XVII. Kapitel.

Von den Folgen der Fehler in den Messungen.

§. 201.

Da wir auf dem Felde diejenigen Stücke, welche zur Bestimmung der unbekannten Grössen dienen, nie vollkommen genau messen können, sondern bey allen Messungen immer gewisse Fehler begehen, die nach Verhältniß der Güte eines Werkzeugs, und der Sorgfalt des Beobachters, bald mehr bald minder erheblich sind, so ist es die Pflicht eines Geometers, die Umstände zu bestimmen, unter welchen die Fehler in den gemessenen Stücken, auf die Bestimmung der unbekannten, einen großen oder geringen Einfluß haben; diese Lehre von der Berechnung der Folgen der Fehler wird ihm in vielen Fällen Anleitung geben, eine glückliche Auswahl der zu messenden Stücke auf dem Felde zu treffen, und ist überhaupt höchst wichtig zu einer richtigen und sichern Praxis.

§. 202. Die Fehler, die bey der unmittelbaren Messung der Linien vorfallen, habe ich meistens schon im IIIten Kap. beygebracht.

Bey Messung der Winkel sind aber die unvermeidlichen Fehler weit mannichfaltiger, sie hängen sowohl von dem eingetheilten Rande des Werkzeugs, als auch von dessen Stellung (X. Kap.), der richtigen Bewegung des Fernrohres (XI. Kap.) und noch mehreren Umständen ab; dergestalt, daß es bey einem ausgemessenen Winkel, weit schwerer ist, den muthmaßlich begangenen Fehler anzugeben, als es bey Messung gerader Linien geschehen kann.

Bey Bestimmung der Winkel auf dem Meßtische, setzt Marinoni (de re ichnographica Lib. I. Cap. V. num. 5.) die Möglichkeit des zu begehenden Fehlers auf 5 Minuten, vorausgesetzt, daß man nur ein gewöhnliches Diopterlinial zum Visiren braucht, und sonst mit aller möglichen Vorsicht zu Werke geht. Er bestätigt dieses auch durch würkliche Versuche, die man a. a. O. selbst nachlesen kann.

Bey Messung der Winkel, mit einem Astrolabio von gewöhnlicher Größe, nemlich von ohngefähr einem Fuße im Durchmesser, das übrigens mit gehöriger Sorgfalt verfertiget, und mit einem Fernrohre versehen ist, will ich den größten Fehler, der auch bey aller Aufmerkmerksamkeit und Vorsicht, unvermeidlich ist, auf 1 bis 2 Minuten ansetzen, wovon ich mich durch die Erfahrung überzeugt habe, indem ich einerley Winkel zu verschiedenen Zeiten maaß, und die Resultate miteinander verglich. Denn, wenn gleich in den Abtheilungen des Randes vielleicht keine Fehler von dieser Größe sind, oder wenn man dieselben auch gleich durch Prüfungen ausfindig gemacht hätte, und dem ausgemessenen Winkel die daher rührende Correction gäbe, so können doch andere Umstände, z. E. eine etwas unrichtige Stellung des Werkzeugs, eine etwanige Excentricität, die Unvollkommenheit des Gesichts u. s. w. zusammen genommen, bey einen so kleinen Instrumente, gar leicht einen Irrthum von 1 bis 2 Minuten hervorbringen. Wenn auch gleich in vielen Fällen die Beträchtlichkeit des Fehlers nicht von der angegebenen Größe seyn möchte, so muß man doch in der Theorie von den Folgen der Fehler ein für allemal etwas bestimmtes festsetzen, und hierzu muß man allemal den größten unvermeidlichen Fehler annehmen, der sich von der Beschaffenheit und Größe eines Werkzeugs erwarten läßt.

Bey der gewöhnlichen Einrichtung und Größe der Boussolen, wird man bey Messung eines Winkels mit diesem Werzeuge, einen

Feh-

Fehler von 15 bis 20 Minuten, wohl schwerlich vermeiden können; daher werde ich bey der Boussole den größten unvermeidlichen Fehler auf 15 bis 20 Min. ansetzen.

§. 203. Die Fehler, welche in einem ausgemessenen Winkel vorgefallen sind, können nun entweder den Winkel zu groß oder zu klein angeben, d. h. wenn man den ausgemessenen Winkel = A, und die Größe des unvermeidlichen Fehlers = α setzt, so ist der wahre Winkel entweder A — α oder A + α. Welches von beyden nun in einem besondern Falle statt findet, läßt sich nicht entscheiden, sondern man muß beydes annehmen, und die Folgen davon berechnen.

Da solchergestalt die begangenen Fehler bald positiv bald negativ sind, so wird es zur Richtigkeit einer Messung sehr vortheilhaft seyn, wenn man die Größen zu wiederholtenmahlen misset, und aus allen das Mittel nimmt. Wenn daher z. E. ein Winkel mit einem Astrolabio viermahl gemessen würde, und man aus allen vier Resultaten ein Mittel nähme, so würde man wahrscheinlich den Winkel viermahl genauer finden, als wenn man ihn z. E. nur einmahl mäße.

Da es aber auf dem Felde eine sehr große Verzögerung der Arbeit seyn würde, alle

Grö-

Größen zu wiederholtenmahlen zu messen, so läßt man es meistens, wenn nicht eine ausserordentliche Schärfe erfordert wird, bey der einmahligen Messung bewenden, und nimmt an, daß man einem so großen Fehler ausgesetzt sey, als man von der Natur des gebrauchten Werkzeugs (§. 202.) zu befürchten hat, und sucht nun die Folgen desselben, d. h. dessen Einfluß auf die unbekannten Größen, zu berechnen.

§. 204. Setzt man nun muthmaßlich ein für allemahl einen gewissen Fehler fest, so wird es gar sehr auf die Lage der bekannten Größen gegen die unbekannten ankommen, ob die in den gemessenen Linien und Winkeln begangenen Fehler, auf die Bestimmung der unbekannten Stücke einen beträchtlichen Einfluß haben, oder nicht. Um hievon nur in einer Zeichnung ohngefähr einen Begriff zu geben, und den Grund zu den folgenden Untersuchungen zu legen, so will ich annehmen, B Fig. LXIV. sey ein Object auf dem Felde, dessen Weite von A man aus der gemessenen Standlinie AC und den beyden Winkeln BAC, BCA bestimmen wollte.

Gesetzt nun, der Winkel BCA und die Standlinie AC seyen richtig gemessen worden, den Winkel BAC habe man aber um den kleinen Winkel BAb falsch gemessen, dergestalt, daß also BAC den wahren Winkel, bAC den falsch gemessenen vorstellet, so erhellet, daß man aus dem Winkel C, der Standlinie AC, und dem unrichtigen Winkel bAC, nicht die wahre Weite AB, sondern eine ganz andere Ab finden würde, weil man statt des wahren Dreyecks ABC, das unrichtige AbC erhielte. Um so viel also Ab kleiner oder größer ist als AB, so viel beträgt, in Absicht der Weite AB, die Folge des Fehlers, den man in Messung des Winkels BAC begangen hat.

Hier in der Figur ist nun die Standlinie AC so angenommen, daß das Dreyeck BAC ohngefähr gleichschenklicht ist.

Man setze aber, die Weite AB zu bestimmen, hätte man nicht die Standlinie AC, sondern eine andere Ac angenommen, welche mit AB einen sehr stumpfen Winkel cAB mache. Ich will völlig, wie vorhin, annehmen, Ac und der Winkel c seyen richtig, der Winkel an A aber, nemlich cAB, wieder um den kleinen Winkel BAβ falsch gemessen worden, und will setzen, daß BAβ = BAb sey, so erhellet, daß man jetzt ebenfalls nicht das wahre Dreyeck cAB, sondern wieder das unrichtige cAβ, mithin auch nicht die wahre Weite AB, sondern Aβ finden würde. Nun wird man aber schon aus der bloßen Zeichnung sehen, daß wegen Ac = AC, und βAB = BAb der Unterschied AB — Aβ weit be-

beträchtlicher seyn wird, als der Unterschied AB — Ab.

Diese Unterschiede drücken aber die Fehler aus, welche man in der Seite AB zu befürchten hat, wenn man selbige entweder aus der Standlinie Ac, oder AC bestimmen will. Es ist also klar, daß wenn man gleich in Messung des Winkels A an beyden Standlinien einerley Fehler begienge, derselbe dennoch bey Auswahl der Standlinie Ac, die Weite AB mit einer größern Unrichtigkeit geben würde, als bey der Wahl der Standlinie AC, und daß dieß daher rühren müsse, daß bey Annehmung der Standlinie Ac, der Winkel cAB sehr stumpf ist, hingegen CAB an der Standlinie AC eine schicklichere Größe hat. Dieß zeigt, wie sehr die richtige Bestimmung der unbekannten Stücke (wie z. E. AB) von einer schicklichen Auswahl der willkührlichen oder bekannten Größen abhänge, und wie einerley Fehler in den gemessenen Stücken, gar verschiedenen Einfluß auf die Bestimmung der unbekannten haben können. Woraus dann ferner folgt, daß ein schlechteres Instrument, bey einer schicklichen Auswahl der willkührlichen Standpunkte und Linien, oft eben so gute Dienste leistet, als ein gutes Werkzeug, bey schlimmern Umständen; daß z. E. ein Fehler von 10 Minuten, bey Messung der Winkel an der Standlinie AC, vielleicht nicht so gefährlich ist, als ein Fehler von 1 Minute, in den Winkeln an der Standlinie A c.

Dieses Beyspiel wird nun einigermaaßen den Nutzen zeigen, den man von der Theorie und Berechnung der Folgen der Fehler, zu erwarten hat.

Die allgemeine Theorie hievon, aber bloß synthetisch vorgetragen, findet sich in Marinoni's oberwähnten Werke, im zweyten Theile. Sein Vortrag ist aber so weitläuftig, und mit so beschwerlichen Demonstrationen und Figuren begleitet, daß man gar leicht dabey ermüdet. — Und am Ende siehet man doch nicht ein, worauf eigentlich die Sache ankomme.

Ich werde daher diese Theorie nicht synthetisch, sondern analytisch behandeln, und mich hierzu der trigonometrischen Sätze bedienen, die ich im vorhergehenden bereits beygebracht habe, weil hiedurch die Lehre theils allgemeiner, theils sehr viel kürzer und weniger ermüdend, vorgetragen werden kann. Diejenigen, welche sich vor etwas Buchstabenrechenkunst fürchten, dürfen freylich dieses Kapitel nicht lesen, allein diese würden auch Marinoni's verwickelte synthetische Beweise nicht einsehen.

Da auf dem Felde die unbekannten Stücke, durch ein oder mehrere Dreyecke, an denen man

man eine zureichende Anzahl von Seiten und Winkeln misset, bestimmt werden, so wird die Theorie von den Folgen der Fehler in zusammengesetzten Fällen sich auf die Theorie derselben in einzeln Dreyecken gründen. Ich werde also erstlich zeigen, worauf die Sache bey bloßen Dreyecken ankomme, und dann von zusammengesetztern Fällen einige Beyspiele geben, woraus man denn gar leicht sehen wird, wie man in jedem Falle verfahren müsse.

Theorie von den Folgen der Fehler in einzeln Dreyecken,

§. 205. Bekanntermaaßen ist ein Dreyeck durch drey gegebene Stücke bestimmt, vorausgesetzt, daß es nicht lauter Winkel sind. Die Lehre von den Folgen der Fehler kömmt nun darauf an.

Wenn die drey gegebenen Stücke eines Dreyecks etwas falsch gemessen, also etwas größer oder kleiner genommen würden, als sie in der That sind, zu berechnen, in wieferne eines von den gesuchten Stücken des Dreyecks, dadurch verändert oder unrichtig werde. Diese Veränderung heißt dann die Folge der in den gemessenen Stücken vorgefallenen Fehler, in Absicht des unbekannten Stückes.

Man

Man könnte die Frage schon durch die gemeine Trigonometrie auflösen, und so mögen auch diejenigen verfahren, die mit der Buchstabenrechnung nicht zurecht kommen können.

Gesetzt, die Grundlinie eines Dreyecks wäre 100 Ruthen, und die beyden Winkel an ihr 50°; 128°; man wollte berechnen, was in einer von den beyden übrigen Seiten, z. E. derjenigen, welche dem Winkel von 50° gegenüberstehet, und die ich a nennen will, für ein Fehler entstände, wenn man statt der wahren Grundlinie von 100 R. z. E. eine von 100 R. 8 Fuß, statt der wahren Winkel 50°, 128°, die falsch gemessenen 50° 4′; 128° 5′, annähme, und also zum voraussetzte, daß in Messung der Grundlinie ein Fehler von 8 Fußen, in dem einen Winkel ein Fehler von 4′, und in dem andern ein Fehler von 5′ begangen worden wäre, und zwar daß man die erwähnten Größen um so viel zu groß gemessen hätte, so könnte man auf folgende Art verfahren.

Man berechne erstlich die Seite a, aus den Größen 100 R. 8 Fuß; 50° 4′; 128° 5′. Und hierauf diese Seite a aus den Größen 100 R.; 50°; 128°. Beyde Resultate ziehe man von einander ab, so wird alsdann der Rest, die Folge der in der Grundlinie und den Winkeln, begangenen Fehler, in Absicht auf die Seite a anzeigen.

Wenn

Wenn ich erstlich aus 100 Ruthen 8 Fuß, $50^{\circ}\ 4'$; $128^{\circ}\ 5'$ die Seite a berechne, so finde ich dieselbe = 23800 Fuß
aber aus 100 R.; 50°; 128° wird sie = 21950 Fuß

Unterschied = 1850 Fuß

Hieraus erhellet, daß die Seite a um 1850 Fuß ungewiß wäre, wenn man in den Winkeln an der Grundlinie, nur einen Fehler von 4 bis 5 Minuten begangen hätte, und der Fehler der Grundlinie selbst nur 8 Fuß betrüge.

Auf diese Art würde man nun auch in andern Fällen bloß durch gemeine Trigonometrie, die Folge der begangenen Fehler berechnen. Allein da man theils immer zwey Dreyecke, nemlich das fehlerhafte und das wahre auflösen muß; und übrigens auch in vielen Fällen die Rechnung solchergestalt zu weitläuftig ausfällt, so will ich diese Methode bloß denjenigen überlassen, die nicht mit der Buchstabenrechnung zurechte kommen können, und nun zeigen, wie man weit bequemer und allgemeiner durch algebraische Formeln zum Endzweck gelange.

§. 206. Wenn eines Dreyecks PQR Fig. LXV. Seiten PR = q; QR = p; PQ = r, und die gegenüberstehenden Winkel Q, P, R, genannt werden, so hat man für die Auflösungen

gen der Dreyecke, folgende zwey allgemeine trigonometrischen Formeln

I) $p \sin R = r \sin P$

II) $q^2 + r^2 - 2\,qr \cos P = p^2$ (Trig. S. XVII)

Diese beyden Auflösungen enthalten fast alle vorkommenden Fälle, und wenn man in jeder dieser Formeln, allemahl drey Größen als bekannt ansiehet, so läßt sich daraus die 4te durch Rechnung finden.

Es scheinet zwar der Fall, wo aus den zwey Winkeln P, Q, und der dazwischen liegenden Seite r, das übrige gesucht würde, nicht mit unter diesen beyden Formeln enthalten zu seyn. Allein wenn man einiges Augenmerk auf die erste Formel richtet, so wird man finden, daß dieser Fall auch in ihr begriffen ist. Denn wenn man die beyden Winkel P, Q, von 180° abziehet, so hat man den Winkel R, man setze also nur in die Formel (I) statt R den Werth $180° - P - Q$, so hat man die Auflösung für den Fall, wo aus zwey Winkeln, und der dazwischen liegenden Seite das übrige bestimmt wird.

Ferner ist auch der Fall, wo aus den beyden Seiten und dem eingeschossenen Winkel, einer von den beyden übrigen Winkeln gesucht würde, nicht mit unter den beyden Formeln

begrif-

begriffen. Ich habe aber denselben mit Fleiß ausgelassen, weil es auf dem Felde sehr selten vorkömmt, daß man einen Winkel sucht.

Da nun solchergestalt diese Formeln allgemein die Verhältnisse zwischen den bekannten und gesuchten Größen eines Dreyecks ausdrücken, so erhellet, daß man vermittelst derselben auch allgemein wird bestimmen können, um wie viel sich die gesuchten Größen verändern, wenn man die bekannten Größen etwas falsch gemessen hätte, und sie also etwas anders annähme, als sie würklich sind.

Da man ferner die in den gemessenen Größen begangenen Fehler, als Veränderungen dieser Größen ansehen kann, weil sie etwas größer oder kleiner angenommen werden, als sie würklich sind, so siehet man leicht, daß die Untersuchung darauf ankomme, zu finden, um wie viel sich obige beyde Formeln verändern, wenn man jede Größe ihr, sich etwas verändern läßt.

Aus dem vorhergehenden (Trig. S. XXVII) ist bekannt, daß wir die Veränderung einer Größe mit dem davor gesetzten Buchstaben d bezeichnen.

Die Ausdrückungen dp, dq, dr, dQ, dP u. s. w. werden also die Werthe bezeichnen, um um die des Dreyecks Seiten p, q, r, oder Winkel Q, P u. s. w. größer oder kleiner genommen werden, als sie würklich sind; sie bezeichnen folglich die vorgefallenen Fehler in den Seiten oder Winkeln, dergestalt, daß, wenn p, q, Q u. s. w. die wahren Größen sind, $p + dp$; $q + dq$; $Q + dQ$ u. s. w. die fehlerhaften darstellen.

Wenn die falsch gemessenen Stücke größer sind, als die wahren, so müssen die Werthe von dp, dq u. s. w. positiv seyn; hingegen negativ, wenn die Größen zu klein gemessen worden.

Wir wollen nun untersuchen, wie man auf eine bequeme Weise, in jedem Falle das Verhältniß zwischen den Fehlern, oder zwischen den Werthen von dp, dq, dQ u. s. w. in einem Dreyecke bestimmen könne; und da dp, dq, dQ u. s. w. in Absicht der Größen p, q, Q selbst, als sehr geringe angenommen werden, so können wir dazu, die zu Anfange dieses Buches beygebrachten Formeln (Trig. S. XXV. ꝛc.) für die Aenderungen der Producte, Quotienten u. s. w. mit Nutzen gebrauchen.

Aufgabe.

§. 207. In einem Dreyecke PQR sind gemessen worden; die beyden

Win-

Winkel P, Q, und die Grundlinie r, man verlangt zu wissen, um wie viel sich eine von den beyden übrigen Seiten, z. E. p, verändere, wenn die Größen P, Q, r etwas falsch gemessen worden.

Aufl. I. Man verlangt also in dem Dreyecke PQR, das Verhältniß zwischen den Werthen dp, dQ, dP, dr.

II. Um dasselbe zu finden, suche man erstlich die Gleichung zwischen den Größen P, Q, r, p.

III. Sie ist nach der I. Formel des 206. §. folgende

$$p \sin (180^\circ - P - Q) = r . \sin P \text{ oder}$$
$$p \sin (P + Q) = r \sin P.$$

IV. Man überlege nun, daß, wenn in dieser Formel sich die Größen p, r, P, Q um etwas verändern, sich auch die Producte $p \sin (P + Q)$, $r \sin P$, verändern, und weil diese Producte gleich sind, so werden auch ihre Aenderungen gleich seyn.

V. Ich suche nun erstlich die Aenderung des Products $p \sin (P + Q)$ wenn ich annehme, daß sich p um dp, P um dP, Q um dQ verändern.

VI.

VI. Dieß finde ich nach der Formel Trig. S. XXXIV. indem ich das dortige $x = p$, das dortige $y = \sin(P + Q)$ setze; so wird wegen $d(xy) = xdy + ydx$ hier

$$d(p \sin(P+Q)) = pd \sin(P+Q) + \sin(P+Q)dp.$$

Nun ist aber $d \sin(P+Q)$ die Veränderung eines Sinus, und kann daher nach (Trig. S. XXXVIII.) berechnet werden, wenn man das dortige $a = P + Q$ setzet, dieß giebt demnach wegen $da = dP + dQ$ (Trig. S. XXXI.) den Werth von

$$d \sin(P+Q) = (dP + dQ) \cdot \cos(P+Q)$$

Mithin wird die Veränderung des erwähnten Products

$$= p(dP + dQ) \cdot \cos(P+Q) + \sin(P+Q) \cdot dp.$$

VII. Auf gleiche Weise suche ich die Veränderung des Products $r \cdot \sin P$, wenn sich nemlich r um dr, P um dP ändert.

Man setze also in die Formel (Trig. S. XXXIV.) jetzt $x = r$, $y = \sin P$, so wird

$$d(r \cdot \sin P) = r \cdot d \sin P + \sin P \cdot dr$$

Aber $d \sin P = dP \cdot \cos P$, daher die Veränderung des Products $r \cdot \sin P$

$$= r \cdot dP \cdot \cos P + \sin P \cdot dr.$$

VIII.

VIII. Die beyden Werthe für die Veränderungen der erwähnten Producte einander gleich gesetzt, geben nun eine Gleichung zwischen den Größen dP, dQ, dr, dp, d. h. eine Gleichung zwischen den Fehlern in den Winkeln und Seiten eines Dreyecks, und es erhellet leicht, daß, wenn drey von diesen Größen, z. E. dP, dQ, dr, gegeben wären, man die 4te dp durch Rechnung finden könne, wodurch also angezeigt würde, was die in den beyden Winkeln P, Q, und der Standlinie r begangenen Fehler für einen Irrthum in der Seite p hervorbringen.

Allein da die Gleichung, welche sich aus (VI. VIII.) ergiebt, etwas weitläuftig ausfällt, und wir noch einige Reductionen vornehmen müßten, sie auf den kürzesten Ausdruck zu bringen, so will ich zeigen, wie man in der jetzigen Aufgabe, die Gleichung zwischen den Fehlern dP, dQ, dr, dp noch auf eine weit leichtere Art finden könne.

IX. Weil nemlich die Gleichung III. aus ein paar Producten bestehet, die einander gleich sind, so erhellet, daß die Logarithmen derselben gleich seyn müssen. Es ist also

$$l\,p + l\sin(P+Q) = l\,r + l\sin P.$$

X. Folglich hat man auch

$$d\log p + d\log\sin(P+Q) = d\log r + d\log\sin P.$$

XI.

XI. Aber aus Trig. S. XLVI. (das dortige $x = p$ gesetzt) ist

$$d \log p = B \cdot \frac{dp}{p}$$; und eben so $$d \log r = B \cdot \frac{dr}{r}$$

Ferner ist aus Trig. S. XLVII. das dortige $a = P$ gesetzt,

$d \log \sin P = B \cdot dP \cdot \cot P$ und eben so

$d \log \sin (P + Q) = B \cdot (dP + dQ) \cdot \cot (P + Q)$

diese Werthe nun in die Gleichung X. substituirt, und durchgängig mit B dividirt, geben

$$\frac{dp}{p} + dQ \cot (P+Q) = \frac{dr}{r} + (\cot P - \cot (P+Q)) dP$$

XII. Nun ist aber $\cot P = \frac{\cos P}{\sin P}$ und

$\cot (P + Q) = \frac{\cos (P + Q)}{\sin (P + Q)}$ daher

$\cot P - \cot (P + Q) =$

$$\frac{\sin (P+Q) \cos P - \sin P \cos (P + Q)}{\sin P \sin (P + Q)}$$

$$= \frac{\sin Q}{\sin P \sin (P + Q)}$$ (Trig. S. XII).

XIII.

XIII. Dieser Werth also in die Gleichung XI. substituirt, giebt

$$\frac{dp}{p}+dQ\cot(P+Q)=\frac{dr}{r}+\frac{\sin Q}{\sin P\sin(P+Q)}.dP$$

wo ich künftig der Kürze halber $\cot(P+Q)=N$ und

$$\frac{\sin Q}{\sin P\sin(P+Q)}=M \text{ mithin}$$

$$\frac{dp}{p}+N\,dQ=\frac{dr}{r}+M\,dP$$

setzen will.

XIV. Diese Gleichung zwischen den Fehlern in den Seiten und Winkeln ist nun ohnstreitig so kurz als möglich, und hat den Vortheil, daß die Glieder $\frac{dp}{p}$, $\frac{dr}{r}$ bloß von den Seiten des Dreyecks, hingegen NdQ, MdP bloß von den Winkeln desselben abhängen, welches zu verschiedenen Folgerungen nützlich seyn kann.

Zugleich ist diese Gleichung auch besonders bequem, die Verhältnisse der Fehler dp, dr zu ihren zugehörigen Seiten

zu

zu finden; denn die Quot. $\frac{dp}{p}$, $\frac{dr}{r}$ drücken eigentlich aus, wie groß die Fehler dp, dr, in Absicht ihrer zugehörigen Seiten p, r, sind, und oft verlangt man nicht den absoluten Werth des Fehlers, sondern vielmehr dessen Verhältniß zur zugehörigen Größe.

Wenn man also z. E. für den Quotienten $\frac{dp}{p}$ den Werth $\frac{1}{1000}$ fände, so zeigte dieses an, daß man um ein Tausendtheilgen des ganzen gefehlet hätte, dergestalt, daß, wenn z. E. die Seite $p = 1000$ Ruthen wäre, der Fehler derselben 1 Ruthe betrüge.

Uebrigens ist hier noch zu bemerken, daß die Werthe von dP, dQ, die Fehler in den Winkeln, nicht in Minuten und Secunden bedeuten, sondern vielmehr in Decimaltheilgen des Sinus totus, der durchgängig $= 1$ gesetzt worden: werden aber dP, dQ würklich in Secunden angenommen, so muß man statt dP, dQ, eigentlich die Werthe $\frac{dP}{206264}$, $\frac{dQ}{206264}$ setzen, damit man ihren Werth in Decimaltheilen des Sinus tot. erhalte.

Die

Die gefundene Formel wird nun dienen, in jedem Falle die Folge der Fehler, und deren Verhältniß zu den zugehörigen Größen zu finden. So z. E. wenn man in dem Dreyecke PQR, die beyden Winkel P, Q, und die Grundlinie r, um dP, dQ, dr, falsch gemessen hätte, und wollte deren Erfolg auf die Seite P, finden; so dürfte man nur in obiger

Gleichung den Werth von $\frac{dp}{p}$ suchen.

Also würde

$$\frac{dp}{p} = \frac{dr}{r} + MdP - NdQ.$$

Wollte man z. E. aus den falsch gemessenen Größen P, Q, p, den Fehler in der Grundlinie r bestimmen, so hätte man

$$\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} - MdP + NdQ \text{ u. s. w.}$$

Woraus also erhellet, daß, wenn von den 4 Fehlern dP, dQ, dr, dp, drey als gegeben angesehen werden, man den 4ten durch Rechnung finden könne.

XV. Die bisherige Rechnung setzt zum voraus, daß, wenn die wahren Größen P, Q, p, r sind, die fehlerhaften P + dP, Q + dQ,

$p + dp$, $r + dr$ heissen, mithin die Fehler dP, dQ, dp, dr, positiv sind, d. h. die Größen P, p, Q, r zu groß gemessen worden.

Es erhellet, daß wenn die Seiten und Winkel zu klein gemessen wären, man in obiger Formel XIII, die Werthe dQ u. s. w. als negativ betrachten müsse.

Wenn in einer von den Größen P, Q, r, p, keine Fehler vorgefallen sind, so siehet man ihre Veränderung als o an; in solchen Fällen werden also dP, dQ u. s. w. $= 0$ gesetzt. Z. E. wenn man die Grundlinie r als richtig gemessen annähme, so ist $dr = 0$ mithin bloß

$$\frac{dp}{p} = MdP - NdQ.$$

Und wenn auch Q richtig gemessen worden,

so hätte man nur $\frac{dp}{p} = MdP$

Woraus man also den Fehler fände, welcher in der Seite p, bloß von dem falsch gemessenen Winkel P herrührte.

Ueberhaupt wird also die allgemeine Gleichung (XIII) unter den verschiedenen Voraussetzungen, die man den Werthen von dP, dQ u. s. w. giebt, eine Menge einzelner Fälle in sich enthalten, die man bey Hrn. Marinoni durch weitläuftige Demonstrationen und Figuren aus einander gesetzt findet.

XVI. Um das bisherige mit einem Beyspiele zu erläutern, so will ich setzen, in dem Dreyecke PQR, seyen die Grundlinie PQ = r = 100 Ruthen, P = 30° 6′; Q = 140° 8′ würklich gemessen worden, man wollte daraus die Seite RQ = p finden, und zugleich angeben, wie zuverlässig die Seite p gefunden würde, wenn die Grundlinie r um 2 Fuß, der Winkel P aber um 5 Minuten, und der Winkel Q um 4 Minuten falsch und zwar zu groß gemessen worden wäre. Die wahren Größen würden also folgende seyn: r = 100 Ruthen — 2 Fuß = 998 Fuß; P = 30° 6′ — 5′ = 30° 1′; Q = 140° 8′ — 4′ = 140° 4′, und die Werthe von dr = + 2 Fuß; dQ = + 4′ = + 240″; dP = + 5′ = + 300″.

Weil nun für diesen Fall

$$\frac{dp}{p} = \frac{dr}{r} + M\,dP - N\,dQ$$

so erhält man folgendes

$$\frac{dr}{r} = \frac{2}{998} = \frac{1}{499} = 0{,}002$$

 Fer-

Ferner

$$\begin{array}{rcl} \log N = l\cot 170^\circ\ 5' & = & 0{,}7573897 \\ l\,dQ = l\ 240 & = & 2{,}3802112 \\ \hline & & 3{,}1376009 \\ l\ 206264 & = & 5{,}3144252 \\ \hline \text{Rest} & = & 3{,}8231757 - 6 \end{array}$$

dieß giebt also

$$\frac{NdQ}{206264} = -0{,}006655$$

der eigentliche Werth von $\frac{NdQ}{206264}$ ist hier aus der Ursache negativ, weil die Cotangente von $170^\circ\ 5'$ oder der Weth von N, negativ ist.

Ferner ist für das Glied

$$\frac{MdP}{206264} \text{ oder } \frac{\sin Q}{\sin P \sin (P + Q)} \frac{dP}{206264}$$

$$\begin{array}{rcl} \log \sin Q = l \sin 140^\circ\ 4' & = & 9{,}8074646 - 10 \\ l\,dP = l\ 300 & = & 2{,}4771213 \\ \hline \log \text{ des Zählers} & = & 2{,}2845859 \\ l \sin P = l \sin 30^\circ\ 1' & = & 9{,}6991887 - 10 \\ l\,f\,(P+Q) = l\,f\ 170^\circ\ 5 & = & 9{,}2360726 - 10 \\ l\ 206264 & = & 5{,}3144252 \\ \hline \log \text{ des Nenners} & = & 4{,}2496865 \\ \text{also } \log \frac{MdP}{206264} & = & 3{,}0348994 - 5 \end{array}$$

nem=

nemlich nachdem die Charakteristik des Log. des Zählers um 5 Einheiten vermehret worden, also

$$\frac{M\,dP}{206264} = 0{,}01083.$$

Unter denen im Exempel angenommenen Umständen wird also

$$\frac{dp}{p} = 0{,}002 + 0{,}01083 - (-0{,}006655)$$

$$= 0{,}002 + 0{,}01083 + 0{,}006655$$

oder $\frac{dp}{p} = + 0{,}01948$ beynahe $= 0{,}02$.

Die angenommenen Fehler in den Messungen von P, Q′, r, würden also einen solchen Einfluß auf die Seite p haben, daß man nur bis auf $\frac{2}{100}$ oder $\frac{1}{50}$ ihrer Größe sicher wäre; welches bey 50 Ruthen schon eine ganze Ruthe, also etwas sehr erhebliches betragen würde. So zeigt denn dieser Bruch $\frac{1}{50}$ überhaupt bloß die Größe des Fehlers dp in Verhältniß zur Seite p an. Wollte man den wahren oder absoluten Fehler dp in Ruthen und Fußen ausfinden, so dürfte man nur aus den oben angenommenen Datis die Seite p würklich berechnen, und ihren 50ten Theil nehmen.

Ich

Ich will aber hier diese leichte Rechnung selbst nicht anstellen.

XVII. Dieses Exempel setzte voraus, daß alle Größen auf dem Felde zu groß gemessen wurden; es ist klar, wenn einige davon zu klein gemessen worden wären, man nur die zugehörigen Werhe dQ u. s. w. verneint nehmen müsse. Dieß verändert also in der ganzen Rechnung nichts, als daß man bloß die Zeichen der Glieder $\frac{dr}{r}$, NdQ, MdP jedesmahl gehörig nimmt.

Zum Exempel wenn die Seite r um 2 Fuß zu klein gemessen worden, das übrige aber mit vorhergehendem Exempel einerley bliebe, so wäre

$$\frac{dp}{p} = -0{,}002 + 0{,}01083 + 0{,}00665$$

$$= + 0{,}01548.$$

Wäre aber auch der Winkel Q um 4 Minuten zu klein gemessen worden, so hätte man

$$\frac{dp}{p} = -0{,}002 - 0{,}01083 + 0{,}00665$$

$$= - 00618.$$

Im

Im letztern Beyspiele wäre also der Fehler in der Seite p auch negativ, betrüge aber nur ohngefähr 0,006, oder $\frac{1}{166}$ der Seite p, wäre also bey weiten nicht so beträchtlich, als wenn alle Größen auf dem Felde zu groß gemessen worden wären, wie in (XVI).

XVIII. Nachdem solchergestalt, für gewisse Werthe von dQ, dr, dp, die Größen MdP u. s. w. einmal berechnet sind, so kann man gar leicht finden, unter welchen Umständen der Werth von $\frac{dp}{p}$ am größten wird. Man siehet nemlich, daß in dem obigen Beyspiele $\frac{dp}{p}$ am größten wird, wenn alle Größen P, Q, r zu groß gemessen worden, oder wenn dQ, dP, dr insgesammt positiv sind, denn in diesem Falle wurden alle Werthe $\frac{dr}{r}$, MdP u. s. w. zusammenaddirt (XVI). Hingegen in XVII. wurden einige Glieder bejaht, andere verneint,

wel-

welches denn nothwendig für $\frac{dp}{p}$ einen geringern Werth hervorbringen mußte.

XIX. Hieraus zeigt sich zugleich der Vortheil, den die bisher gewiesene algebraische Methode, die Folgen der Fehler zu berechnen, in Absicht der in §. 205. erwähnten gemeinen trigonometrischen Methode hat. Nach letzterer müßte man für jede Voraussetzung, die man den Werthen von dQ, dr, dP, in Absicht des $+$ oder $-$ geben kann, zwey Dreyecke berechnen, um den Werth von dp zu finden; und da es sich nicht so leicht übersehen läßt, wie man in einem gewissen Falle, die Werthe von dQ, dr, dP bejaht oder verneint nehmen muß, um das größte dp zu finden, so wird man offenbar eine Menge von Dreyecken berechnen müssen, bis man die größte Folge der begangenen Fehler findet. Dieß ist aber hingegen bey der algebraischen Berechnung nicht nothwendig; denn wenn man für gegebene dQ, dP; dr, einmahl die Werthe von MdP, $\frac{dr}{r}$ u. s. w. berechnet hat, so braucht man weiter nichts, als diese Glieder bald positiv bald negativ zu nehmen, und so ihre Summe zu untersuchen; woraus denn gar bald erhellen wird,

wird, wie man die für dQ, dP, dr angenommenen Größen positiv oder negativ nehmen müsse, damit man das größte dp, oder den größten Einfluß der Fehler, in Absicht der Seite p, finde. Um sich von der Weitläuftigkeit der gemeinen trigonometrischen Methode noch mehr zu überzeugen, so lese man hierüber nur z. E. den 187. §. von Wilkens Landesvermessungen, wo in dem dortigen Exempel sieben Dreyecke aufgelöset werden, um den größten Fehler der Seite p zu finden.

Es ist klar, daß es für einen vorgegebenen Fall, nothwendig ist, unter allen den Werthen, die $\frac{dp}{p}$, erhalten kann, vorzüglich auf den größten Rücksicht zu nehmen, weil dieser die größte mögliche Zuverlässigkeit der gesuchten Seite p bestimmt. Denn ob man gleich nicht weiß, welche von den gegebenen Größen P, Q, r, zu groß oder zu klein gemessen worden, und man folglich ungewiß ist, welche von den für dP, dQ, dr angenommenen Werthen man positiv oder negativ nehmen müsse, so muß man doch unter allen den Voraussetzungen, die man in Absicht des $+$ oder $-$ diesen Größen dP, dQ, dr geben kann, gerade diejenige wählen, welche für $\frac{dp}{p}$ den größten Werth giebt, weil dieser Fall

würk-

würklich vorhanden seyn kann, und daher die möglichste Zuverlässigkeit entscheidet, welche in der Seite p zu erwarten stehet.

Einige Folgerungen aus dem bisherigen.

§. 108. I. Wenn die Grundlinie r sowohl, als auch der Winkel Q als richtig gemessen angenommen wird, mithin $dr = 0$, $dQ = 0$ sind, so hat man bloß

$$\frac{dp}{p} = M\,dP.$$

Für diesen Fall wird demnach der Fehler in der Seite p, oder der Werth von dp zu p selbst sich verhalten wie M : r, d. h.

$$\text{wie } \frac{\sin Q}{\sin P \sin (P + Q)} : r$$

vorausgesetzt, daß der Fehler in der Messung des Winkels P, also der Werth von dP immer derselbe bleibe. Da nun M bloß von den Winkeln P und Q abhängt, so wird der Fehler in der gesuchten Seite p bald größer bald kleiner seyn müssen, je nachdem die Standlinie r gegen p diese oder jene Lage hat.

II. Es frägt sich nun, wie müssen die Winkel P, Q an der Standlinie beschaffen seyn,

da:

damit einerley Fehler im Winkel P einen so geringen Einfluß, als möglich, auf die gegenüberstehende Seite p habe, oder der Werth von $\frac{dp}{p}$ so klein als möglich ausfalle?

Da der Winkel Q als gegeben oder richtig gemessen angenommen wird, so wird die Frage darauf ankommen, wie groß muß man P nehmen, damit die Größe M oder der Bruch $\frac{\sin Q}{\sin P \sin (P + Q)}$ den kleinsten Werth erhalte, denn $\frac{dp}{p}$ verhält sich wie diese Größe M.

Um dieses zu entscheiden, so erinnere man sich aus der Lehre von Brüchen, daß, wenn eines Bruchs Zähler unverändert bleibt, der Bruch desto kleiner werde, je größer sein Nenner wird. Da nun bey oberwähntem Bruche der Zähler sin Q unverändert bleibt, weil Q als gegeben angesehen wird, so wird dieser Bruch einen desto kleinern Werth haben, je größer sein Nenner, also das Product sin P sin (P + Q) ist. Um aber zu finden, was man für P annehmen müsse, daß dieses Product am größten werde, so überlege man folgendes:

Weil

Weil sin $(P+Q) = \sin(180^\circ - P - Q)$ so ist auch das erwähnte Product

$$= \sin P \cdot \sin(180^\circ - P - Q)$$

Man setze in Trig. S. XIII. 10. das dortige $\beta = 180^\circ - P - Q$ das dortige $\gamma = P$, so wird

$$\sin P \sin(180^\circ - P - Q) = +\tfrac{1}{2}\cos(180^\circ - 2P - Q) - \tfrac{1}{2}\cos(180^\circ - Q)$$

Weil nun $\frac{1}{2}\cos(180^\circ - Q)$ wegen des gegebenen Winkels Q, als unveränderlich angesehen wird, so erhellet, daß das oberwähnte Product am größten seyn werde, wenn cos $(180^\circ - 2P - Q)$ den größten möglichen Werth hat.

Nun ist aber kein Cosinus größer als der Sinus totus, oder als der Cosinus von 0°, es erhellet also, daß, wenn $180^\circ - 2P - Q = 0$ ist, alsdann cos $(180^\circ - 2P - Q)$ den größten möglichen Werth haben werde.

Also ist das Product $\sin P \sin(180^\circ - P - Q)$ oder auch $\sin P \sin(P+Q)$ am größten, mithin der oberwähnte Bruch am kleinsten, wenn

$$180^\circ - 2P - Q = 0 \text{ also}$$

der Winkel $P = 90^\circ - \frac{1}{2}Q$ ist.

Nun

Nun ist aber ferner der Winkel R in dem bisher betrachteten Dreyecke $= 180^{\circ} - P - Q$, folglich statt P den gefundenen Werth $90^{\circ} - \frac{1}{2}Q$ substituirt

$$R = 180^{\circ} - 90^{\circ} + \frac{1}{2}Q - Q = 90^{\circ} - \frac{1}{2}Q$$

Es ist also $R = P$

d. h. die Standlinie r Fig. LXV, die mit der auszumessenden Weite p, einen gegebenen Winkel Q macht, muß so lang genommen werden, daß der Winkel $R = P$ werde, mithin das Dreyeck gleichschenklicht, und die Standlinie $r = p$ sey. Unter solchen Umständen wird der Fehler, den man in Messung des Winkels P begehet, den kleinsten Einfluß auf die Seite p haben, weil alsdann das Product MdP am kleinsten seyn wird.

III. Es wird also für einen gegebenen Winkel Q, die Entfernung p am vortheilhaftesten gefunden, wenn man die Standlinie r, so viel als möglich, der auszumessenden Entfernung p gleich zu nehmen sucht. Ob sich gleich dieses auf dem Felde nicht immer thun läßt, so muß man es doch, wenn es angehen kann, nicht unterlassen. Nach dem Augenmaaße wird man übrigens immer schon ohngefähr die Weite p, so genau schätzen können,

nen, als nöthig ist, um die Länge der Standlinie r darnach einzurichten.

IV. Wenn ich den in (II) gefundenen Werth von P in die Formel für M substituire, so finde ich

$$\frac{dp}{p} = MdP = \frac{\sin Q\, dP}{\cos \frac{1}{2} Q \cos \frac{1}{2} Q}$$

welches sich wegen $\sin Q = 2 \sin \frac{1}{2} Q \cos \frac{1}{2} Q$ (Trig. S. XIII. 2.)

in $\frac{dp}{p} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} Q}{\cos \frac{1}{2} Q} dP = 2 \tang \frac{1}{2} Q \,.\, dP$

verwandelt.

Woraus also erhellet, daß, wenn die Standlinie r, die vortheilhafteste Lage hat, um die Seite p zu bestimmen, sich der Grad der Zuverlässigkeit in der Seite p, oder $\frac{dp}{p}$ verhalte, wie die Tangente des halben Winkels Q den die Standlinie r mit der auszumessenden Seite p machet. Es wird also wegen des in dem Winkel P zu befürchtenden Fehlers dP, der Werth von $\frac{dp}{p}$ desto kleiner seyn, je kleiner man Q nimmt.

Je

Je mehr also die Länge der Standlinie r, der auszumessenden Entfernung p gleich kömmt, und einen desto kleinern Winkel Q, sie mit der Seite p macht, desto zuverlässiger wird die Seite p gefunden, oder desto geringern Einfluß hat der im Winkel P begangene Fehler auf die Seite p.

V. Da wir in (III) gesehen haben, daß die Standlinie r ohngefähr so lang seyn muß, als die auszumessende Entfernung p, so erhellet, daß, wenn man auf eben die Art aus den beyden Winkeln P, Q, an der Standlinie, auch die andere Seite des Dreyecks, nemlich q, am richtigsten bestimmen wollte, man auch $q = r$ nehmen müsse.

Aber wenn $p = q = r$, so ist das Dreyeck PQR gleichseitig, und folglich jeder Winkel $= 60°$.

Woraus denn folgt, daß, wenn zwey Seiten eines Dreyecks auf dem Felde, mit der Standlinie Winkel von 60 Graden machen, oder Winkel, die wenigstens nicht viel von 60 Graden abweichen, alsdann die Standlinie die vortheilhafteste Lage habe, beyde Seiten dieses Dreyecks zu bestimmen.

Je mehr aber die Winkel an einer Standlinie auf dem Felde, von 60 Graden abweichen,

chen, mit desto größerer Unrichtigkeit findet man die Seiten dieses Dreyecks.

Hieraus erhellet, wie schädlich es sey, Dreyecke auf dem Felde, aus solchen Standlinien zu bestimmen, an denen die Seiten dieser Dreyecke, sehr spitze oder stumpfe Winkel machen.

VI. Wenn demnach Fig. LXVI. S, R, W, T, U mehrere Objecte auf dem Felde sind, deren Lagen sowohl unter sich, als gegen die angenommene Standlinie PQ, vermittelst der Dreyecke PSQ, PRQ u. s. w. dadurch bestimmt werden sollen, daß man die Seiten PS, QS; PR, RQ, dieser Dreyecke, aus der Standlinie PQ, und den Winkeln an ihr berechnet, so ist klar, daß, wenn in diesen Winkeln kleine Fehler begangen werden, die Lage eines jeden Objects mit einiger Unrichtigkeit bestimmt werden wird. Unter allen Objecten würde aber dasjenige am richtigsten bestimmt werden, dessen Winkel an der Standlinie so nahe als möglich an 60 Graden kommen. Hier würde es das Object R seyn. Hingegen bey Objecten wie T, U, welche bey P, Q, sehr ungleiche Winkel TPQ, TQP; UPQ, UQP, machen, wird der Grad der Zuverlässigkeit, in Ansehung der Bestimmung ihre Lage gegen die Standlinie PQ, desto geringer ausfallen, je mehr die erwähnten Winkel von 60 Graden abweichen, d. h. je ungleichseitiger die Dreyecke UPQ, QTP sind; denn desto größer ist alsdann der Einfluß, den die in den gemessenen Winkeln begangenen Fehler, auf die Berechnung der Seiten PT, QT; PU, QU u. s. w. haben.

Man wird demnach die Lage solcher Objecte wie T, U, nicht vortheilhaft aus einer Standlinie wie PQ, an welcher so stumpfe Winkel wie PQT, PQU, vorkommen, bestimmen; sondern sicherer verfahren, wenn man für sie eine neue Standlinie PM, unter einem bekannten Winkel gegen die erstere PQ, annimmt und misset, so daß nunmehr die Dreyecke, wie TPM, UPM nicht mehr so stumpfwinklicht ausfallen, und also eine größere Zuverlässigkeit in der Berechnung der Entfernungen PT, MT; PU, MU, aus der neuen Standlinie, und den Winkeln an ihr, zulassen. Sehr oft wird auch bey Entwerfung ganzer Landschaften, ein Ort wie R, der bereits aus der ersten Standlinie bestimmt worden ist, wieder zu einem neuen Standpunkte, also z. E. PR zu einer neuene Standlinie gewählt, um daraus die Object wie T und U, welche gegen PQ, eine zu unbequeme Lage hatten, zu bestimmen. Begreiflich darf aber R kein Punkt seyn, der nicht selbst schon mit einem hinlänglichen Grade der Zuverlässigkeit, aus der

Standlinie PQ bestimmt wäre. Läßt sich ein solcher nicht finden, so daß er zugleich eine vortheilhafte Standlinie, z. E. PR für die Objecte T und U, verschaffte, so muß man freylich sonst eine Standlinie von vortheilhafter Lage entweder unmittelbar messen, oder abstecken, und aus PQ trigonometrisch bestimmen.

Ueberhaupt ist denn eine der wichtigsten Regeln für den Feldmesser, daß, wenn er gewisse bereits bestimmte Punkte braucht, um daraus wieder andere Bestimmungen herzuleiten, er nur solche auswähle, welche am richtigsten bestimmt worden, und die geringste Anhäufung oder Fortpflanzung der Fehler besorgen lassen, und so wird ein Feldmesser, wenn er sich auch nur mittelmäßiger Werkzeuge bedient, oft was genaueres leisten, als ein anderer, der beym Gebrauche der besten Werkzeuge, aus Mangel nöthiger Kenntnisse, nicht die vortheilhaftesten Umstände auszuwählen weis.

VII. Da Fig. LXV. eines Dreyeckes PRQ Seiten QR, PR, mithin auch der Punkt R am sichersten gefunden wird, wenn jeder von den beyden Winkeln P, Q, nahe an 60° kömmt, so setze man nur in obige Formel,

$$\frac{dp}{p} = \frac{\sin Q \, dP}{\sin P \sin (P + Q)} - \cot (P + Q) \, dQ$$

Q =

$Q = 60°$; $P = 60°$; so findet man den Fehler in der Seite p, welcher auch bey der vortheilhaftesten Lage der Standlinie, noch statt finden kann, wenn die Winkel P, Q etwas fehlerhaft gemessen worden.

Dieß giebt demnach:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dP}{\sin 60°} + \tang 30° \cdot dQ.$$

Es ist klar, daß eben dieser Ausdruck auch den Fehler $\frac{dq}{q}$ in der andern Seite q des Dreyecks geben wird, weil q, p gleiche Lagen gegen die Standlinie r haben. Nehme ich nun an, daß in beyden Winkeln P, Q einerley Fehler begangen werden, und zwar die größten, die beym Gebrauche eines gewissen Winkelmessers unvermeidlich sind, setze ich also $dP = dQ$, so wird der Fehler, welcher in jeder von den beyden Seiten des Dreyecks daraus entspringet

$$= \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = \left(\frac{1}{\sin 60°} + \tang 30°\right) dP.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\sin 60°} = \frac{1}{\cos 30°} = \sec 30° = 1{,}15470$$

 und

und tang $30^\circ = 0{,}57735$

also $\frac{dp}{p} = 1{,}73205 \cdot dP$

wo man eigentlich statt dP setzen muß $\frac{dP}{206264}$

wenn dP in Secunden gegeben würde.

Diese Formel wird also zeigen, wie genau wegen der Fehler in den Winkeln P, Q, an der Grundlinie, die Seiten p, q, des Dreyecks, auch bey der vortheilhaftesten Lage der Grundlinie, gefunden werden können.

Wenn ein Winkelmesser die Winkel nur bis auf 1 Minute genau misset, wie genau können auch bey der vortheilhaftesten Lage der Grundlinie, die beyden Seiten des Dreyecks gefunden werden.

Man setze in unsere Formel $dP = 1' = 60''$ so wird

$$\frac{dp}{p} = \frac{1{,}73205 \cdot 60}{206264} = \frac{104}{206264} \text{ beynahe}$$

oder beynahe $\frac{dp}{p} = \frac{5}{10000} = \frac{1}{2000}$.

Man

Man kann also bey jeder Seite p, q des Dreyecks nur bis auf $\frac{1}{2000}$ ihrer Länge sicher seyn. Das heißt, man würde für jede 2000 Ruthen, die in der Seite des Dreyecks enthalten wären, um 1 Ruthe fehlen.

Für einen Winkelmesser, der nur bis auf 2 Minuten sicher mäße, wäre die Zuverlässigkeit in jeder Seite des Dreyecks nur $\frac{1}{1000}$

Kann man demnach bey Ausmessung der Winkel, vermittelst eines Astrolabii von gewöhnlicher Größe, auch bey aller nöthigen Sorgfalt, für einen Winkel von 1 Minute nicht gut stehen (§. 202); so erhellet, daß vermittelst eines solchen Werkzeugs, auch bey den vortheilhaftesten Umständen, die Seiten eines Dreyecks auf dem Felde nicht genauer, als etwas bis auf $\frac{1}{2000}$ ihrer Länge sicher gefunden werden können. Um wie viel geringer würde also die Zuverlässigkeit ausfallen, wenn die Standlinie gegen die beyden Seiten des Dreyecks eine minder vortheilhafte Lage hätte?

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Standlinie ihre gehörige Richtigkeit habe, also d r = o sey. Wäre aber selbst auch die Standlinie etwas fehlerhaft gemessen worden, so würde daher die Unrichtigkeit in Bestimmung der beyden Seiten des Dreyecks noch größer ausfallen.

VIII. Daraus folgt denn, wie genaue Werkzeuge erfordert werden, wenn man auf dem Felde nicht um den 1000ten Theil des ganzen fehlen will, wie viele Sorgfalt also ein Geometer anwenden müsse, wenn er sich von der Wahrheit nicht sehr enefernen will.

Da sich nun überdem Feldmesser oft noch aus Nachlässigkeit oder Bequemlichkeit Fehler erlauben, in der Meinung, daß sie nicht viel auf sich haben, so ist wohl leicht zu erklären, wie so viel unrichtige Risse und Charten entstanden sind.

IX. Die Untersuchungen von (VI) an, betreffen eigentlich die Lage der Standlinie, wenn beyde Seiten des Dreyecks zugleich mit möglichster Zuverlässigkeit bestimmt werden sollen. Aber freylich könnte der Grad der Zuverlässigkeit größer seyn, wenn man nur eine Seite p suchte. Denn man dürfte nach (IV) die Standlinie nur unter einen so kleinen Winkel Q gegen die gesuchte Seite p legen,

legen, daß der Werth von $\frac{dp}{p} = \tang \frac{1}{2} QdP$ (II) so unbeträchtlich würde, als man verlangt. Allein wenn beyde Seiten eines Dreyecks zugleich, mit der möglichsten Genauigkeit gefunden werden sollen, so sind die vortheilhaftesten Umstände, wenn die Winkel an der Standlinie, so nahe als möglich, an 60° kommen. Dieser Fall ist nun eigentlich bey Grundlegung der Landschaften und Bestimmung der Lage der Oerter gegen eine gewisse Standlinie wichtig, weil die Lage eines Ortes, wie R gegen die Standlinie PQ, nicht bloß durch eine, sondern durch beyde Seiten des Dreyecks zugleich bestimmt wird, und folglich jede mit möglichster Zuverlässigkeit gefunden werden muß, wenn R die richtigste Lage gegen P, Q haben soll.

X. Da es nicht allemahl in des Feldmessers Gewalt stehet, die vortheilhaftesten Umstände einer Standlinie auf dem Felde auszuwählen, so werde ich, wenn anders die Umstände nicht gar zu mißlich sind, die möglichste Zuverlässigkeit, in Bestimmung zweyer Seiten eines Dreyecks, aus einer Standlinie, etwa auf $\frac{1}{400}$ ihrer Länge setzen, dergestalt, daß man auf jede 400 Ruthen, um eine

Ruthe

Ruthe ungewiß ist. Einen Fehler von dieser Größe kann man einem Feldmesser wohl verzeihen, da, im Durchschnitt genommen, diese Genauigkeit, in Bestimmung der Lage der Oerter gegen eine Standlinie immer noch erträglich, und wohl schwerlich, bey einem Winkelmesser, der nur, wie ich voraussetze, bis auf zwey Minuten genau misset, zu vermeiden ist, ja ich zweifle sehr, ob in den meisten gewöhnlichen Messungen noch diese Genauigkeit statt findet. Beym Gebrauche des Meßtisches wird begreiflich die Zuverlässigkeit noch geringer seyn, da bey diesem Werkzeuge die unvermeidlichen Fehler noch größer sind, als beym Astrolabio. In den meisten Fällen kann man immer setzen, daß beym Gebrauche des Meßtisches, in Bestimmung zweyer Seiten eines Dreyecks aus einer Standlinie, die Genauigkeit derselben sich wohl schwerlich auf $\frac{1}{200}$ ihrer Länge erstrecken wird. Versuche können auch leicht selbst davon überzeugen.

Aufgabe.

§. 209. In einem Dreyecke PQR, sind die beyden Seiten q, r, und der eingeschlossene Winkel P, etwas falsch gemessen worden, man verlangt zu wissen, in wie ferne dadurch die Seite p unrichtig werde; oder wenn die Fehler der Größen q, q, r, p, P, wie bisher mit dq, dr, dp, dP bezeichnet werden, die Gleichung zwischen dq, dr, dp, dP zu finden. Ich nehme übrigens die Werthe von dq, dr, dp, dP positiv an, dergestalt, daß, wenn q, r, p, P die wahren Größen sind, q + dq, r + dr u. s. w. die fehlerhaften vorstellen.

Aufl. I. Aus (§. 206. II.) ist die Gleichung zwischen p, q, r, P folgende

$$p^2 = q^2 + r^2 - 2\,qr\,.\cos P.$$

II. Man suche nun, um wie viel sich jedes Glied dieser Gleichung verändert, wenn p um dp, q um dq u. s. w. wachsen, und setze die Veränderung von p^2 gleich der Summe der Veränderungen der Glieder

$$p^2,\ r^2\ ;\ -2\,qr\cos P.$$

III. Wenn p um dp zunimmt, so wächst das Quadrat von p um 2 pdp (Trig. S. XXXIV.) oder es ist $d\,(p^2) = 2\,pdp$. Auf gleiche Weise ist $d\,(q^2) = 2\,qdq$; $d\,(r^2) = 2\,rdr$.

IV. Um zu finden, um wie viel sich das Product 2 qr cos P verändert, wenn q um dq, r um dr, P um dP zunehmen, so will ich

ich der Kürze halber das Product $2\,qr\cos P = X$ setzen, und es kömmt also darauf an, den Werth von dX zu finden.

Nun ist, wenn man auf beyden Seiten Logarithmen nimmt

$$l\,2 + l\,q + l\,r + l\cos P = l\,X$$

folglich aus (Trig. S. XLVI. XLVII. 2.), und weil $d\log 2 = 0$ ist, indem sich die 2 nicht verändert, erhält man

$$\frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} - dP\ \mathrm{tang}\ P = \frac{dX}{X}$$

oder auf beyden Seiten mit $X = 2\,qr\cos P$ multiplicirt

$$2\,r\,dq\cos P + 2\,q\,dr\cos P - 2\,qr\,dP\sin P = dX.$$

V. Weil nun aus (I. II.)

$$d(p^2) = d(q^2) + d(r^2) - dX \text{ seyn muß,}$$

so erhält man nach gehöriger Substitution der Wethe aus (III. IV.) folgende Gleichung

$$pdp = qdq + rdr - q\cos P\,dr - r\cos P\,dq + qr\,dP\sin P$$

welche sich in folgenden Ausdruck zusammen ziehet

$$pdp = (q - r\cos P)\,dq + (r - q\cos P)\,pr + + qr\sin P\,.\,dP.$$

VI.

VI. Diese Gleichung stellt also die Relation zwischen den Fehlern dp, dq, dr, dP, vor, dergestalt, daß wenn drey von diesen Fehlern gegeben sind, man den 4ten, welcher also die Folge der erstern drey darstellet, finden kann. Diese Gleichung ist aber nicht kurz genug, auch nicht geschickt die Werthe

von $\frac{dp}{p}$, $\frac{dq}{q}$ u. s. w., nemlich die Verhältnisse der Fehler zu ihren zugehörigen Größen, zu bestimmen. Aus dieser Ursache wollen wir mit dieser Gleichung noch einige Veränderung vornehmen.

VII. Man stelle sich in dem Dreyecke PQR, von Q, R Perpendiculärlinien auf die gegenüberstehenden Seiten vor, so wird man in den sich ergebenden rechtwinklichten Dreyecken gar leicht finden, daß

$q - r \cos P = p \cos R$, $r - q \cos P = p \cos Q$ sey

diese Werthe also in (V) substituirt, geben

$$pdp = p \cos R\, dq + p \cos Q\, dr + qr \sin P\, dP.$$

oder durchgängig mit p^2 dividirt

$$\frac{dp}{p} = \frac{\cos R}{p} dq + \frac{\cos Q}{p} dr + \frac{q}{p} \cdot \frac{r}{p} \sin P\, dP$$

oder

oder

$$\frac{dp}{p} = \cos R \,.\, \frac{q}{p} \,.\, \frac{dq}{q} + \cos Q \,.\, \frac{r}{p} \,.\, \frac{dr}{r} + \frac{q}{p} \,.\, \frac{r}{p} \sin P \, dP$$

Aber in dem Dreyecke PQR ist

$$\frac{q}{p} = \frac{\sin Q}{\sin P}; \quad \frac{r}{p} = \frac{\sin R}{\sin P}$$

(Weil sich die Seiten wie der gegenüberstehenden Winkel Sinusse verhalten).

Also wird

$$\frac{dp}{p} = \frac{\sin Q \cos R}{\sin P} \,.\, \frac{dq}{q} + \frac{\sin R \cos Q}{\sin P} \,.\, \frac{dr}{r}$$

$$+ \frac{\sin Q \sin R}{\sin P} \,.\, dP$$

Nennt man also die Factoren, womit $\frac{dq}{q}$, $\frac{dr}{r}$. dP, multipliciret sind, A, B, C, so wird

$$\frac{dp}{p} = A \,.\, \frac{dq}{q} + B \,.\, \frac{dr}{r} + C \, dP,$$

welches die gesuchte Gleichung zwischen den Werthen von $\frac{dp}{p}$, $\frac{dq}{q}$, $\frac{dr}{r}$, dP ist. Statt dP muß man aber aus obigen Gründen ei-

gentlich $\frac{dP}{206264}$ setzen, wenn dP in Secun-

den gegeben ist.

Die Werthe von A, B, C sind nun be-kannte Größen, weil man alle Winkel des Dreyecks PQR als gegeben ansehen kann, wenn q, r, P gegeben sind.

Für Seiten oder Winkel, die zu klein ge-messen worden, sind dp, dq, dr, dP nega-tig, oder = o für Größen, die richtig gemes-sen worden.

Einige Folgerungen.

§. 210. I. Wenn man mit Marinoni (de re ichnograph. Lib. I. Cap. V. §. V. num I.) annimmt, daß die Fehler in den ge-messenen Linien, diesen Linien selbst proportional sind, wenn man also q : r = dq : dr,

oder $\frac{dq}{q} = \frac{dr}{r}$ setzt, so wird

$\frac{dp}{p} = (A + B)\frac{dq}{q} + C\,dP$ aber

$$A+B = \frac{\sin Q \cos R + \sin R \cos Q}{\sin P} = \frac{\sin (Q+R)}{\sin P}$$

$$= \frac{\sin P}{\sin P} = 1 \text{ folglich}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} + C\, dP$$

Unter dieser Voraussetzung des Herrn Marinoni, die sich durch die Erfahrung zu bestätigen scheint, wird also die Formel (§. 209. VII.) ungleich einfacher.

II. Ist übrigens auch der Winkel P richtig gemessen, folglich $dP = 0$, so ist bloß

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

oder $p : q = dp : dq$ folglich

$$p + dp ; q + dq = p : q$$

oder die fehlerhaften Seiten verhalten sich wie die wahren. Eben dieses gilt auch in (I), wo man aus der Proportion $q : r = dq : dr$ schliesset

$$q + dq : r + dr = q : r.$$

III.

III. Man siehet hieraus, daß, wenn die Fehler der Seiten q, r, eines Dreyecks, in dem Verhältnisse der Seiten selbst stehen, der eingeschlossene Winkel P aber keine Veränderung leidet, das fehlerhafte Dreyeck dem wahren ähnlich seyn müsse.

IV. Andere Folgerungen, in Absicht der Zeichen + oder —, die man den Werthen von dq, dr, dP geben kann, sind eben so, wie in vorhergehender Aufgabe, anzustellen, und man wird mit geringer Mühe aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{dp}{p} = A\,\frac{dq}{q} + B\,\frac{dr}{r} + C\,dP$$

alle einzelnen Fälle herleiten können, wenn man sie nöthig hat, daher ich mich bey dieser Aufgabe nicht länger aufhalten will.

Aufgabe.

§. 211. In einem Dreyecke PQR, wo man zwischen den Größen r, R, p, P, oder zweyen Winkeln und den gegenüberstehenden Seiten, folgende Gleichung

$$p \sin R = r \sin P$$

hat,

hat, die Gleichung zwischen den Fehlern dp, dr, dR, dP, zu finden.

Aufl. Man könnte hier eben wie in der erstern Aufgabe verfahren, und untersuchen, um wie viel die beyden Producte p sin R, r sin P sich verändern, wenn p um dp, R um dR u. s. w. sich verändern; alsdann die Aenderungen der beyden Producte einander gleich setzen.

Hier kann man aber durch Logarithmen kürzer so verfahren.

Weil $l\,p + l \sin R = l\,r + l \sin P$

so wird $\frac{dp}{p} + dR \cot R = \frac{dr}{r} + dP \cot P$.

welches die gesuchte Gleichung zwischen den Fehlern ist, wo man denn ein für allemahl merken muß, daß, wenn dR, dP, oder die Fehler in den Winkeln, in Secunden angenommen werden, man statt dP, dR allemahl $\frac{dP}{206264}$ rc. setzen muß.

Anmerkung.

§. 212 Das bisherige mag zureichen in Dreyecken die Verhältnisse zwischen den Fehlern

lern der Seiten und Winkel zu finden, und die beygebrachten drey Aufgaben werden die gewöhlichsten Fälle in sich enthalten, die beym Feldmessen vorkommen.

Nunmehr wird man einsehen, wie die Berechnung der Fehler und ihrer Folgen in zusammengesetztern Fällen, sich auf die einfachern bisher beygebrachten Fälle gründe. Um hievon nur ohngefähr ein Beyspiel beyzubringen, so will ich annehmen, man suche z. B. nach der Aufgabe §. 184 die Weite AB, aus CD und den an der Standlinie CD gemessenen Winkeln. Um nun den Einfluß zu finden, den die Fehler in Messung der erwähnten Winkel, auf die gesuchte Weite AB haben, so würde man etwa auf folgende Art verfahren.

Ich würde 1) den Fehler berechnen, welcher aus den unrichtig gemessenen Winkeln ACD, ADC, auf die Seite AC des Dreyecks ACD erfolgte. Man siehet leicht, daß dieses nach der Auflösung des 207 §es geschehen kann. Auf diese Art fände ich also den Werth von $\frac{dAC}{AC}$, wo dAC den Fehler der Seite AC und der Quotient $\frac{dAC}{AC}$ wie bekannt, das Verhältniß des Fehlers zur zugehörigen Größe ausdrückt.

2) Auf eben die Art würde ich in dem Dreyecke BCD, aus den falsch gemessenen Winkeln BCD, BDC, den Fehler der Seite BC, oder den Werth von $\frac{dBC}{BC}$ berechnen.

3) Würde ich endlich in dem Dreyecke ACB, aus den Fehlern $\frac{dAC}{AC}$, $\frac{dCB}{CB}$, der beyden Seiten AC, BC, und dem Fehler des eingeschlossenen gemessenen Winkels ACB, den Werth von $\frac{dAB}{AB}$ nach der Aufgabe des 209. §es finden.

Man dürfte nemlich in der Auflösung des 209. §. statt der Werthe $\frac{dq}{q}$, $\frac{dr}{r}$ nur die gefundenen $\frac{dAC}{AC}$, $\frac{dCB}{BC}$ und statt dP den Fehler des Winkels ACB substituiren, so erhielte man

man den Werth von $\frac{dp}{p}$ oder hier von $\frac{dAB}{AB}$, also die Unrichtigkeit der gesuchten Weite AB.

Man wird leicht begreifen, daß bey würklicher Anwendung, diese Rechnung etwas weitläuftig ausfallen wird.

Man kann sich aber unterschiedene Vortheile dabey machen. Um nur einen zu erwähnen: Weil man in dem Dreyecke ACB, zur Berechnung des Fehlers der Seite AB, die beyden Winkel CAB, CBA, wissen muß, so kann man dieselben bloß, nachdem man die ganze Figur ABCD, nach einem verjüngten Maaßstabe, vermöge der an der gemessenen Grundlinie CD bekannten Winkel, entworfen hat, durch einen Transporteur messen. Wenn man dadurch freylich diese Winkel nicht so genau, als durch Rechnung findet, so schadet es doch nichts, bey Berechnung des Fehlers in der Weite AB; man mache den Versuch, und nehme in der Formel des §. 209. VII, die Winkel Q, R, etwas größer oder kleiner, als sie wirklich sind, so wird dieses auf die Bestimmung des Werthes von $\frac{dp}{p}$ keinen sonderlichen Einfluß haben.

Man könnte den Fehler in der Weite AB noch auf eine andere Art finden, nehmlich, daß man die Formel suchte, wodurch AB, aus der Standlinie CD, und den Winkeln an ihr, bestimmt würde, und hierauf, wie bey den Dreyecken gewiesen worden, auf eine ähnliche Art die Veränderungen dieser Formel berechnete, welche aus den fehlerhaft gemessenen Größen entstånden; allein die Rechnung wird doch noch immer weitläuftig bleiben, weil die Formel, wodurch AB bestimmt wird, sich nicht auf einen einfachen und kurzen Ausdruck bringen läßt.

In Fällen, wo die unbekannte Größe durch eine bequeme Formel ausgedrückt werden kann, läßt sich die Berechnung der Folgen der Fehler gleichfalls ohne Schwürigkeit bewerkstelligen, wie folgende beyden Beyspiele, die ich, zu vollständigerer Erläuterung, noch beybringen will, ausweisen.

Beyspiele, die Folgen der Fehler in zusammengesetzten Fällen zu berechnen.

§. 213. I. Wir haben bey der Aufgabe des 191. §s folgende Gleichung für die Höhe Kw, die wir x nennen wollen, gefunden

$$x = \frac{b \sin \beta \sin \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}$$

Es

Es frägt sich, wenn b, β, α, um db, dβ, dα, falsch gemessen worden, wie unrichtig man dadurch den Werth von x findet.

Weil die Formel für x sich hier bequem durch Logarithmen in einzelne Theile zerlegen läßt, indem

$$l\,x = l\,b + l \sin\beta + l \sin\alpha - l \sin(\alpha - \beta) \text{ ist,}$$

so darf man nur die Veränderung eines jeden einzeln Theiles dieser Formel suchen, und die Veränderungen, die auf beyden Seiten dieser Gleichung herauskommen, wieder in eine Gleichung bringen, so wird man das Verhältniß zwischen den Fehlern, oder den Größen dx, db, dβ, dα, finden.

Weil also

$$d\log x = d\log b + d\,l \sin\beta + d\,l\,s\,\alpha - d\,l\,s(\alpha - \beta)$$

ist, so erhält man aus den oben beygebrachten Trig. Säß. XLVI. XLVII.

$$\frac{dx}{x} = \frac{db}{b} + d\beta \cot\beta + d\alpha \cot\alpha -$$

$$- (d\alpha - d\beta) \cot(\alpha - \beta)$$

oder wenn man der Kürze halber

$$\cot(\alpha - \beta) + \cot\beta = M; \cot\alpha - \cot(\alpha - \beta) = N$$

setzet, so wird

$$\frac{dx}{x} = \frac{db}{b} + M d\beta + N d\alpha$$

welches

welches die gesuchte Gleichung ist, wodurch die Unrichtigkeit in der Höhe x bestimmt wird.

II. Für die Aufgabe des 194. §. erhielten wir folgende Gleichung; $KI = \frac{a \sin\gamma \tan\alpha}{\sin(180° - \beta - \gamma)}$

Um wie viel wird sich die Höhe KI ändern, wenn die Größen a, γ, α, β, um da, $d\gamma$, $d\alpha$ $d\beta$ falsch gemessen worden?

Hier läßt sich durch Logarithmen die Formel wieder bequem in einzelne Theile zerlegen

$$l\,KI = l\,a + l\sin\gamma + l\tan\alpha - l\sin(180° - \beta - \gamma)$$

oder

$$l\,KI = l\,a + l\sin\gamma + l\tan\alpha - l\sin(\beta + \gamma)$$

daher wird nach Trig. S. XLVI. XLVII.

$$\frac{dKI}{KI} = \frac{da}{a} + d\gamma\cot\gamma + \frac{2\,d\alpha}{\sin 2\alpha} -$$

$$- (d\beta + d\gamma)\cot(\beta + \gamma)$$

oder wenn ich der Kürze halber

$$\cot(\beta + \gamma) = M;\ \frac{2}{\sin 2a} \text{ oder}$$

$2\,\mathrm{cosec}\,2\alpha = N$, $\cot\gamma - \cot(\beta + \gamma) = L$ setze, so ist

$$\frac{dKI}{KI} = \frac{da}{a} + L\,d\gamma + N\,d\alpha - M\,d\beta$$

welches

welches die gesuchte Gleichung zwischen den Fehlern ist.

Aus dieser Formel wird sich leicht herleiten lassen, daß, je kleiner der Winkel α, und die Standlinie a ist, desto größer die Unrichtigkeit in der Höhe KI sey, weil der Quotiente $\frac{dKI}{KI}$ unter solchen Umständen wächst.

Es ist daher nicht vortheilhaft, aus sehr entfernten Standpunkten, Höhen zu messen, weil alsdann gewöhnlich der Winkel α sowohl, als auch die Standlinie a nicht von gehöriger Größe genommen werden können.

Mehrere Exempel beyzubringen würde unnöthig seyn.

Man wird aus dem bisherigen zureichend einsehen, worauf sich die Berechnung der Fehler gründe, und wie man vermittelst der zu Anfange dieses Buches gegebenen Formeln, für die Veränderungen der Producte, Quotienten u. s. w. gar leicht in allen Fällen die Berechnung der Fehler und ihrer Folgen wird anstellen können. Diejenigen Fälle, die in der Ausübung am meisten vorkommen, sind in den Aufgaben dieses Kapitels enthalten.

Will man das bisherige auf die verschiedenen Messungsarten mit diesen oder jenen Werkzeugen anwenden, so darf man nur aus der Natur der gebrauchten Werkzeuge, die unvermeidlichen Fehler schätzen, die bey Messung der bekannten Stücke begangen werden können, solche statt dR, dQ, dr u. s. w. in obige Formeln substituiren, um daraus die Zuverlässigkeit eines gesuchten Stücks zu berechnen. Mäße man z. E. in (§. 211.) die Winkel mit einem Astrolabio, bey dem man für einen Fehler von 2 Minuten nicht gut stehen könnte, so setzte man $dR = dP = 120$ Secunden, und würde die Linie r mit einer Kette gemessen, so müßte statt $\frac{dr}{r}$ der Grad der Zuverlässigkeit gesetzt werden, den eine solche Kette verstattete. Dieß hängt nun von der Beschaffenheit des Terrains, worauf man mißt, und von der Summe aller der Fehler ab, welche nach (§. 33. 40. 46.) im Visiren, im Einsetzen der Kettenstangen u. d. gl. begangen werden können. Mißt man z. E. auf einem sehr lockern Boden, wo auch bey der äussersten Sorgfalt die Kettenstäbe leicht aus dem Loche, wo sie eingesetzt werden, sich etwas verrücken, so wird die Wahrscheinlichkeit, in Messung einer Linie zu fehlen, weit größer seyn, als auf einem festen Boden, also für

den

den erstern Fall die Größe $\frac{dr}{r}$ weit beträchlicher als im letztern angenommen werden müssen. Man könnte da wohl leicht auf 500 Schuh um einen fehlen, also $\frac{dr}{r} = \frac{1}{500}$ setzen, wenn die Kette etwa 5 Ruthen enthielte. Es wird überhaupt aber wohl schwer halten, hierinn etwas bestimmtes festzusetzen.

Will man den Grad der Zuverlässigkeit beym Auftragen der Dreyecke auf das Papier berechnen, so bedarf es wohl keiner Erinnerung, daß alsdann z. E. statt dP, der Fehler gesetzt werden muß, dem man z. E. bey dem Gebrauche des Transporteurs oder anderer Werkzeuge zum Auftragen der Winkel, unvermeidlich ausgesetzt ist; was für Fehler im Auftragen der Linien nur allein wegen der Unvollkommenheit der Augen begangen werden können, ist bereits (§. 85.) gezeigt worden. Ob aber nun z. E. ein berechneter Fehler in einer gesuchten Größe, auf dem Papiere merklich ausfällt, wird die Größe des verjüngten Maaßstabes ausweisen.

Auf den Formeln §. 207 u. f. gründen sich nun auch die von verschiedenen Schriftstellern ange-

angegebenen Regeln von Auswahl der Standlinien; was davon in der Ausübung vorzüglich brauchbar ist, habe ich theils schon beygebracht, theils werde ich auch in der Folge noch gelegentlich davon reden. Die meisten Vorschriften, die aber für die Auswahl der Standlinien in zusammengesetzten Fällen, von Schriftstellern gegeben werden, sind so verwickelt und eingeschränkt, daß meines Erachtens die Ausübung keine beträchtlichen Vortheile davon zu erwarten hat. Auch ist die Theorie davon großen Schwürigkeiten unterworfen, und führt auf Rechnungen und Constructionen, die den arbeitsamsten Feldmesser ermüden würden. Man sehe nur, was Lambert (Beyträge zur practischen Geometrie §. 418. 420.) hievon erwähnt; Aber gesetzt, man habe nun auch, nach der Theorie, für die Entwerfung einer gewissen Menge von Objecten die schicklichste Standlinie ausgefunden, wird man sie auch immer auf dem Felde so annehmen können, wie sie der Theorie nach beschaffen seyn sollte? Wird man aus ihr auch alle Punkte sehen können, die man entwerfen will? Anderer Hindernisse zu geschweigen. Da überhaupt die Auswahl der besten Standlinie auf dem Felde selten in des Feldmessers Gestalt stehet, so wird er oft Standpunkte wählen müssen, die zwar der Theorie nach nicht die vortheilhaftesten sind, die aber doch noch

immer

immer eine erträgliche Lage haben, und sich durch andere Umstände, z. E. durch ihre Bequemlichkeit, durch die Aussicht, die man an ihnen haben kann u. s. w. vorzüglich empfehlen. Und solche Standlinien auszufinden, braucht man keine weitläuftigen Rechnungen, sondern nur einige Kenntniß der Gegend, und einen vorläufigen, auch nur mäßig richtigen, etwa nach dem Augenmaaße, oder sonst auf eine andere Art entworfenen Grundriß, dergleichen man doch immer, wo man genauere Vermessungen anstellen will, bey Privatpersonen, in Archiven u. d. gl. erhalten kann. Da ferner eine einzige Standlinie selten zureicht, eine gewisse Anzahl von Oertern richtig aufzunehmen, so kann man aus neuen Standlinien theils diejenigen Oerter, die man aus der erstern schon bestimmt hatte, berichtigen, theils auch diejenigen Oerter aufnehmen, gegen die die erste Standlinie eine zu unschickliche Lage hatte; Und so wird man immer durch den Gebrauch mehrerer Standlinien, alle nöthige Genauigkeit erhalten.

Wer übrigens von Auswahl der Standlinien, und überhaupt von der bisherigen Theorie, ausser den schon angeführten Schriften der Hrn. Marinoni und Lambert, noch mehreres nachlesen will, dem können auch folgende Schriftsteller dienen.

Wolfii

Wolfii Elem. Trigonom. latinae. §. 58 seq.

Bouguer Figure de la Terre Sect. II. art. 3.

Hrn. Hofr. Kästners Abhandl. von den Fehlern beym Feldmessen, welche man in den Abh. der Königl. Schwed. Acad. der Wiss. fürs Jahr 1753. findet, und Hrn. Bar. Fried. Palmquists dahin gehöriger Aufsatz in den Abh. d. Königl. Schwed. Acad. fürs Jahr 1769. (nach der Kästn. Uebers.)

Karl Schefers Trigon. Versuch von der Wahl des Standes beym Feldmessen (Wien 1766).

XVIII.