac{-Cb + (B-D)c + Cd + De}{2}$$

$$= \frac{(B-D)c + C(d-b) + De}{2}$$

und so in andern Fällen.

Daß übrigens bey diesem Verfahren niemals mehr Trapezien als Dreyecke, in die man die Figur durch Diagonalen zerlegen würde, zum Vorscheein kommen wird nach einer kleinen Ueberlegung von selbst erhellen.

§. 281. Aufgabe. Die Fläche einer krummlinigten Figur zu bestimmen.

Aufl. I. Wenn eine Figur von einer solchen krummen Linie begränzt wird, deren Punkte insgesammt nach einem gewissen gemeinschaftlichen Gesetze (oder wie man sich in der höhern Geometrie ausdrückt) durch eine algebraische Gleichung zwischen Abscisse und Ordinate bestimmt worden sind, so kann der Inhalt derselben durch die gemeine oder höhere Geometrie vollkommen genau, oder wenigstens so genau bestimmt werden, daß der Fehler für nichts zu achten ist.

So lehrt z. E. die gemeine Geometrie die Fläche eines Kreises, oder Stücke eines Kreises, so genau, als man will, zu berechnen, und die höhere Geometrie beschäftigt sich mit den Flächen oder Quadraturen der Parabel, Ellipse, Hyperbel, und anderer krummen Linien, deren Natur durch eine Gleichung gegeben ist. Allein diese krummen Linien und ihre Quadraturen sind kein Gegenstand der Feldmeßkunst, und wem also darüber um Belehrung zu thun ist, der kann z. E. Hrn. Hofr. Kästners Analysis des Unendlichen, oder andere hieher gehörige Schriften zu Rathe ziehen.

II. Näher und umständlicher haben wir solche Figuren in Erwägung zu ziehen, deren Umfang nicht nach einem gewissen Gesetze verzeichnet worden ist, sondern deren Hauptkrümmen und Wendungen nur durch einige Abscissen und Ordinaten, die übrigen Punkte aber nach dem Augenmaaaße angegeben und zusammengehängt worden sind — wie das der gewöhnliche Fall beym Feldmessen ist.

III. Weil hier kein Gesetz gegeben ist, nach welchem die Ordinaten von den Abscissen abhängen, so kann auch die Quadratur, oder die Fläche einer solchen krummen Linie, nicht nach der in der höhern Geometrie gewöhnlichen Art durch die Integralrechnung gefunden werden, sondern man muß hier auf folgende Art verfahren.

Es sey z. E. die krummlinigte Figur (Fig. XVIII.) vorgegeben. Man nehme auf den Gränzen der Figur Punkte, wie C, E, G u. s. w., so nahe beysammen, daß die Stücke AC, CE, EG u. s. w. ohne merklichen Irrthum als gerade angesehen werden können; durch diese Punkte C, E u. s. w. gedenke man sich durch die krummlinigte Figur lauter Parallelen gezogen, so wird es erlaubt seyn, die Vierecke, wie BCDE, DEFG u, s. w., als lauter geradlinigte Trapezien zu betrachten; BAC könnte man für ein Dreyeck ansehen u. s. w.

Die

Die Summe aller dieser Trapezien könnte man nach (§. 278.) ausrechnen, und so bekäme man ohne merklichen Fehler, die Fläche der krummlinigten Figur.

Es stehe also A g auf allen Parallelen gemeinschaftlich senkrecht. — Man messe nach der Ordnung die Perpendikularhöhen Aa, Ab u. s. w., und die Parallelen BC, DE u. s. w., so hat man die Werthe von b, c, d u. s. w. A, B, C u. s. w., die in der Formel (§. 277.) gebraucht werden. Wenn man BAC für ein Dreyeck ansehen dürfte, so wäre A = o (§. 279.).

Ich will zur Erläuterung der Formel (§. 278.), und um die Art ihrer Berechnung zu zeigen, ein Beyspiel beybringen.

Gesetzt man habe gefunden:

I.	II.	III.	IV.	V.	
		so ist	mithin	$-$	$+$
$A = 15'$					
$B = 50$	$b = 78$	$A - C = - 70$	$(A - C) \cdot b =$	5460	
$C = 85$	$c = 100$	$B - D = - 44$	$(B - D) \cdot c =$	4400	
$D = 94$	$d = 176$	$C - E = + 10$	$(C - E) \cdot d =$	— —	1760
$E = 75$	$e = 260$	$D + E = + 169$	$(D + E) \cdot e =$	— —	43940
Also das Posit. und Neg. zusammengerechnet				9860	45700
					9860

$\frac{1}{2}$ Summe oder Inhalt der Figur $= \frac{35840}{2}$ Qu. Schuh.

$= 17920$ Qu. Schuh.

$= 179$ Q. R. 20 Q. Sch.

oder den Morgen zu 200 Qu. R. $= \frac{1}{2}$ m $+ 79$ Q. R. $+ 20$ Q. S.

$= \frac{3}{4}$ m $+ 29$ Q. R. $+ 20$ Q. S.

Wenn man auf diese Art in jedem Falle die Data in Columnen, wie I, II, III, IV, V, ordnet, so übersieht man das Ganze besser.

Anmerkung.

§. 282. I. Das bisherige setzt nicht zum voraus, daß eine Figur auf dem Felde, deren Inhalt man wissen will, vorher auf dem Papiere entworfen seyn muß. — Man könnte, besonders wenn die Figur nicht gar zu groß wäre, gleich unmittelbar auf dem Felde, die Parallelen, und die auf sie fallenden Perpendikulärhöhen messen.

Man stecke innerhalb der Figur eine gerade Linie Ag (Fig. XVIII.) ab, und spanne längst Ag die Meßkette an. — Man lasse ein paar Gehülfen, einen längst der krummen Linie ABH. und einen längst ACI mit Zeichenstäbchen und Meßfahnen fortgehen.

Nachdem der erste z. E. nach B hingekommen ist, und daselbst bemerkt hat, daß das Stück AB ohne merklichen Fehler für eine gerade Linie gelten kann, so lege man an die längst Ag angespannte Kette, einen hölzernen Winkelhacken, dessen Schenkel ohngefähr 4 Fuß lang sind, dergestalt, daß der eine Schenkel des Winkelhackens, nemlich am, aufs genaueste nach der bey B aufgerichteten Fahne hinziele, der andere aber genau an A g anliege.

So hat man auf der Kette die Abscisse Aa, für den Punkt B — die man ins Manual eintrage.

Mit B und a lasse man bey C ein Zeichenstäbchen in gerader Linie einsetzen, und bezeichne die bey B und C eingesteckten Stäbchen gemeinschaftlich mit Nro. 1., um anzudeuten, daß BC die erste abgesteckte Parallele ist. In dem Manuale wird auch bey die zugehörige Absciſſe Aa einstweilen Nro. 1. geschrieben.

Auf eben die Art bestimme man die zweyte Parallele DE, indem man ihre Richtung vermittelst des oberwähnten Winkelhackens angiebt. — Man messe die zugehörige Absciſſe Ab, trage sie ins Manual, und setze Nro. 2. dabey. — Bey D und E lasse man Zeichenstäbchen mit Nro. 2. zurück. Auf diese Art bestimme man nach der Ordnung auf der Kette die Absciſſen Aa, Ab, Ac u. s. w.

Wenn man mit allen Absciſſen fertig ist, so schreite man zur Messung dee Parallelen.

Weil nemlich bey B und C, bey D und E u. s. w. Zeichenstäbchen mit Nummern zurückgelassen worden sind, so kann man nun, nach der Ordnung, die Parallelen BC von Nro. 1.

nach

nach Nro. 1., DE von Nro. 2. nach Nro. 2. u. s. w. messen, und erhält solchergestalt alle Größen (§. 277.), die zur Berechnung des Inhalts der Figur nöthig sind, ohne die Figur selbst auf dem Papiere zu entwerfen.

II. Die Umstände müssen es nun ergeben, ob es bequemer ist, die ganze Figur erst zu Papiere zu bringen, oder die zur Berechnung des Inhalts nöthigen Linien, sogleich unmittelbar auf dem Felde zu messen.

In dem Falle, wenn die Krümmungen nicht gar zu groß sind, auch die Figur selbst nicht sehr groß ist, und ohne merklichen Fehler in einer Ebene liegt, kann das erwähnte Verfahren brauchbar seyn; ausserdem aber mögte es immer bequemer seyn, die Figur erst nach den gewöhnlichen Methoden, auf den Meßtisch zu bringen.

§. 283. Aufgabe. Die Fläche einer krummlinigten Figur noch auf eine leichtere Art zu berechnen.

Aufl. I. Man ziehe innerhalb der Figur (Fig. XIX.) eine gerade Linie AB, und trage von A nach B so viel gleiche Theile, als angehet. — Man nehme aber, im Falle die Figur starke Krümmungen hätte, diese Theile nicht zu groß, dergestalt, daß die durch die Theilpunkte a, b, c u. s. w. gezogenen Parallelen

Mμ,

$M\mu$, Rr u. s. w. Stücke der krummen Linie. nemlich MR, μr u. s. w., zwischen sich enthalten, die man ohne merklichen Irrthum für gerade Linien annehmen darf.

II. Es ist klar, je weniger Krümmung die Bogen MRSN, μrsn haben, desto größer kann man die gleichen Theile auf AB nehmen.

III. Man nenne die Parallelen, nach der Ordnung nemlich $M\mu = A$; $Rr = B$ u. s. w., $N'n' = W$, $Nn = X$. Sie stehen gemeinschaftlich auf AB senkrecht.

af heiße x, und von a nach f gehen n gleiche Theile, so ist $ab = bc = cd$ u. s. w. $\frac{x}{n}$.

IV. Mithin die Summe aller zwischen $M\mu$ und Mn enthaltenen Trapezien =

$$\frac{(A+B)}{2} \cdot \frac{x}{n} + \frac{(B+C)}{2} \cdot \frac{x}{n} \text{ u. s. w.} + \frac{(W+X)}{2} \cdot \frac{x}{n} =$$

$$\left(\tfrac{1}{2}(A+X) + B + C \text{ u. s. w.} + W\right)\frac{x}{n}$$

d. h. zur halben Summe der ersten und letzten Parallele $M\mu$ und Nn, addire man die Summe aller mittlern, und multiplicire alles mit $\frac{x}{n}$, so hat man das zwischen Mm und Nn enthaltene Stück Fläche.

V.

V. Die beyden übrigen Stückgen $MA\mu$; NBn rechne man noch besonders aus, um die ganze Fläche $MA\mu nBNA$ zu erhalten.

VI. Es ist nemlich klar, daß, wenn man längst AB lauter gleiche Theile nimmt, am Ende ein Stückgen, wie fB, übrig bleiben kann, welches $< ab$, oder $< \frac{x}{n}$ ausfällt, wo man also das zugehörige Dreyeck NBn, oder Trapezium, besonders ausrechnen muß.

VII. Die Krümmungen längst $MA\mu$, NBn könnten so beschaffen seyn; daß man die Flächen $MA\mu$, NBn nicht einmal als Dreyecke oder Trapezien behandeln dürfte. — In dem Falle könnte man diese Stücke wieder in kleinere Trapezien zerlegen, indem man mit AB, oder $M\mu$, Parallelen zöge. Oft kann man aber auch ihre Fläche, wenn sie nicht viel betragen sollte, nur nach dem Augenmaaße schätzen.

VIII. Es wird sich übrigens leicht aus der Gestalt der krummlinigten Figur beurtheilen lassen, wie man die Parallelen am besten auszuwählen hat, daß sie erstlich nicht gar zu nahe neben einander gezogen zu werden brauchen, und man folglich, ohne Nachtheil des Inhalts, nicht gar zu viele Parallelen messen darf, zweytens, daß am Ende der Parallelen, bey $M\mu$, Nn nicht gar zu unregelmäßige Stücke $AM\mu$,

NBn

NBn übrig bleiben. So z. E. könnte es geschehen, daß, wenn man statt der Parallelen $M\mu$, Rr u. s. w., durch die Figur Linien mit AB; oder mit einer andern Richtung parallel zöge, die Figur in weniger Trapezien zerfiele, und man also den Inhalt leichter fände, als vermittelst der zuerst angenommenen Parallelen $M\mu$, Rr u. s. w. Die schicklichste Auswahl der zu ziehenden Parallelen wird sich in jedem Falle leicht von selbst ergeben.

Bequemlichkeiten, wenn die Parallelen in gleicher Weite von einander abstehen.

§. 284. Wenn man die Formel (§. 283. IV.) mit denen im 277ten und 278ten §. vergleicht, so wird man leicht bemerken, daß bey der (§. 283. IV.) theils weniger Linien in der Figur zu messen vorkommen, indem man nicht solche Größen, wie a, b, c u. s. w. (§. 277. u. 278.), besonders zu messen nöthig hat, theils auch die Berechnung so viel einzelner Producte, aus dergleichen die dortigen Formeln bestehen, erspart wird. — Vortheile, die man bey der Berechnung vieler einzelnen Stücke einer Feldmark, bald empfinden wird.

Anmerkungen.

§. 285. I. Man sieht leicht, daß es nicht nöthig ist, die Parallelen ganz auszuziehen. —

Um

Um ihre Längen zu bestimmen, darf man nur an dem Umkreise der Figur, die Punkte M, μ, R, r u. s. w. mit einer Zirkelspitze bemerken. — Auch die auf den Parallelen senkrecht stehende AB braucht nicht innerhalb der Figur gezogen zu werden — und solchergestalt wird ein Riß mit gar keinen Linien verunziert, die zur Berechnung seiner Fläche nöthig sind.

II. Am allerbequemsten könnte man aber die Ausmessung und Ziehung der Parallelen durch Hülfe eines Linials und rechtwinklichten Drenecks bewerkstelligen, worauf man Theile des verjüngten Maaßstabes, nach welchem die Figur ausgerechnet werden sollte, getragen hätte.

Es sey LU ein Linial, längst dessen Schärfe man eine gewisse Anzahl gleicher Theile, in der festgesetzten Weite der Parallelen von einander, verzeichnet, und an die Theilpunkte nach der Ordnung die Zahlen, 1, 2, 3 u. s. w. geschrieben habe.

QVT sey ein rechtwinklichtes hölzernes Dreneck, auf dessen Katheten QV, Theile des verjüngten Maaßstabes, z. E. Ruthen, verzeichnet sind.

So ist klar, daß, wenn man QV durch einen gewissen Theilpunkt des Linials, z. E. durch

durch 2, gehen läßt, man auf QV sogleich die Länge der Parallele Rr angezeigt findet.

Auf diese Art kann man nach und nach das Dreyeck an jeden Theilpunkt des Linials LU schieben, und sowohl die Lage der Parallelen, als auch ihre Länge bestimmen, ohne daß man sie besonders zu ziehen, und mit dem Zirkel auf einen verjüngten Maaßstab zu tragen braucht.

Die Schuhe auf QV schätzt man nach dem Augenmaaße. Auch müssen etwa von 5 zu 5 Ruthen auf QV Merkmaale zu besserer Zählung der Ruthen verzeichnet seyn.

Begreiflich darf das Linial LU, während man die Parallelen nach der Ordnung auf QV misset, nicht verrückt werden. Deswegen kann man das Linial mit einem Brette y versehen, worauf man ein Gewicht setzet, um es so lange, bis alle Parallelen gemessen sind, fest in seiner Lage zu erhalten.

III. Ich denke, bequemer, als durch das Verfahren (II.), in Verbindung mit der Formel (§. 283. IV.), läßt sich wohl im allgemeinen keiner krummlinigten Figur Inhalt bestimmen.

IV. Bey den Formeln (§. 277. 278.) wurden die Parallelen, nach Verhältniß der verschiedenen Krümmungen am Umfange der

Figu=

Figur, bald näher, bald weiter von einander gezogen. Dadurch könnte es nun geschehen, daß man dort oft weniger Parallelen erhielte, und messen dürfte, als hier (§. 283.), wo die Parallelen durchaus in gleicher Weite von einander abstehen, wie auch die Krümmungen am Umfange der Figur beschaffen seyn mögen. Allein man muß auch dagegen bedenken, daß man dort wegen des verschiedenen Abstandes der Parallelen, die Werthe von a, b, c u. s. w. besonders messen muß, hier aber (§. 283. IV.) nur die einzige Weite der beyden äussersten Parallelen, nemlich x, zu messen braucht, zu geschweigen, daß die Formel (§. 283. IV.) auch sehr viel einfacher, und zur Berechnung bequemer ist, als die (§. 277. oder 278.)

V. Verschiedene andere Formeln für die Berechnung der Fläche krummlinigter Figuren, lehrt Herr Lambert (Beyträge zur Mathematik, II. Th.). Aber ich finde sie insgesammt zur Ausübung nicht so bequem, und so leicht zu übersehen, als die (§. 283.) — Deswegen werde ich hier weiter nichts davon beybringen.

§. 286. Aufgabe. Die Formel (§. 283. IV.) zur Ausübung und Berechnung noch bequemer einzurichten.

Aufl. I. Man setze, auf dem Schenkel QV des rechtwinklichten Dreyecks VQT (Fig. XIX.) seyen einzelne Ruthen des verjüngten Maaßstabes verzeichnet. — Die Schuhe u. s. w. drücke man durch Decimaltheile von Ruthen aus.

II. Auf dem Liniale LU nehme man die gleichen Theile auch eine Ruthe groß, so daß die Parallelen überall eine Ruthe von einander abstehen, wie solches in sehr vielen Fällen zureichend seyn kann, so wird in (§. 283. IV.) $\frac{x}{n} = 1$, und die Fläche der Figur geradehin $= \frac{1}{2}(A + X) + B + C + D$ u. s. w. $+ W$ nemlich in Quadratruthen.

Bey dieser Einrichtung drückt also die bloße Summe der Parallelen den Flächenraum in Quadratruthen aus.

Es sey z. E.	$A = 2^{\circ}.\ 4'.\ 4''$	$=$	2,44 Ruth.
	$H = 3\ .\ 2\ .\ 0$	$=$	3,20
$\frac{1}{2}(A + H) =$			2,82
Ferner	$B = 4\ .\ 2\ .\ 1$	$=$	4,21
	$C = 6\ .\ 8\ .\ 2$	$=$	6,82
	$D = 7\ .\ 4\ .\ 0$	$=$	7,40
	$E = 8\ .\ 2\ .\ 1$	$=$	8,21
	$F = 5\ .\ 0\ .\ 0$	$=$	5,00
	$G = 4\ .\ 0\ .\ 2$	$=$	4,02

Also die Fläche der Figur = 38,48 Quadratruthen.

Leich-

Leichter kann man die Berechnung des Flächeninhalts nicht verlangen.

III. Nähme man die Parallelen überall 2 Ruthen von einander, so wäre $\frac{x}{n} = 2$; Für 3 Ruthen Abstand $\frac{x}{n} = 3$ u. s. w. Für alle diese Fälle, von denen man nun, nach Verhältniß der Umstände (§. 283. II.), einen wählen kann, ist also immer die Berechnung der Fläche noch sehr leicht. So wäre z. E. für $\frac{x}{n} = 2$ Ruthen, und die Größen A, B, C u. s. w., wie vorhin (II.).

Die Fläche $= 38,48 \cdot 2 = 76,96$ Quadratruthen.

Ein Verfahren, die Fläche einer Figur durch Hülfe eines Netzes zu bestimmen.

§. 287. I. Ein viereckigter Rahmen sey durch zarte ausgespannte Fäden, in lauter Quadrate, deren jedes z. E. 100 Quadratruthen des verjüngten Maaßstabes enthält, eingetheilt. — Diesen Rahmen lege man über die Figur, deren Inhalt man wissen will, so, daß die Fäden genau auf dem Papiere liegen, und zähle,

zähle, wie viel von den oberwähnten Quadraten ganz in die Figur fallen.

II. In diejenigen Quadrate, durch welche der Umfang der Figur durchgehet, werden Stücke der Figur fallen, die kleiner, als ein solches Quadrat, also kleiner als 100 Quadratruthen sind. Ein solches Stück heiße A — Um dessen Fläche zu finden, lege man auf das Fadenquadrat, in welches A fällt, ein auf Glas gezeichnetes eben so großes, aber in die einzelnen 100 Quadratruthen getheiltes Quadrat, so daß der Umfang des Quadrats auf dem Glase, das erstere Fadenquadrat genau decke, zähle nun die auf A gehenden einzelnen Quadratruthen, und schätze Theile von Quadratruthen nach dem Augenmaaße. So würde man nach Addirung aller Fadenquadrate, jedes zu 100 Quadratruthen gerechnet, und aller einzelnen Quadratruthen, nebst den geschätzten Theilen von Qu. Ruthen, den Inhalt der Figur, ohne weitere Rechnung gefunden haben.

Es ist klar, daß man oft, wenn die Figur nicht groß ist, nur das zweyte Quadrat auf dem Glase nöthig haben wird.

III. Das eben gewiesene Verfahren wird von einigen Feldmessern empfohlen. — Ich habe die Mühe darauf gewandt, beyde Netze

(l.

(I. II.) auf Glas zu verzeichnen, aber sie wurde durch die scheinbare Bequemlichkeit, den Inhalt einer Figur ohne Rechnung zu finden, nicht belohnt — denn das Abzählen der Quadrate, die Schätzung derselben u. s. w. erforderte wohl noch einmahl so viel Zeit, als die Rechnung nach den vorhergehenden Methoden. Die Genauigkeit selbst, in Absicht der Schätzung kleinerer Theile als Quadratruthen, fand ich wegen der Menge solcher Theilchen, und der sich dadurch häufenden Fehler, immer sehr mittelmäßig, ob gleich mein Augenmaaß keines der schlechtesten ist, und die Linien sehr zart nach (§. 176. VII.) aufs Glas gerissen waren.

IV. Will man ein solches Netz zur Ausrechnung der Figuren, die nach unterschiedenen verjüngten Maaßstäben gezeichnet sind, gebrauchen: so wird man doch nicht aller Rechnung überhoben seyn, sondern wenn man setzet, das Netz sey für Ruthen eines verjüngten Maaßstabes, die $= b$ sind, verfertiget worden, so wird die vermittelst dieses Netzes gefundene Fläche F eines Risses, auf dessen verjüngten Maaßstabe die Ruthen $= a$ wären, noch mit der Große $\frac{b^2}{a^2}$ multipliciret werden müssen, um die wahre Fläche zu finden.

Oder

Oder man müßte für jeden besondern verjüngten Maaßstab ein Netz verfertigen, und das wäre doch wohl noch weitläuftiger.

Noch andere Unbequemlichkeiten beym Gebrauch der Netze, werden wohl keinen Zweifel lassen, daß die unmittelbare Berechnung nach den Formeln in den 277, 278, 283 §§. immer vorzuziehen ist.

Noch ein Verfahren, den Inhalt einer Figur ohne Rechnung zu finden.

§. 288. Man verzeichne auf einer gewissen Gattung Papieres (am besten auf Royal- oder Velinpapiere) ein Quadrat, z. E. von hundert oder mehreren Quadratruthen, schneide dieses Quadrat aus, und wiege es auf einer genauen Waage. — Nun kopiere man die auszurechnende Figur auf eben solches Papier, schneide sie auch aus, und wiege sie. Und schließe nun nach der Regel detri, wie sich verhält das Gewicht des erwähnten Quadrats zu seiner Fläche so das Gewicht der Figur zu ihrem Inhalt.

Ueber die Brauchbarkeit dieses mechanischen Verfahrens s. m. Hrn. v. Zachs monatliche Corresp. zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde das Februarstück 1800. S. 17 . Es ist hiebey vortheilhaft, das Quadrat größer als den Inhalt der

der auszurechnenden Figur zu nehmen; weil alsdann die unvermeidlichen von der etwa nicht duraus gleichen Dicke des Papieres herrührenden Fehler vermindert werden.

Korrection einzelner Stücke einer Feldmark, wenn ihre Summe vollkommen genau mit dem ganzen Stücke, das sie betragen, übereinstimmen soll.

§. 289. I. Ein Stück Feld bestehe aus unterschiedenen einzelnen Aeckern u. dgl. A, B, C, D, E (Fig. XX.), und jedes einzelne Stück sey nach den vorhergehenden Methoden ausgerechnet worden.

II. Da nun wohl bey der Bestimmung eines jeden einzelnen Stückes A, B, C ꝛc. kleine Fehler unterlaufen, für die ein Feldmesser auch bey aller Sorgfalt nicht gut stehen kann, diese Fehler zusammen aber eine beträchtliche Abweichung der Summe $A + B + C + D + E$ von dem unmittelbar durch Trapezien berechneten Totalinhalte der Figur $\alpha\beta\gamma\delta$ verursachen können, so ist es rathsam, den einzelnen Stücken A, B, C, D, E Correctionen zu geben, damit die Summe ihrer Inhalte übereinstimmend werde mit dem, was die Berechnung für das Ganze gegeben hat.

Es sey also z. E. gefunden worden

$$\begin{array}{ll} A = & 205 \text{ Qu. R.} \\ B = & 512 \\ C = & 480 \\ D = & 300 \\ E = & 120 \\ \hline \end{array}$$

so wäre $A + B + C.. = 1617$ Quadr. Ruthen.

III. Gesetzt nun, man habe die ganze Figur $\alpha\beta\gamma\delta$ für sich allein in Trapezien zerlegt, und unmittelbar als ein einziges Stück Feld berechnet, so wird dieser berechnete Inhalt der Wahrheit näher kommen, als das, was man durch Summirung der einzelnen Stücke A, B, C rc. (II.), deren jedes für sich allein, als eine besondere Figur, durch Zerfällung in kleine Trapezien berechnet worden ist, erhalten würde. Wäre nun z. E. der Inhalt des Ganzen $\alpha\beta\gamma\delta = 1640$ Quadr. Ruthen, also um 23 Quadratr. größer als der aus der Summirung obiger Stücke hergeleitete Inhalt gefunden worden, so kann man diesen Fehler von 23 Quadratruthen auf die einzelnen Stücke A, B, C, D rc. auf folgende Art vertheilen, und also die corrigirten Werthe dieser Stücke erhalten.

Man schließe, wie der fehlerhafte Inhalt (II.) 1617, zum wahren 1940, so das fehlerhafte $A = 205$ zum wahren A; so wird das cor:

corrigirte A $= \frac{1640 . 205}{1617}$, und eben so

B $= \frac{1640 . 512}{1617}$ und s. w.

wo man denn zum beständigen Logarithmen von $\frac{1640}{1617}$ nur die Logarithmen von 205; 512 u. s. w. nach der Ordnung addiren darf. So findet sich

das corrig.	A =	207,9156	Qu. R.
	B =	519,2821	. .
	C =	486,8268	. .
	D =	304,2669	. .
	E =	121,7067	. .

Die Summe = 1639,99 . . also beynahe 1640 Qu. Ruth., wo der geringe Unterschied nur von den Decimalstellen herrühret, die noch weiter auf die angegebenen folgen würden.

IV. Man kann vielleicht noch bequemer ohne Logarithmen auf folgende Art rechnen:

Man schließe 1617 : 100 = 23 : x.

Also 100 Q. Ruth. erfordern eine Korrection
von x = 1,4223;
mithin 10 — — — von y = 0,1422;
und 1 — — — von z = 0,0142.

 Hier-

Hieraus findet sich die Verbesserung von A, oder von 205 Qu. R. $= 2 . x + 0 . y + 5z$ $= 2,9146$ Qu. R., die von B, oder von 512 Qu. R. $= 5 . x + 1 . y + 2z = 7,2821$ Q. R. u. s. w.

Also das wahre A $= 205 + 2,9156 = 207,9156$ u. s. w.

Diese Berechnungsart kann auch in ähnlichen Fällen brauchbar seyn.

Anmerkung.

§. 290. Bey der Berechnung einzelner Stücke einer Feldmark kann man auch so verfahren.

I. Man berechne erst A.

II. Nun unmittelbar beyde Stücke A und B zusammengenommen, als wenn nemlich A und B nur ein einziges Stück, oder eine einzige Figur ausmachten.

III. Nun ferner die Fläche aller 3 Stücke A, B, C zusammen u. s. w.

Von II. ziehe man I. ab, so hat man B.

Von III. ziehe man II. ab, so findet sich C u. s. w.

IV. Man kann hier nemlich so verfahren, wie man einzelne Stücke einer eingetheilten Linie

nie ab (Fig. XX.) finden würde, indem man nemlich nach der Ordnung ac, ad, ae u. s. w. mäße, und nun, um cd zu finden, ac, von ad abzöge, um de zu bestimmen, den Unterschied ae — ad angäbe u. s. w.

V. Auf diese Art verfährt man freylich sicherer, als wenn man jeden Theil ac, ad, de, besonders misset; denn wegen der unvermeidlichen Fehler würde am Ende die Summe der für sich bestimmten Stücke ac + cd + de selten mit der ganzen Länge ae übereinstimmen, da hingegen das Verfahren (IV.) die Stücke ac, cd, de so giebt, daß ihre Summe allemal das Ganze ae vollkommen genau beträgt.

VI. Bey Bestimmung einzelner Stücke einer geraden Linie ist das erwähnte Verfahren bequem. Allein meistens wird es bey Berechnung einzelner Flächen, wie B, C u. s. w. beschwerlich seyn. Denn wenn man, z. E. um B zu finden, das ganze Stück $\alpha\beta\delta$ erst berechnen, und dann A davon abziehen, ferner um C zu finden, die Figur $\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta\alpha$ berechnen, und dann $\alpha\beta\delta$ davon abziehen wollte, so kann es geschehen, daß, obgleich jedes einzelne Stück eine zur Berechnung ganz bequeme Gestalt hätte, doch mehrere derselben zusammengenommen, eine sehr unordentliche Figur bildeten, wie z. E. $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$, welche in der That zur Berechrechnung schon etwas beschwerlich ist. Da nun überdem nach und nach die Stücke, wie $\alpha\beta\delta\alpha$, $\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta\alpha$, $\alpha\beta\gamma\mu\eta\delta\alpha$ u. s. w., durch deren Abzug von einander man die einzelnen Theile A, B, C, D u. s. w. bekömmt, immer größer werden, so wird die Berechnung selbst auch immer weitläuftiger und mühsamer, so daß ich der Meynung bin, man thue immer besser, die einzelnen Stücke A, B, C u. s. w. für sich allein auszurechnen, wenn auch gleich die Genauigkeit etwas darunter leiden sollte. Der Fehler wird doch bey gehöriger Aufmerksamkeit nie so beträchtlich seyn, daß es nicht erlaubt seyn sollte, nachher eine Korrection, wie (§. 289.) vorzunehmen, wodurch die Summe der einzelnen Stücke mit dem Ganzen übereinstimmend wird.

Anmerkung.

§. 291. Bey Berechnung des Flächeninhalts der Aecker, lassen sich unterweilen einige Vortheile anbringen, daß man nicht nöthig hat, jeden einzelnen Acker besonders in Trapezien zu zerlegen.

I. Es ist (Fig. XXI. Nro. 1.) ABCD ein Flurstriemen, oder eine Vereinung, worinnen mehrere einzelne Aecker M, N, O liegen, deren Scheidungslinien AB, aα, bβ, CD mit einander parallel laufen. Wären nun auch BD und

und AC gleichlaufend, und gerade Linien, so würde man aus der berechneten Fläche des ganzen Flurstriemens ABCD = F, die einzelnen Aecker nach folgenden Proportionen finden:

$$AC : Aa = F : M$$
$$AC : ab = F : N$$
u. s. w.

wo man also nur Aa, Ab u. s. w. zu messen brauchte.

II. Wären Nro. 2. zwar AB, aα, bβ, u. s. w. parallel, aber die geraden Richtungen AC, BD nicht, so ziehe man B 3 mit AC gleichlaufend, und berechne aus der ganzen Fläche ABC3, und den Stücken Aa, ab, bc, die Flächen ABa1; a1b2; b2C3 nach (I). Haben nun die Stücke α 1, β 2, D 3 keine beträchtliche Krümmung, so daß man sie für gerade Linien annehmen kann, so addire man zu ABa1 das kleine Dreyeck B 1 α, so hat man M, zu a1b2 das Trapezium α 1 β 2, so hat man N u. s. w.

Weichen BD, AB nicht sehr von der parallelen Lage ab, so wird man die kleinen Stücke B 1 α, α 1 β 2 u. s. w. zureichend genau nach dem Augenmaaße schätzen können.

Sehr beträchtliche Krümmungen haben die Scheidungslinien der Aecker selten, und so

wird

wird man $\alpha 1$, $\beta 2$, $D 3$ in vielen Fällen für gerade annehmen dürfen.

III. Wären selbst AC und BD keine gerade Parallel-Linien, so werden sich nach einiger Ueberlegung, doch leicht Abkürzungen bey Berechnung der Stücke M, N, O ausfinden lassen, die ich hier der Kürze wegen übergehe.
