XVI. Kapitel.

Von Ausmessung der Höhen.

Aufgabe.

§. 190.

Die Höhe KI Fig. LIII. eines Objects K, über der Horizontallinie IC zu messen; vorausgesetzt, daß man von einem angenommenen Stande C horizontal nach I hinmessen kann.

Aufl. Man bringe den Winkelmesser über C dergestalt, daß ein Loth aus des verticalgestellten Werkzeugs Mittelpunkt c gerade auf C treffen würde, und messe nach (§. 155.) den Verticalwinkel Kcw, wo cw eine Horizontallinie bedeutet. Da ich nun KI auf der Horizontalfläche senkrecht annehme, welches z. E. bey Thürmen u. s. w. statt findet, so ist Kwc ein rechtwinklichtes Dreyeck, und wc = CI. Man messe also CI, so kann man in dem Dreyecke Kcw die Höhe Kw finden, wenn man schliesset cw oder CI : Kw = sin tot : tang Kcw, dieß giebt für $\sin tot = 1$, $Kw = CI \,.\, \tang Kcw$, mithin $KI = Kw + wI = Kw + cC = CI \tang Kcw + cC$, wo cC die Höhe des Werkzeugs über dem Boden bedeutet, die man leicht messen kann.

Aufgabe.

§. 191, Wenn man auf einer Horizontalebene ICD, von dem angenommenen Standpunkte C, nicht nach I hinmessen kann, demohngeachtet die Höhe KI zu finden.

Aufl. In diesem Falle nehme man eine Standlinie CD an, dergestalt aber, daß CD, mit KI in einer und derselben Ebene KID liege.

Man messe hierauf, wie in der ersten Aufgabe, über C den Vertitalwinkel Kcw, und bemerke zugleich den Punkt w, welchen an dem Objecte KI, das horizontalgestellte Fernrohr co bedecket.

Hierauf bringe man den Winkelmesser über D, erhöhe das Stativ so lange, bis man durch den horizontalgestellten Tubum γo, wieder das bey w bemerkte Zeichen wahrnimmt; und messe demnächst den Verticalwinkel Kγw, so wird man aus den beyden Verticalwinkeln $Kcw = \alpha$, $K\gamma w = \beta$, und der gemessenen Standlinie

CD

$CD = c\gamma = b$, die Höhe Kw auf folgende Art berechnen.

In dem Dreyecke $Kc\gamma$ ist der Winkel $cK\gamma = \alpha - \beta$

Mithin

$\sin(\alpha - \beta) : b = \sin\beta : Kc$, also $Kc = \frac{b \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$; Ferner $Kc : Kw = \sin tot : \sin\alpha$

mithin $Kw = Kc \sin\alpha = \frac{b \sin\beta \sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$

Also durch Logarithmen

$\log Kw = \log b + l \sin\alpha + l \sin\beta - l \sin(\alpha - \beta)$

Hat man Kw gefunden, so addiret man des Werkzeugs Höhe $cC = \gamma D$ hinzu, um die ganze Höhe KI zu erhalten.

Zus. I. Das bey w bemerkte Zeichen dienet eigentlich dazu, bey der zweyten Station D, dem Werkzeuge wieder genau dieselbe Höhe über dem Horizonte zu geben, die es beym ersten Stande hatte, oder vielmehr das Werkzeug bey D so zu stellen, daß γ, w, und c in einerley Horizontallinie liegen.

Läßt sich bey w kein Merkmahl an dem Objecte KI finden, so stecke man in einiger Ent-

Entfernung von C, bey L einen Stab in die Verticalebene des auszumessenden Winkels ab, und lasse auf ihm von einem Gehülfen den Punkt e bemerken, auf den die Axe des horizontal gerichteten Fernrohres co hintrifft. Alsdann braucht man beym zweyten Stande D sich nur nach dem Punkte e zu richten.

Ist der Boden, genau horizontal, so darf man bey D, auch nur vermittelst eines senkrechten Stabes, die Höhe γD derjenigen cC gleich nehmen, welche das Werkzeug bey C über dem Boden hatte.

Zus. II. In den meisten Fällen kann man sich begnügen, wenn an der zweyten Station D, die Höhe des Werkzeugs γD, nur ohngefähr der erstern cC gleich ist, zumahl wenn die Standpunkte C, D, einigermaaßen weit von dem Objecte KI entfernt sind. Denn es verursacht in bestimmung der Höhe Kw keinen merklichen Irrthum, wenn gleich über dem Standpunkte D das Werkzeug z. E. einen halben Fuß höher oder niedriger stände, als bey C.

Aufgabe.

§. 192. Eine Höhe KI (Fig. LIV. Tab. IV.) zu finden, wenn man von einem angenommenen Standpunkte c, nicht horizontal nach I hinmessen kann,

kann, sondern genöthigt ist, die Standlinie cI schief anzunehmen.

I. Fall. Wenn c höher liegt, als I.

Man bringe bey c, wo ich des Winkelmessers Mittelpunkt annehme, das Fernrohr in eine horizontale Richtung co, welche verlängert bey m in das verticale Object KI einschneide. Man richte nun das Fernrohr nach K, und dann nach I, und messe die beyden Verticalwinkel Kcm, mcI, so wird sich aus diesen beyden Winkeln $Kcm = \alpha$, $mcI = \beta$, und der gemessenen schiefen Linie $cI = a$, die Höhe KI auf folgende Art bestimmen.

In dem rechtwinklichten Dreyecke Kcm ist der Winkel $K = 90° - Kcm = 90° - \alpha$.

Man schließe also in dem Dreyecke KcI

$$\sin K : cI = \sin KcI : KI \text{ oder}$$
$$\cos \alpha : a = \sin (\alpha + \beta) : KI$$

dieß giebt also $KI = \dfrac{a \sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha}$.

II. Fall. Wenn, wie in Fig. LV, c niedriger liegt als I. Dann messe man die beyden Elevationswinkel $Kcm = \alpha$, $mCI = \beta$, so ist jetzt in dem Dreyecke KcI der Winkel

K

$K = 90^\circ - \alpha$ und $KcI = \alpha - \beta$, und daher wegen $\sin K : cI = \sin KcI : KI$, wird jetzt

$$KI = \frac{a \sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$$

wo man sowohl im ersten, als zweyten Falle die gesuchte Höhe durch Logarithmen findet.

Aufgabe.

§. 193. Eine Höhe KI Fig. LVI. zu finden, wenn man genöthigt ist, die Standlinie auf einer schiefen Ebene anzunehmen, und man von dem ersten Standpunkte c nicht wie in vorhergehender Aufgabe, gerade zu, nach I hinmessen kann.

Aufl. Man nehme eine Standlinie $c\gamma$ an, und messe erstlich bey der Station c, wo cm die verlängerte Axe des horizontal gerichteten Fernrohres bedeutet, den Elevationswinkel $Kcm = \alpha$, und Depressionswinkel $mcI = \beta$.

Hierauf messe man an der zweyten Station γ, wo γn eine Horizontallinie bedeutet, auf gleiche Weise den Elev. Winkel $n\gamma K = \gamma$, und Depress. Winkel $n\gamma I = \delta$.

Wenn nun die gemessene Standlinie $c\gamma = a$ heißt, so wird die Höhe KI auf folgende Art berechnet.

Der

Der Kürze halber benenne man den Winkel $K\gamma I = \gamma + \delta$, mit dem Buchstaben ε.

So ist in dem Dreyecke $Kc\gamma$ der Winkel

$$cK\gamma = KcI - K\gamma c = \alpha + \beta - \varepsilon.$$

und $\sin cK\gamma : c\gamma = \sin K\gamma c : Kc$, dieß giebt

$$Kc = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin(\alpha + \beta - \varepsilon)}.$$

Nun ist der Winkel $I = 90° - mcI = 90° - \beta$ und $\sin I : Kc = \sin KcI : KI$ oder

$$\cos \beta : \frac{a \sin \varepsilon}{\sin(\alpha + \beta - \varepsilon)} = \sin(\alpha + \beta) : KI$$

also

$$KI = \frac{a \sin \varepsilon \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta \sin(\alpha + \beta - \varepsilon)}$$

mithin durch Logarithmen

$$\log KI = \log a + \log \sin \varepsilon + \log \sin(\alpha + \beta) - (\log \cos \beta + \log \sin(\alpha + \beta - \varepsilon))$$

Zus. I. Die gegebene Auflösung gründet sich darauf, daß die Punkte c, γ höher als I liegen. Es ist keine Schwürigkeit, auch eine Formel zu finden, wenn die Punkte niedriger liegen als I, wie in der LVIIsten Figur.

Man nenne die Winkel in dieser Figur eben so, wie in der LVI. Figur, nemlich $mcK = \alpha$, $mcI = \beta$

$= \beta$: $K\gamma n = \gamma$, $n\gamma I = \delta$, jetzt aber den Unterschied $\gamma - \delta$, oder den Winkel $K\gamma I = \varepsilon$, so wird nach einer ähnlichen Rechnung

$$KI = \frac{a \sin \varepsilon \sin (\alpha - \beta)}{\cos \beta \sin (\alpha - \beta - \varepsilon)}.$$

Zus. II. In dem Dreyecke $K\gamma c$ ist (Fig. LVI.)

$$\sin (\alpha + \beta - \varepsilon) : a = \sin (\alpha + \beta) : K\gamma$$

also $K\gamma = \dfrac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}$; dieß giebt dann ferner in dem rechtwinklichten Dreyecke $K\gamma n$ die Erhöhung

$$Kn = K\gamma \cdot \sin \gamma = \frac{a \sin (\alpha + \beta) \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}$$

$$\gamma n = K\gamma \cos \gamma = \frac{a \sin (\alpha + \beta) \cos \gamma}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}.$$

Auf eine ähnliche Art findet man auch an dem Stande c, die Werthe von Km, cm.

Man findet also, durch Messung der oberwähnten Verticalwinkel, nicht allein, wie hoch der Punkt K des Objects KI, über denen durch γ, c, eingebildeten Horizontallinien γn, cm, liegt, sondern, man weiß auch, wie groß die Horizontalweiten der beyden Standpunkte c, γ, von dem Objecte KI sind.

Auf diese Art dienen also auch Verticalwinkel, selbst zu Messung der Horizontalweiten.

Zus. III. 1. In der Aufgabe (§. 193) ist angenommen worden (wiewohl es nicht ausdrücklich erinnert ist), daß γ, c, I in einer geraden Linie liegen, daß also I c γ eine ebene gegen den Horizont geneigte Fläche sey, an deren Fuße I das Object IK sich erhebt, dessen Höhe man finden will.

2. Wenn c und γ die Mittelpunkte der Winkelmesser sind, so liegen schon aus dieser Ursache I, c, γ nicht in einer geraden Linie, weil diese Mittelpunkte eine gewisse Höhe über dem Boden haben, worauf man misset. Diese Höhe ist nun freylich gewöhnlich nur ein paar Schuhe groß, und wenn es demnach erlaubt ist, diese bey Seite zu setzen, so kann man ohne merklichen Fehler, die Auflösung nach (§. 193) vornehmen.

3. Es könnte sich aber ereignen, daß man diese Höhe des Winkelmessers nicht ausser Acht lassen dürfte, oder der Fuß J der auszumessenden Höhe K J könnte (Fig. XCVI. Tab. VII) auch so tief unter oder überhalb der Verlängerung von γ c fallen, daß die Auflösung §. 193. anzuwenden, nicht mehr verstattet wäre. In diesem Falle würde man auf folgende Art verfahren, um K J zu finden.

4. Bey c, wo ich des Winkelmessers Mittelpunkt annehme, messe man über der Horizontale cm, den Elevationswinkel $Kcm = \alpha$, und Depressionswinkel $mcJ = \beta$; bey γ aber den Elevationswinkel $K\gamma n = \gamma$; und Depressionswinkel $n\gamma c = \delta$, nemlich wie tief der Mittelpunkt des Werkzeugs bey c unter der Horizontallinie durch γ liege. Begreflich muß man bey c, die Höhe des Werkzeugs über dem Boden, an einem daselbst abgesteckten Stabe cC bezeichnet haben.

5. So ist, wenn man γc sich bis I verlängert vorstellt, der Winkel $KcI = Kcm + mcI = \alpha + \delta$, und nun in dem Dreyecke $Kc\gamma$, der Winkel $cK\gamma = KcI - K\gamma c = \alpha + \delta - (\gamma + \delta) = \alpha - \gamma$.

6. Demnach $\sin cK\gamma : c\gamma = \sin K\gamma c : Kc$.

Ist nun $c\gamma$, also die Standlinie gemessen worden, so heisse sie $= a$, dann ist.

$$Kc = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\alpha - \gamma)}.$$

7. Hierauf endlich in dem Dreyecke cKJ

$$\sin cJK : Kc = \sin KcJ : KJ$$

oder $\cos \beta : Kc = \sin(\alpha + \beta) : KJ$ demnach

$$KJ = \frac{a \sin(\gamma + \delta) \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta \sin(\alpha - \gamma)}$$

welches sich durch Logarithmen berechnen läßt.

8. Zus. Wenn in dieser Formel der Depressionswinkel $m c J = \beta$ sich in $m c I = n \gamma c. = \delta$ verwandelt, so wird J in I fallen, und die Formel (7) wird die Höhe KI wie in (§. 193.) geben. Man darf nur in §. 193. überlegen, daß das dortige $\varepsilon = \gamma + \delta = \gamma + \beta$, und also

$$KI = \frac{a \sin(\gamma + \beta) \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta \sin(\alpha - \gamma)}$$

ist, völlig wie (7), wenn $\delta = \beta$ gesetzt wird.

9. Da $\gamma c = a$ in (6) den Abstand der Mittelpunkte des Werkzeugs in seinen beyden Stationen bey c und γ bedeutet, so kann dieser auf dem Boden selbst gemessen werden, wenn er anders von C nach G herauf, eben ist, oder doch keine merklichen Ungleichheiten hat. Man darf zu der Absicht von dem Mittelpunkte des Werkzeugs an beyden Stationen nur ein Loth auf den Boden in C und G herabgelassen, und daselbst Zeichenstäbgen eingesteckt haben. Ich nehme an, daß das Werkzeug übrigens an beyden Stationen einerley Höhe über dem Boden gehabt habe. Dann ist die schiefe Linie CG auf dem Boden, der von c nach γ gleich.

10. Ist die Höhe des Werkzeugs über dem Boden bey γ, auch etwas größer oder kleiner als bey c, so ist zwar nicht völlig genau die

auf

auf dem Boden gemessene Linie, der Entfernung $c\gamma$ gleich, aber der Unterschied ist so unbeträchtlich, daß er völlig ausser Acht gelassen werden darf.

11. Ließe sich von c nach γ, auf dem Boden nicht bequem die schiefe Linie messen, so messe man den Horizontalabstand Cr, von C nach G, nach (§. 41 2c.), so ist dieser = dem Horizontalstande $c\rho$ von c nach γ. Heißt man diesen = b, so ist, weil der Elevationswinkel von γ über $c = \delta$ gesetzt worden,

$$a = b \sec \delta = \frac{b}{\cos \delta}, \text{ demnach}$$

$$KJ = \frac{b \sin(\gamma + \delta) \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta \cos \delta \sin(\alpha - \gamma)}.$$

12. Begreiflich könnte man den Horizontalabstand von c nach γ, auch sonst woher als bekannt annehmen, oder man könnte ihn trigonometrisch aus einer andern Standlinie bestimmt haben, die nicht mit KJ in einer und derselben Verticalebene läge, wie bisher von c und γ angenommen wurde.

13. Wenn γ tiefer als c läge, so würde nur δ negativ gesetzt werden dürfen.

14. Kann man bey γ auch nach J sehen, (Hier würde es der Boden nicht verstatten, weil

weil ihn die Visirlinie von γ nach $\mathfrak{J}$ durchschneidet) so könnte man bey γ statt des Depressionswinkels $n\gamma c$, auch den $n\gamma\mathfrak{J} = \vartheta$ messen. Aus den vier Winkeln α, β, γ, ϑ, läßt sich nunmehr erstlich δ, und dann nach (11) $K\mathfrak{J}$ berechnen; die Rechnung fällt aber etwas weitläuftig aus. Hier ist der Gang derselben.

15. So wie in (6)

$$Kc = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\alpha - \gamma)}$$

gefunden worden, so findet sich auf eine ähnliche Art auch

$$\mathfrak{J}c = \frac{a \sin(\vartheta - \delta)}{\sin(\beta - \vartheta)}.$$

16. Nun ist aber in dem Dreyecke $Kc\mathfrak{J}$ auch

$$Kc : \mathfrak{J}c = \sin K\mathfrak{J}c : \sin \mathfrak{J}Kc =$$
$$= \cos\beta : \cos\alpha$$

Demnach (15. 16.)

$$\cos\beta : \cos\alpha = \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\alpha-\gamma)} : \frac{\sin(\vartheta-\delta)}{\sin(\beta-\vartheta)}$$

oder

$$\frac{\cos\beta \sin(\vartheta-\delta)}{\sin(\beta-\vartheta)} = \frac{\cos\alpha \sin(\gamma+\delta)}{\sin(\alpha-\gamma)}$$

17.

17. Aus dieser Gleichung kann man nach bekannten trigonometrischen Verwandlungen den Werth von δ sehr leicht bestimmen. Die Formel dazu findet sich

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\vartheta - \text{tang}\,\gamma\,\text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\gamma + \text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\vartheta}$$

Ist hieraus δ gefunden, so hat man auch KI nach (7).

18. Findet sich in (17) der Werth von tang δ negativ, so wird δ selbst negativ, welches sich nach (13) erklårt.

19. Begreiflich wird es, um eine Höhe wie KI zu bestimmen, allemahl vortheilhafter seyn, an dem Standorte γ, den Winkel δ zu messen, als den ϑ, weil man alsdann der Rechnung (15 — 19) überhoben seyn kann.

Ueberdem kann man auch sehr oft von γ nach I nicht sehen, z. E. wenn γ selbst in einer Tiefe låge. Wenn man also nur von c nach I K; von γ aber nur nach K und c visiren kann, so låßt sich hieraus die Höhe KI finden. Man braucht also nur von dem einen Standpunkt nach dem Fuße I der Höhe KI hinvisiren zu können, so låßt sich die Höhe dennoch finden.

20.

20. Wäre cγ horizontal (Jc mag liegen wie man will), so ist $\delta = 0$ also (7)

$$KJ = \frac{a \sin\gamma \sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta \sin(\alpha-\gamma)}.$$

21. Man sieht leicht, daß in der allgemeinen Auflösung eine Menge von einzeln Fällen enthalten ist, die in der Ausübung vorkommen können. Wären z. E. c und γ ein paar Fenster in einem, der auszumessenden Höhe KJ, gegenüberliegenden Hause, aus denen man die Winkel observirte, c in der untern Etage, und γ lothrecht darüber in der obern also γc die lothrechte Tiefe des einen Fensters unter dem andern, so wäre $\delta = 90°$ also (7)

$$KJ = \frac{a \cos\gamma \sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta \sin(\alpha-\gamma)}.$$

22. Hier könnte sich eräugnen, daß z. E. K unter der horizontalen γn zu liegen käme; dann müßte man begreiflich den Winkel γ negativ setzen, und so können denn auch Fälle vorkommen, wo α negativ zu nehmen wäre, welche man aber sämmtlich leicht aufzulösen im Stande seyn wird, wenn man sich entweder eine Figur dazu entwirft, oder aus der Trigonometrie weiß, wie Sinusse und Cosinusse für negative Winkel zu nehmen sind, nemlich daß eines negativen Winkels Sinus negativ, der Cosinus aber positiv zu setzen ist u. s. w.

Anmerkung.

§. 194. In vielen Fällen ist es unbequem, Höhen aus einer schiefen Standlinie zu messen. Auch wird hiebey zum vorausgesetzt, daß die Standlinie cγ Fig. LIII. eine gerade Linie sey, oder wenigstens von ihr so wenig abweiche, daß man den Fehler ausser Acht lassen kann. Da nun wenn z. E. Icγ die abhängige Richtung eines Berges vorstellte, die letztere Bedingung, meistens nicht statt findet, also sehr selten, längs der Anhöhe eine beträchtlich große, und gerade Standlinie angenommen werden kann, so wird folgende Aufgabe zu Ausmessung der Höhen bessere Dienste leisten.

Aufgabe.

§. 195. Aus einer Standlinie, die nicht, wie in vorhergehenden Aufgaben, mit der auszumessenden Höhe, in einer und derselben Verticalebene liegt, die Höhe zu finden.

Aufl. Man nehme Fig. LVIII. für die auszumessende Höhe KI (z. E. eines Berges) eine willkührliche Standlinie CD an. Hier kann CD jede Lage gegen KI haben, wenn nur CD horizontal ist, oder nicht viel davon abweicht. Man messe CD und nenne sie = a.

Man stelle sich nun bey C oder D, eine Horizontalebene vor, welche die Verticallinie von der Spitze des Berges, in I durchschneide.

Um nun diese Höhe KI, über der durch C oder D gehenden Horizontalfläche zu finden, so stelle man sich die beyden Horizontallinien CI, DI gezogen vor, und messe beym Stande C erstlich den Verticalwinkel KCI $= \alpha$, und dann auch den Horizontalwinkel ICD $= \beta$, (oder eigentlich den Winkel zweyer Verticalebenen durch C und K, und durch C und D) nach der gewöhnlichen Weise (§. 132).

Eben so auch bey D den Horizontalwinkel IDC $= \gamma$ (§. 132). So wird man daraus die Höhe KI auf folgende Art berechnen können.

In dem Dreyecke CID ist der Winkel I $=$ $180° - ICD - IDC = 180° - \beta - \gamma$ und folglich

$$\sin(180 - \beta - \gamma) : a = \sin\gamma : CI$$

also $CI = \dfrac{a \sin\gamma}{\sin(180° - \beta - \gamma)}$

Ferner in dem rechtwinklichten Dreyecke KCI

$$1 : \text{tang}\,\alpha = CI : KI$$

daher $KI = CI \cdot \text{tang}\,\alpha = \dfrac{a \sin\gamma \,\text{tang}\,\alpha}{\sin(180° - \beta - \gamma)}$

 oder

oder durch Logarithmen, log KI =

$$la + l \sin\gamma + l \tan\alpha - l \sin(180^\circ - \beta - \gamma)$$

woraus man also die gesuchte Höhe KI findet.

Diese Methode ist bey Höhenmessungen der Berge vorzüglich zu empfehlen: theils wegen ihrer Bequemlichkeit, weil man die Standlinie CD nach Gefallen annehmen kann, theils auch in Absicht der Genauigkeit, weil man nicht so viel spitzige Winkel zu befürchten hat, besonders wenn man die Standlinie ziemlich groß annimmt. In den vorhergehenden Aufgaben lagen die Standlinien mit den auszumessenden Höhen immer in einer und derselben Verticalebene. Dabey wurden also lauter Verticalwinkel gemessen, um die Höhe daraus zu finden. Da diese Winkel meistens sehr spitzig ausfallen, zumahl wenn die Standpunkte etwas weit wegliegen, so muß man diese Winkel mit einer sehr großen Schärfe ausmessen, wenn die daraus herzuleitenden Bestimmungen eine erträgliche Genauigkeit erhalten sollen.

Ich habe zwar gesagt, daß man die Standlinie CD so viel als möglich horizontal annehmen müsse. Dieß geschah nur wegen der Bequemlichkeit. Es erhellet aber leicht, daß diese Bedingung nicht nothwendig ist. Gesetzt D läge um die Höhe Dd höher als C, so braucht man in obiger Auflösung eigentlich nicht die wahre Entfernung CD, sondern die auf den Horizont reducirte Cd, welche man durch Hülfsmittel, die wir bereis im vorhergehenden beygebracht haben, gar leicht finden kann.

Und wenn D gleich höher liegt als C, so wird man, wenn nur bey D der Winkelmesser horizontal gestellt wird, doch den Horizontalwinkel IdC finden (§. 132).

In den meisten Fällen wird man aber gar leicht die Standpunkte C, D, so wählen können, daß man ohne merklichen Irrthum, beyde in einer Horizontalfläche annehmen, und die wahre Weite CD, der horizontalen Cd gleich setzen kann.

Zum Ueberfluß könnte man auch bey D, den Elevationswinkel KDI messen, und solchergestalt, aus den beyden Winkeln ICD, IDC, der Standlinie CD, und dem Winkel KDI, die Höhe KI noch einmahl finden, sie mit der, welche man aus den Winkeln ICD, IDC, KCI fände, vergleichen, aus beyden ein arithmetisches Mittel nehmen, und so die Höhe KI weit genauer finden, als es durch eine Messung allein geschehen würde.

Man kann auch, ohne bey der Aufgabe dieses Jes einen Horizontalwinkel bey D zu messen, bey C und D, die beyden Verticalwinkel

KCI,

KCI, KDI, und die Standlinie CD gebrauchen, um daraus die Höhe KI zu finden. Dann wird aber die Berechnung etwas verwickelt, wie man aus Hrn. Hofr. Kästners Geom. Abhandl. I. Sammlung 52 ersehen kann. Daher es immer besser ist, statt des Elevationswinkels bey D, den Horizontalwinkel IDC in Rechnung zu bringen.

Wegen Messung der Horizontalwinkel ICD, IDC ist es nothwendig, daß das Werkzeug mit einem Kipp-Fernrohre versehen werden kann, das in einer Verticalebene auf- und nieder beweglich ist. Ist aber das Werkzeug nicht mit einer dergleichen Vorrichtung versehen, so ist man genöthigt, statt der erwähnten Horizontalwinkel, die schiefen Winkel KCD, KDC, zu messen, indem man das ganze Werkzeug neiget. Man wird aber demohnerachtet die Höhe KI finden können, denn in dem Dreyecke KCD, ist alsdann der Winkel K = 180° — KCD — KDC, mithin auch durch die Proportion sin K : CD = sin KDC : KC die Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyecks KCI bekannt, woraus man alsdann die Höhe KI durch die Formel KI = KC sin KCI findet.

Wären Fig. LVIII. bey K auf der Höhe selbst, die Winkel CKI, DKI (die Ergänzungen der Depressionswinkel der Gegenstände C und D bey K, zu 90°) bekannt, ferner der schiefe Win-

Winkel CKD, oder der horizontale CID, und die Entfernung CD gegeben, so könnte man daraus auch die Höhe KI finden. Die Auflösung dieser Aufgabe steht in Hrn. Hofr. Kästners geom. Abhandl. I. Samml. 53. Abh. nebst einem Beyspiele.

Anmerkung I.

Ich füge hier noch eine Aufgabe aus Kästners Abhandlung, *de objecti e duobus locis dissitis visi invenienda distantia a superficie Terrae* (Erfordiae 1784. apud Georg. Adam Keyser) bey, welche nützlich ist, wenn man z. E. den Abstand einer Lufterscheinung von der Erde, oder ihrem Mittelpunkte, bestimmen sollte. Da diese Aufgabe zur praktischen Geometrie gehöret, so darf sie hier nicht fehlen.

I. Es sey (Fig. XCI. Tab. VII.) PDQV die Oberfläche der Erde: P der Nord- und Q der Südpol. D und F zwey Oerter auf der Erdfläche, und die größten Kreise PFQ, PDQ, die Mittagskreise dieser Oerter (§. 117. IV.). E ein Gegenstand, z. E. eine Erscheinung in unserer Atmosphäre, welche man in einem und demselben Augenblicke an den Oertern F und D beobachtet hätte.

II. C sey der Mittelpunkt der Erde, und CF = CD Halbmesser derselben; Verlängert man CF, CD, so sind CN, CM, die Verticallinien der Beobachter bey F und D.

III. Nun habe der Beobachter bey F, den Erhöhungswinkel, oder die in der Astronomie so genannte Höhe des Gegenstandes E, über seiner Horizontalfläche beobachtet. Die Ergänzung davon zu 90° giebt des Gegenstandes E Abstand vom Scheitelpunkte des Beobachters F, oder den Winkel EFN. Eben so sey bey D des Gegenstandes E Abstand vom Scheitelpunkte des Beobachters D in demselben Augenblicke = EDM.

IV. Man ziehe von E nach C eine gerade Linie EC, welche die Erd-Oberfläche in R durchschneide, so ist ER des Objects E Abstand von der Oberfläche der Erde, und EC dessen Weite vom Mittelpunkte derselben.

V. Die Verticalebene ECN schneide die Erd-Oberfläche in dem Bogen RF, und eben so die Verticalebene ECM die Erd-Oberfläche in dem Bogen RD; so ist der sphärische Winkel RFP des Gegenstandes E Abweichung von der Mittagsfläche des Ortes F (I) oder der Winkel, welchen eine Verticalfläche durch E und F, mit der Mittagsfläche des Ortes F macht. Dieser Winkel heißt des Gegenstandes

E

E Azimuth, welches demnach östlich oder westlich ist, je nachdem der Gegenstand ost- oder westwärts der Mittagsfläche beobachtet wurde.

VI. Auf eben die Art ist der sphärische Winkel RDP, das Azimuth des Gegenstandes E, für den Beobachter bey D.

VII. Die Beobachter bey F und D sollen nun in einem und demselben Augenblicke, sowohl die Erhöhungen des Gegenstandes E über dem Horizonte, mithin auch die Ergänzungen zu 90°, d. h. die Winkel $EFN = \eta$, $EDM = \lambda$, als auch des Gegenstandes E Azimuthe $RFP = \alpha$, $RDP = \beta$ beobachtet haben, so kann man daraus des Gegenstandes E Weite vom Mittelpunkte der Erde, oder EC auf folgende Art finden.

VIII. Man gedenke sich durch F und D einen Bogen eines größten Kreises $FD = a$. Dieser ist eine bekannte Größe, wenn der Oerter F, D, geographische Breiten (§. 117. VI.), mithin auch die Ergänzungen derselben zu 90°, also die Abstände der Oerter F und D von dem Pole P, oder die Bögen $PF = c$, $PD = b$, und der Winkel $DPF = A$, oder der Unterschied der Mittagskreise der Oerter F und D, gegeben sind. Denn in dem sphärischen

schen Dreyecke FPD, hat man nach (Trig. S. LIII. 2).

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c.$$

IX. Auch lassen sich die Winkel PFD, PDF in dem sphärischen Dreyecke PFD aus (Trig. S. LIII. 1.) finden. Ich will PFD $= \varphi$ und PDF $= \psi$ nennen.

X. So ist in dem sphärischen Dreyecke RFD, bekannt

1) der Winkel RFD $= \varphi - \alpha$ (VI.)
2) : : : RDF $= \psi - \beta$
3) der Bogen FD $= a$

XI. Daraus kann man nach (Trig. S. LIV. 2.) in dem sphärischen Dreyecke RFD berechnen, die Seiten RF $= \zeta$, und RD $= \vartheta$.

XII. Hat man nun z. E. RF berechnet, so ist dieser Bogen das Maaß des Winkels FCR am Mittelpunkte, und es ist nunmehr in dem Dreyecke EFC bekannt, erstlich der Winkel EFN $= \eta$ (VII), also CFE $= 180° - \eta$; ferner ECF $= \zeta$ (XI). Mithin FEC $= \eta - \zeta$, woraus

$$CE = \frac{\sin \eta}{\sin (\eta - \zeta)} \cdot CF$$

folgt,

folgt, d. h. man findet durch diese Formel des Gegenstandes E Abstand vom Mittelpunkt der Erde, in solchem Maaße, als wodurch man CF, oder den Halbmesser der Erde ausgedrückt hat.

XIII. Die größte Schwürigkeit bey diesem Verfahren ist, die gehörige Bestimmung der Azimuthe und der übrigen Größen, welche zur Auflösung erforderlich sind. Da eine Lufterscheinung gewöhnlich nur von kurzer Dauer ist, auch wohl nicht an einer und derselben Stelle bleibt, sondern sich z. E. wie Feuerkugeln u. d. gl. oft mit großer Schnelligkeit bewegen, so möchte es sehr schwer halten, Azimuth und Höhe nur mit einer erträglichen Schärfe zu bestimmen, und noch schwerer, sich zu versichern, daß beyde Beobachter in einem und demselben Augenblicke des Meteors Azimuth und Höhe angegeben haben. Fällt eine Erscheinung zur Nachtzeit vor, so bemerkt man, wenn der Himmel klar ist, bey welchen Sternen sie erscheint, oder vorbey geht, und schreibt die Zeiten der Beobachtung auf. Daraus läßt sich Azimuth und Höhe jedes Sterns, und folglich auch des bey dem Sterne beobachteten Meteors, berechnen. Allein es wird dennoch sehr schwer halten, zu bestimmen, in welchem Augenblicke beyde Beobachter bey F und D, das Meteor E, in dem gemeinschaftlichen Durchschnitte CE, der

bey-

beyden Verticalebenen EFC, EDC beobachtet haben, und dieß ist doch erforderlich, wenn sich die Aufgabe nach (X — XII.) soll auflösen lassen. Folgendes kann einigermaaßen dazu dienen.

XIV. In dem Dreyecke CED ist auch wie in (XII)

$$CE = \frac{\sin \lambda}{\sin(\lambda - \vartheta)} \cdot CD = \frac{\sin \lambda}{\sin(\lambda - \vartheta)} \cdot CF$$

Also (XII)

$$\frac{\sin \lambda}{\sin(\lambda - \vartheta)} = \frac{\sin \eta}{\sin(\eta - \zeta)}.$$

Aus dieser Gleichung kann man den Winkel λ durch η, ζ und ϑ bestimmen, denn, wenn man $\sin(\lambda - \vartheta)$ durch $\sin \lambda \cos \vartheta - \sin \vartheta \cos \lambda$ ausdrückt, und die Gleichung $\sin \lambda \sin(\eta - \zeta) = \sin \eta \sin(\lambda - \vartheta)$ alsdann auf beyden Seiten mit $\sin \lambda$ dividirt, so findet sich

$$\cot \lambda = \cot \vartheta - \frac{\sin(\eta - \zeta)}{\sin \eta \sin \vartheta}.$$

XV. In diesem Ausdrucke sind ζ und ϑ, aus den Azimuthen α, β des Meteors bey F und D, und andern Datis bekannt (XI). Ist nun auch die Höhe desselben, oder η an dem Standorte F gegeben, so kann man daraus des Meteors

teors Höhe = 90° — λ an dem Standorte D berechnen. Stimmt sie mit der beobachteten bey D in dem Augenblicke, da β das Azimuth desselben bey D war, überein, so ist dieß eine wahrscheinliche Muthmaaßung, daß das Meteor in einem und demselben Augenblicke in E wahrgenommen wurde, und daß demnach die Voraussetzung (VII) statt finde, aus welcher die Formel (XII) für des Objects E Abstand vom Mittelpunkte der Erde hergeleitet wurde.

XVI. Es läßt sich auch die beobachtete Höhe des Meteors an dem Standorte D, so wie die Höhe und das Azimuth desselben bey F, als gegeben ansehen, und daraus das Azimuth desselben bey D berechnen. Stimmt diese Berechnung wieder mit dem beobachteten Azimuth bey D überein, so ist dieß ebenfalls ein Beweiß, daß man bey D dasselbe Meteor, und in demselben Augenblicke als bey F, beobachtet hatte.

XVII. Rechnungen, wie die bisherigen, lassen sich bey einer Lufterscheinung, welche in einem Augenblicke entsteht und vergeht, oder auch nur stillstehend ist, sicherer anwenden, als bey einer solchen, welche sich mit großer Schnelligkeit fortbewegt. — Wenn man indessen auch eine ganze Reihe von Sternen bemerkt hätte, unter welchen sich eine solche

Luft-

Lufterscheinung fortbewegt hat, so erfordert es doch viele Rechnung, bis man herausgebracht hat, welche Azimuthe und Höhen, an beyden Beobachtungsörtern, für gleichzeitige oder zusammengehörige anzunehmen sind, um darauf die Rechnung für des Meteors Abstand vom Mittelpunkte der Erde zu gründen. Es ist hier hinreichend den Weg zu dieser Berechnung gewiesen zu haben. Die weitere Ausführung davon erforderte aber allein eine ganze Abhandlung.

XVIII. Ist ein Meteor nicht gar zu weit von der Erde entfernt, wie z. E. eine Wolke, so kann man ihren Abstand von der Erde, aus einer Standlinie nach (§. 195.) finden, wenn die dazu erforderlichen Winkel gemessen worden sind. Allein auch diese Methode möchte in der Ausübung, so wie überhaupt die Bestimmung der Entfernungen aller Lufterscheinungen, unsicher seyn, weil sich der Ort und die Gestalt einer Wolke unaufhörlich ändern, und die Beobachter nie versichert seyn können, bey gleichzeitigen Winkelmessungen genau einerley Punkt der Wolke zu treffen.

XIX. Jacob Bernoulli (nova ratio metiendi altitudines nubium Act. Ernd. Lips. 1688. pag. 98.) schlägt vor, die Höhe der Wolken aus der Zeit zu suchen, welche vom Untergange der Sonne, bis zu dem Augenblicke

blicke verstreicht, in welchem die rothe, von der Erleuchtung durch die letzten Sonnenstrahlen, herrührende Farbe der Wolken, verschwindet, und giebt zur Auflösung dieses Problems Formeln für verschiedene Stellungen der Wolken. In der Ausübung möchte aber, wie auch Hr. Gehler (in seinem vortreflichen physik. Wörterbuche, unter dem Artikel Wolken) erinnert, sich wohl von diesem Verfahren nicht viel Genauigkeit erwarten lassen, da der Weg der letzten Sonnenstrahlen durch den Luftkreis, wegen der verschiedenen Dichte und Beschaffenheit der Dünste am Horizonte, gar sehr veränderlich ist.

XX. Andere Methoden, Entfernungen der Lufterscheinungen zu messen, und Beyspiele zur bisherigen Aufgabe, findet man in Silberschlags Theorie der am 23. Jul. 1762. erschienenen Feuerkugel (Magdeburg u. Leipz. 1764. 4. mit Kupfern), Hrn. LE ROY *Mémoire sur le meteore du globe de feu observé au mois de Juillet, duns une grande partie de la France, (Mém. de l'ac. Roy. de sc.* 1771. p. 688.), T. Bergmanns Abh. von der Höhe des Nordlichts, (Schwed. Abh. 1764. S. 200.) und in Hrn. DE MAIRAN *Traité phys. et historique de l'aurore boreale,* 2. edit a Paris 1754. Auch *Mém. de l'acad. roy. de sc. à Paris* 1748. p. 363. Ueber

die

die Bestimmung der geographischen Länge durch Sternschnuppen von *J. F. Benzenberg*, Hamburg. 1802.

Anmerkung II.

§. 196. Die bisherigen Methoden, Höhen zu messen, sind diejenigen, von denen man in der Ausübung den meisten und sichersten Gebrauch machen kann. Es giebt aber noch eine sehr große Anzahl von Vorschriften, Höhen zu messen, die aber theils sich nur auf besondere Fälle erstrecken, theils auch oft nicht die gehörige Genauigkeit verstatten. Dergleichen Aufgaben wären z. E. die Höhe eines Berges zu finden, aus der Höhe eines auf ihm befindlichen Thurms, ferner aus den bekannten Seiten eines in einem Thale befindlichen Dreyecks, die Höhe eines Berges zu finden, wenn man sich auf der Höhe selbst befindet u. s. w. Dergleichen Aufgaben lassen sich in großer Menge erdenken. Bey einigen derselben wird sogar erfordert, die Winkel mit sehr großer Schärfe zu messen, in welchem Falle man sich der Fernröhre mit Micrometern bedienen muß.

Winkel, die man auf einem Thurme u. s. w. nähme, könnte man sehr bequem durch Hülfe solcher Werkzeuge messen, die mit Spiegeln versehen sind (§. 122.).

Es

Es wird übrigens einem Geometer keine sonderliche Schwierigkeit verursachen, dergleichen Aufgaben aufzulösen, wenn er nur eine genaue Kenntniß derjenigen Stücke einer Figur hat, die man unmittelbar messen muß, um das unbekannte daraus herzuleiten.

Dieß wird mich also entschuldigen, wenn ich nur wenige Aufgaben von Höhenmessungen beygebracht habe. Wer aber mehrere Methoden kennen lernen will, dem können folgende Schriftsteller Unterricht geben.

1) *Riccioli Geographia reformata, Lib. 6.*

2) *Benj. Hedraei nova et accurata Astrolabii geometrici structura.* (Lugd. Bat. 1643) Membr. II.

Ferner eine Abhandlung von einem Ungenannten, *de methodis montium altitudines dimetiendi* etc. (Vermuthlich ist der Verfasser Hr. Zeplichal, der sich durch einige algebraische Schriften bekannt gemacht hat.)

Ausser diesen trigonometrischen Methoden, hat man aber auch noch eine andere, physicalische, nemlich durch Hülfe eines Barometers, Höhen zu messen.

Es ist nemlich aus der Physik bekannt, daß die Luft an Dichtigkeit und Elasticität beständig abnimmt, auf je größere Höhen man kömmt. Da nun das Quecksilber in einem Barometer höher oder niedriger steht, je nachdem die Luft mehr oder weniger auf dasselbe drückt, so erhellet, daß auf Bergen das Quecksilber im Barometer niedriger stehen müsse, als im Thale.

Die Naturlehrer haben sich nun von jeher damit beschäftigt, das Gesetz zu finden, nach welchem sich der Druck der Luft in verschiedenen Höhen über der Erdfläche richtet, und da die Quecksilbersäule im Barometer mit dem Drucke der Luft bekanntermaaßen das Gleichgewicht hält, so hat man Vorschriften gesucht, aus den gegebenen Barometerhöhen, z. E. oben auf einem Berge, und unten im Thale, sogleich die Höhe der einen Station über der andern zu finden.

Da es sich wohl der Mühe verlohnt, von einer so nützlichen und leichten Art, Höhen zu messen, etwas beyzubringen, so soll folgendes dazu dienen.

Wie man aus den Höhen des Barometers an zweyen Orten finden kann, um wie viel der eine höher liegt, als der andere.

§. 197. Zu diesem Behufe nehmen die Naturlehrer ein Gesetz an, welches darinn besteht, daß nemlich bey gleicher Wärme die Dichte der Luft an jeder Stelle über der Erdfläche sich verhalte, wie die Kraft, mit der sie von der darüber stehenden Luft zusammengepresset wird.

Diese Voraussetzung hat sich durch würkliche Versuche, bey denen gleich warme Luft mit einer doppelten, dreyfachen Kraft, in die Hälfte, oder den dritten Theil ihres vorigen Raumes zusammengepresset ward, bestätiget, und man kann demnach dieses Gesetz auch in unserer Atmosphäre annehmen, so weit als die höchsten Berge sich in ihr erheben. Denn auf den höchsten Bergen, die wir kennen, ist die Luft gewiß noch nicht um den dritten Theil so dünne, als im Thale.

I. Man nehme also an, zwischen den parallelen am, bd, Fig LIX, sey eine Luftsäule, von der Oberfläche der Erde, bis an das äusserste Ende der Atmosphäre enthalten. Jede tiefer liegende Luft wird von dem Gewichte der darüberstehenden gedrückt.

II. Man stelle sich vor, die ganze Höhe am, sey in eine sehr große Anzahl kleiner Theile getheilet, die wie ac, cf, fh u. s. w. einander gleich sind; ce, fg, hi u. s. w. seyen Horizontalebenen, so werden solche die ganze Luftsäule abmd, in lauter Schichten aceb, cfeg, u. s. w. theilen, die insgesammt von gleicher Größe und Höhe sind.

III. Zugleich wird man ohne merklichen Fehler, wegen der geringen Höhe der Schichten, die Luft in jeder einzeln Schicht, als gleichförmig dicht annehmen können.

IV. Man setze also, es sey der Luft.

in den Schichten	acbe,	cfeg,	fhgi	u. s. w.
Dichtigkeit	d	d'	d''	u. s. w.
Gewicht	p	p'	p''	u. s. w.

Der Druck der gesammten Luftsäule auf die untere Fläche ab heiße P, der Druck auf die Flächen ce, fg, hi u. s. w. Q, R, S u. s. w. so erhält man folgendes.

V. Es ist $Q = P - p$, weil der Druck auf die Fläche ce um das Gewicht der Luft in der untern Schicht, kleiner ist, als der Druck auf die Ebene ab. Ferner, aus eben den Gründen

$$R = P - p - p'$$
$$S = P - p - p' - p'' \text{ u. s. w.}$$

VI. Weil nun nach dem oben erwähnten Geseße, die Dichtigkeiten der Luft in den Schichten acbe, fcge u. s. w, sich verhalten, wie die darauf drückenden Kräfte, so hat man

$$d : d' = Q : R = P - p : P - p - p'$$
$$d' : d'' = R : S = P - p - p' : P - p - p' - p''$$
u. s. w.

VII. Weil aber die Schichte gleichen Raum haben, so verhalten sich ihre Gewichte, wie ihre Dichtigkeiten, demnach ist auch

$$d : d' = p : p'$$
$$d' : d'' = p' : p''$$ u. s. w.

VIII. Demnach aus VI. VII. auch

$$p : p' = P - p : P - p - p'$$
$$p' : p'' = P - p - p' : P - p - p' - p''$$
$$p'' : p''' = P - p - p' - p'' : P - p - p' - p'' - p'''$$
u. s. w.

Mithin, durch die bekannte Verwandlung der Proportionen (antecedentes et consequentes summando)

$$P : P - p = P - p : P - p - p'$$
$$P - p : P - p - p' = P - p - p' : P - p - p' - p''$$
u. s. w.

Oder

Oder aus (V) statt $P - p$, $P - p - p'$ u. s. w. die Buchstaben Q, R u. s. w. substituirt

$$P : Q = Q : R \text{ also } R = \frac{Q^2}{P} = P \cdot \frac{Q^2}{P^2}$$

$$Q : R = R : S \text{ also } S = \frac{R^2}{Q} = P \cdot \frac{Q^3}{P^3}$$

u. s. w.

Hieraus erhellet also, daß die Pressungen der Luft auf die Flächen, oder Schichten a b, c e, f g u. s. w. in einer geometrischen Progression fortgehen, wie folget.

P; Q; R; S u. s. w. oder

P; $P \cdot \frac{Q}{P}$; $P \cdot \frac{Q^2}{P^2}$; $P \cdot \frac{Q^3}{P^3}$ u. s. w.

Der Exponent dieser geometrischen Progression ist $= \frac{Q}{P}$.

IX. Man setze also v w sey die mte Schicht über a b und x y die nte, man nenne den Druck der Luft auf $vw = X$, auf $xy = Y$ so ist vermöge der erwähnten geometrischen Progression,

$$X = P \cdot \left(\frac{Q}{P}\right)^m ; Y = P \cdot \left(\frac{Q}{P}\right)^n.$$

Mithin $\frac{X}{P} = \left(\frac{Q}{P}\right)^m$; $\frac{Y}{P} = \left(\frac{Q}{P}\right)^n$ oder wenn man auf beyden Seiten Logarithmen nimmt.

$$\log \frac{X}{P} = m \,.\, \log \frac{Q}{P};$$

$$\log \frac{Y}{P} = n \log \frac{Q}{P},\text{ folglich}$$

$$\log \frac{X}{P} : \log \frac{Y}{P} = m : n.$$

X. Nun verhalten sich aber m, n, wie die Mengen der gleichen Theile, die auf av ax, gehen; d. h. n, m verhalten sich wie die Höhen ax, av, der beyden Schichte xy, vw, über der untern ab. Ferner, die Pressungen P, X, Y der Luft auf die Schichten ab, vw, xy, verhalten sich wie die Quecksilbersäulen, die die Luft bey a, v, x im Barometer tragen kann. Nennet man also die Höhe av = h; ax = H, die Barometerhöhe bey a = B
bey v = b
bey x = β

so verwandelt sich die obige Proportion IX. in nachstehende

$$h : H = \log \frac{b}{B} : \log \frac{\beta}{B}$$

oder

oder welches auf eines hinausläuft

$$h : H = \log \frac{B}{b} : \log \frac{B}{\beta}$$

Es verhalten sich also die Höhen der Stationen v, x, über der Horizontalfläche a b, wie die Logarithmen der Quotienten, wenn man die jedesmahlige Barometerhöhe in der untersten Station a, mit den Barometerhöhen bey den Stationen v, x, dividiret.

Anwendung dieses Satzes auf Messung der Höhen.

XI. Es ist also klar, daß, wenn bey einem gewissen Barometerstande B in der untersten Station a, ein für allemahl durch eine Erfahrung bekannt ist, wie hoch man sich erheben muß, damit das Barometer um eine gewisse bestimmte Größe sinke, man alsdann für jede gegebene Barometerhöhe an einer andern Station finden könne, wie hoch diese Station über der untersten liege.

Ex. Die Erfahrung hat gelehret, daß, wenn in der untersten Station a, die Barometerhöhe B = 28 pariser Zoll = 28 . 12 = 336 Linien ist, und man sich um die Höhe av = h = 12,945 Toisen, über der untersten Station erhebt, alsdann bey v die Barometerhöhe um

1 Linie

1 Linie geringer ist als bey a, daß folglich bey v die Barometerhöhe b nur 335 Linien seyn werde.

Man setze also in obige Proportion statt B, h, b, die gefundenen Werthe, so verwandelt sich diese Proportion in folgende

$$12{,}945 : H = \log \frac{336}{335} : \log \frac{336}{\beta}$$

Nun ist aber aus den Logarithmen-Tafeln

$$\log \frac{336}{335} = \log 336 - \log 335 = 0{,}0012945$$

Mithin

$$12945 : H = 0{,}0012945 : \log \frac{336}{\beta}$$

welches als folgende Gleichung giebt

$$H = \frac{12{,}945}{0{,}0012945} \cdot \log \frac{336}{\beta} \text{ oder}$$

$$H = 10000 \log \frac{336}{\beta} = 10000(\log 336 - \log \beta)$$

Auf diese Art erhellet also, daß man die Höhe H einer Station x, bey der die Barometerhöhe = β Linien ist, über einer andern, wo die Barometerhöhe 336 Linien beträgt, finden wer-

werde, wenn man vom Logarithmen der Zahl 336, abziehet den Logarithmen der Zahl β, und den Rest mit 10000 multipliciret. Die Höhe der obern Station über der untern findet man aber durch dieses Verfahren in Toisen; und die Barometerhöhen müssen in pariser Linien ausgedrückt werden, weil diese Maaße bey obigem Versuche zum Grunde liegen.

XII. Es heisse nun an einer andern Station r, die Barometerhöhe = b, und die Erhöhung dieser Station über der, wo die Barometerhöhe 336 Linien ist, jetzt = h, so ist auf eben die Art

$$h = 10000 \log \frac{336}{b}.$$

XIII. Aus XI. XII. ist also

$$H - h = 10000 \left(\log \frac{336}{\beta} - \log \frac{336}{b}\right) \text{ oder}$$

$$H - h = 10000 \log \frac{b}{\beta}.$$

Hiedurch bestimmt sich also der Unterschied H — h, oder die Höhe rx einer Station x, wo die Barometerhöhe β Linien beträgt, über einer andern r, wo die Barometerhöhe b Linien

nien groß ist, und daher hat man allgemein folgende

Regel.

Man suche die Differenz der Logarithmen der Barometerhöhen an zweyen Stationen, multiplicire sie mit der Zahl 10000, so hat man die Höhe der einen Station über der andern in Toisen.

XIV. Ex. Gesetzt, am Fuße eines Berges fände man die Barometerhöhe b = 27 Zoll 8 Linien = 332 Linien, auf der Spitze des Berges aber die Barometerhöhe = 26 Zoll 4 Linien = 316 Linien = β, so ist

$$\log 332 = 2{,}5211381$$
$$\log 316 = 2{,}4996871$$

Unterschied = 0,0214510

mult. mit 10000 giebt 214,51 Toisen. So hoch wäre die Spitze des Berges über dem Fuße desselben erhaben. Auf die Decimalbrüche der Toisen würde man sich aber wohl schwerlich verlassen können, weil bey der Beobachtung der Barometerhöhen doch immer kleine Fehler vorfallen. Man kann also in der Höhe des Berges etwa nur die ganzen Toisen beybehalten.

An-

Anmerkungen über dieses Verfahren, und nöthige Vorsichten in der Ausübung.

§. 198. I. Die bisherige sehr bequeme Methode, Höhen vermittelst des Barometers zu messen, würde in jedem Falle ganz genau die Höhe der einen Station über der andern geben, wenn nicht das Gesetz des 197. §es, woraus das Verfahren §. 197. XIII. hergeleitet worden, wegen des verschiedenen Grades der Wärme in der untern und obern Luft einige Einschränkung erlitte, und nicht vielleicht noch andere Umstände auf dasselbe Einfluß hätten. In der That hat auch die Erfahrung gelehrt, daß die durchs Barometer gefundenen Höhen, ohne noch gewisse Correctionen anzubringen, nicht vollkommen mit der trigonometrischen Messung derselben übereinstimmen. So glaubte z. E. Bouguer durch Erfahrungen gefunden zu haben, man müsse, um die wahre Höhe zu erhalten, diejenige, welche obige Regel aus den Barometerständen giebt, noch mit dem Bruche $\frac{29}{30}$ multipliciren; Allein er hat nirgends die Gründe, warum man dieß thun müsse, gehörig auseinandergesetzt. Hr. Hofr. Kästner hat sich daher in seiner Abh. vom Höhenmessen vermittelst des Barometers, welche seiner Markscheidekunst beygefügt ist, die Mühe gegeben, die Erfahrungen aufzusuchen, auf denen sich B. Vorschrift gründet. Aber auch diese Untersuchungen

gen haben ergeben, daß B. Regel nicht für allgemein richtig angenommen werden könne. So haben denn auch Lambert, Dan. Bernoulli, und andere, aus gewissen Voraussetzungen und Erfahrungen, Vorschriften zu Höhenmessungen vermittelst des Barometers, herausgebracht, welche gleichfalls nur in besondern Fällen die wahre Höhe geben. Hr. Hofr. Kästner hat in angeführter Schrift mit vielem Scharfsinne die Gründe und Erfahrungen zu allen diesen Vorschriften aufgesucht, und mit einander verglichen, daher ich denn meine Leser nur auf dieses Buch verweisen darf. Auch findet man in Gehlers physikal. Wörterbuche, unter dem Art. Höhenmessen, eine kurze Uebersicht der vorzüglichsten Regeln, welche von Zeit zu Zeit für das Höhenmessen, vermittelst des Barometers, erschienen sind. Gegenwärtig ist die de Lucische mit den Erfahrungen noch immer die übereinstimmendste. Ehe ich aber diese vortrage, muß ich noch einige Bemerkungen vorausschicken.

1) Ist klar, daß die Schlüsse des 197sten §es, woraus die Formel (§. 197. XIII.) hergeleitet wurde, voraussetzen, daß das Quecksilber im Barometer, wenn man sich damit auf einen Berg begiebt, nur deswegen sinke, weil der Druck der Luft in größerer Höhe abnimmt. Hätte aber, während man höher steigt, sich der Druck der Luft durchaus verän-

ändert, so daß z. E. das untere Barometer indessen selbst gesunken wäre, so dürfte man offenbar das Sinken dessen, welches man auf die Höhe brachte, nicht ganz auf die Rechnung der Höhe schreiben, sondern wenn die Regel (§. 197. XIII.) richtig angewandt werden soll, so muß man versichert seyn, daß während man sich in die obere Station begiebt, sonst keine Aenderung in dem Drucke der Luft vorgefallen ist, oder vielmehr, man muß die obere und untere Barometerhöhe für einerley Augenblick angeben. Um also recht sicher zu verfahren, so würde man einen Beobachter mit einem andern Barometer in der untern Station zurücklassen, wo er zu verschiedenen Zeiten den Stand des Barometers observiren müßte, während man in der obern Station mit dem Beobachten beschäftigt ist. Es versteht sich, daß die beyden Barometer, deren man sich hiezu bedienet, mit einander übereinstimmen, d. h. in der untern Station, einerley Höhe des Quecksilbers anzeigen müssen. Man muß also beyde vorher sorgfältig mit einander vergleichen, und wenn sie nicht vollkommen übereinstimmen, den Unterschied anmerken, und iu Rechnung bringen.

Aus diesen, zu unterschiedenen Zeiten, in der untern Station beobachteten Barometerhöhen, wird sich nun gar leicht zeigen, ob sich, während man in der obern Station die Barometerhöhe beobachtete, der Zustand der Luft durchaus verändert hat, oder nicht. Sind nun die Zeiten angegeben, in welchen man die Barometerhöhen an beyden Stationen beobachtete, so wird sich daraus ohne großen Irrthum berechnen lassen, wie hoch in dem Augenblicke, da man in der obern Station den Barometerstand beobachtete, das Barometer in der untern Station gestanden haben müßte.

Gesetzt, Morgens um 8 Uhr habe man in der untern Station beyde Barometer mit einander verglichen, sie vollkommen übereinstimmend; und ihre Höhe = 27 Zoll 4 Linien gefunden. Um drey Uhr Nachmittags habe der Beobachter in der untern Station, die Barometerhöhe = 27 Zoll 8 Linien beobachtet. Ich will nun annehmen, der Beobachter auf der höhern Station, habe Nachmittags um 1 Uhr den Barometerstand beobachtet, und ihn = 26 Zoll $2\frac{1}{3}$ Linie gefunden. So wird man, weil sich von 8 bis 3 Uhr in der untern Station die Barometerhöhe um 4 Linien, folglich, während daß man in die höhere Station stieg, sich der ganze Zustand der Luft verändert hat, gar leicht berechnen können, wie hoch um 1 Uhr Nachmittags, da oben die Barometerhöhe beobachtet wurde, das untere Barometer gestanden haben müßte. Man schliesse nemlich nach der Regel de Tri, wie sich verhält die

Zeit

Zeit von 8 Uhr Morgens bis 3 Uhr Nachmittags, zur Zeit von 8 Uhr Morgens bis 1 Uhr Nachmittags, so verhält sich der Unterschied der Barometerhöhen, die in der untern Station um 8 Uhr und 3 Uhr beobachtet worden, zum Unterschiede dieser Barometerhöhen, von 8 Uhr bis 1 Uhr, also

7 Stund. : 5 Stund. = 4 Linien : $2\frac{6}{7}$ Linien.

Da also um 3 Uhr das untere Barometer um 4 Linien höher stand, als um 8 Uhr, so würde es um 1 Uhr nur $2\frac{6}{7}$ Linien höher gestanden haben, als um 8 Uhr. Es würde also um 1 Uhr Nachmittags die Barometerhöhe = 27 Zoll 4 Linien + $2\frac{6}{7}$ L. = 27 Zoll $6\frac{6}{7}$ Linien gewesen seyn, in dem Augenblicke, da man in der obern Station die Barometerhöhe = 26 Zoll $2\frac{1}{3}$ Linien fand.

Diese beyden Barometerhöhen 27 Zoll $6\frac{6}{7}$ L. und 26 Zoll $2\frac{1}{3}$ Linien, muß man nun gebrauchen, die Höhe der obern Station über der untern nach (§. 197. XIII.) zu finden.

Kann man nach einer getroffenen Verabredung die obere und untere Barometerhöhe in einerley Augenblicke unmittelbar beobachten, so kann man auch diese Regel de Tri ersparen.

2) Muß man überlegen, daß die Barometerhöhen an beyden Stationen, auch eine Correc-

rection wegen des verschiedenen Grades der Wärme erfahren müssen, ehe man sie zu der Berechnung nach (§. 197. XIII) anwenden darf. In den höhern Gegenden ist es bekanntlich kälter, als in den tiefern, und das Quecksilber im obern Barometer wird also niedriger stehen, als es stehen würde, wenn die Luft daselbst eben so warm, als unten im Thale wäre. Es müssen also beyde Barometerhöhen auf einerley Temperatur reducirt werden, und hiezu hat Hr. de Luc Vorschriften gegeben, welche ich nachher im Zusammenhange vortragen werde. Daß nun aber auch

3) Die Barometer in Rücksicht ihrer Eintheilungen, aufs genaueste übereinstimmen, und die übrigen Vollkommenheiten haben müssen, die man von guten Werkzeugen dieser Art verlangt, bedarf kaum einer Erinnerung. Daß das Quecksilber, womit man die Barometer füllt, so gut, wie bey Thermometern, durch das Auskochen, von Luft und Feuchtigkeiten gereinigt werden müsse, daß zumahl in der obern Leere nicht die geringste Luft zurückbleibe u. d. gl., und wie dieß zu bewerkstelligen sey, kann man bey Schriftstellern, welche die genaue Verfertigung der Barometer lehren, umständlich ersehen. Hieher gehöret vorzüglich Hrn. de Lucs unten (6) angeführtes Buch; und Hrn. Oberkaplan Lutz in Gunzenhausen vollständige und auf Erfahrung gegründete Be-

Beschreibung von allen Barometern, wie sie zu verfertigen, zu berichtigen, übereinstimmend zu machen, und — — zu Höhenmessungen anzuwenden (Nürnb. u. Leipz. bey A. G. Schneider. 1784. 8.) und andere Schriften.

4) Oft finden sich Barometer, die bloß aus einer mit Quecksilber gefüllten Röhre bestehen, deren offenes Ende unten in einem weitern Gefäße mit Quecksilber steht, damit beym Fallen des Barometers, das Quecksilber in dieses Gefäß treten kann. Ist dieses Gefäß eine hölzerne Büchse, die unten die Barometerröhre umschliesset, so taugen solche Barometer nicht zu Höhenmessungen, weil man die untere Fläche des Quecksilbers nicht in solchen hölzernen Büchsen wahrnehmen kann, und dieß doch nöthig ist, weil man die wahre Höhe der Quecksilber-Säule im Barometer, allemahl von der Quecksilber-Fläche in der Büchse, bis zu der in der Röhre, rechnen muß. Aber wenn das Quecksilber in der Röhre sinkt, so steigt es in der untern Büchse, und daher ist der Punkt, von welchem man die Quecksilbersäule anrechnet, veränderlich. Ist die Büchse weit, in Ansehung der Röhre, so kann das Quecksilber in der Röhre um mehrere Zolle fallen, ehe es in der Büchse um ein erhebliches steigt. Zu gewöhnlichen Wetterbeobachtungen mag daher meistens hinlänglich seyn, nur den Stand

des

des Quecksilbers in der Röhre anzugeben, aber zu Höhenmessungen mit dem Barometer ist nöthig, daß man auch das Steigen oder Fallen des Quecksilbers in der Büchse, nicht ausser Acht lasse. Es muß daher statt ihrer ein gläsernes Gefäß genommen werden, welches oben oder seitwärts mit einer kleinen Oeffnung versehen ist, daß die Luft auf das Quecksilber drücken kann, und die Scale muß bis zu diesem Gefäße hinabreichen, damit man an ihr sowohl den Stand des Quecksilbers in der Röhre, als in diesem Gefäße wahrnehmen, und daraus die wahre Barometerhöhe, d. h. wie viel Zolle, Linien und Decimaltheile von Linien (letztere kann man nach dem Augenmaaße, oder wer sich darauf nicht verlassen will, vermittelst eines Vernier bestimmen) die obere Quecksilberfläche über der untern erhaben ist, herleiten kann.

5) Gewöhnlich ist das Gefäß bic, wie LX. ausweiset, gleich an die Röhre fl selbst angeblasen. Es ist vortheilhaft, wenn dieß Gefäß bic eine cylindrische Gestalt hat. Es kann mit der Röhre einerley oder auch verschiedene Weite haben. Zu dem Höhenmessen mit dem Barometer sind die sogenannten Heberbarometer d. h. solche deren Röhre und Gefäß gleiche Weite haben, also nur aus einer einzigen Röhre bestehen, die besten und bequemsten. Beym Hin- und Hertragen läßt man

das Quecksilber durch vorsichtige Neigung der Röhre, bis an das Ende derselben laufen. Dann kann man das Barometer in horizontaler Lage forttragen, ohne ein Schwanken des Quecksilbers zu befürchten. Bey den gewöhnlichen Gefäß-Barometern ist diese Bedingung schwerer zu erhalten. Von allerley künstlichen Einrichtungen zu sogenannten Reisebarometern giebt die (z) angeführte Schrift Nachricht. Bey den Heberbarometern kann man zur Verhütung des etwanigen Schwankens des Quecksilbers in der kurzen Röhre während des Hin- und Hertragens, sich bequem der Einrichtung bedienen, daß man in die kurze Röhre einen mit einem Fischbeinstiele versehenen gut zugefeilten Kork bis beynahe an die Quecksilberfläche hereinschiebt. Die Quecksilberfläche selbst darf er aber nicht ganz berühren, damit dem Quecksilber etwas Raum bleibt, sich auszudehnen, wenn es in eine andere Temperatur kömmt, und das Barometer der Gefahr des Springens nicht ausgesetzt ist. Es ist gut, wenn der Kork etwas konisch zugefeilt ist, so kann das Quecksilber wenn es sich ausdehnt, in den Raum hereintreten, welcher zwischen dem Korke und dem Glase bleibt.

Bey i ist eine Scale an der man den Stand der untern Quecksilberfläche b c wahrnehmen kann. Das Null dieser Scale muß mit dem Null der Scale l e an der Röhre,

genau

genau in einerley Horizontallinie liegen. Stände also z. E. die Quecksilberfläche in dem Gefäße bey b c, 2, 5 Linien über dem Null, die Quecksilberfläche in der Röhre aber bey e, 27 Zoll 3, 8 Linien über Null, so wäre 27 Z. 3, 8 L. — 2, 5 Lin. oder 27″. 1‴, 3, die senkrechte Entfernung der obern Quecksilberfläche über der untern, also die wahre Barometerhöhe. Bey der Beobachtung muß man allemahl das Auge seitwärts, genau in die verlängerte Fläche e oder b c halten, damit man keine Parallaxe zu befürchten habe, und man den richtigen Stand des Quecksilbers beobachten könne. Daß das Barometer vertical hängen müsse, versteht sich von selbst.

6) Diese und mehrere Vorsichten sind einem Geometer nöthig, wenn das Höhenmessen mit dem Barometer eine hinlängliche Genauigkeit versprechen soll. Ich will nunmehr Hrn. de Lucs verbesserte Regel für das erwähnte Höhenmessen hier in die Kürze zusammenziehen.

Hr. de Luc fand, daß die Vorschrift (§. 197. XIII.) die Höhe einer Station über der andern, nur bey einer gewissen Temperatur der Luft, nemlich bey $16\frac{3}{4}°$ des reaumurschen Thermometers, richtig angebe, bey einer jeden andern Temperatur aber eine Correction erfordere, von der er das Gesetz mit sehr vielem Scharfsinne in seinem Werke sur les modifications

de

de l'Atmosphère, davon zu Leipzig eine Uebersetzung durch Hrn. Dr. Gehler geliefert worden ist, untersucht hat. Unter der Temperatur der Luft wird hier das arithmetische Mittel zwischen der Temperatur in der obern und untern Station verstanden. Denn obgleich das Gesetz, nach welchem die Wärme in der Atmosphäre von unten nach oben zu abnimmt, und folglich den Druck der Luft auf das Quecksilber in dem Barometer ändert, nicht mit zuverlässiger Genauigkeit bekannt ist, so hat doch Hr. de Luc durch eine zahlreiche Menge von Beobachtungen gefunden, daß die gedachte mittlere Temperatur der Luftsäule, in der man beobachtet, vollkommen hinreiche, die Correction zu bestimmen, welche der Formel (§. 197. XIII.) noch beygefügt werden muß, um in einem jeden Falle die wahre Erhöhung der obern Station über der untern zu finden. Kästner hat in seiner oben angeführten Abhandlung vom Höhenmessen, de Lucs Gründe und Formeln, mit sehr vielen nützlichen Bemerkungen, erläutert, und ich habe in meiner Abhandlung über das Ausmessen der Wärme, in Rücksicht und Anwendung auf das Höhenmessen vermittelst des Barometers, (Nürnberg bey Monath, 1786.) a priori gezeigt, daß Hrn. de Lucs Regel, immer der Wahrheit sehr nahe seyn müsse. Da aber die Gründe dazu, so wie überhaupt der Beweiß von Hrn.

de Lucs Formel, hier zu weitläuftig fallen würde, so begnüge ich mich, meine Leser zur weitern Belehrung auf eben angeführte zwey Schriften zu verweisen, und hier bloß die Formel selbst herzusetzen.

Hrn. de Lücs Regel.

II. 1. Es sey die in der obern Station beobachtete Barometerhöhe = β pariser Lin. und zu eben der Zeit die reaumürsche Thermometerhöhe über dem Eispunkt = t Grade.

2. Die in der untern Station beobachtete, und nach (I. 1) auf eben die Zeit (II. 1) reducirte Barometerhöhe = b paris. Lin.; Thermometerhöhe = T Grad über dem Eispunkt.

3. Man corrigire, wegen der Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme (I. 2), die Barometerhöhe der obern Station um so viel Linien, als die Größe $\frac{\beta(t-10)}{4320}$, und die Barometerhöhe der untern Station, um so viel Linien, als die Größe $\frac{b(T-10)}{4320}$ angiebt, und nenne solchergestalt die corrigirten Barometerhöhen in beyden Stationen, nemlich

β

$$\beta - \frac{\beta . (t - 10)}{4320} = \beta'$$

$$b - \frac{b (T - 10)}{4320} = b'.$$

4. Für diese corrigirten Barometerhöhen, suche man nun nach der Formel (§. 197. XIII.) die Höhe der obern Station, über der untern, so wird dieselbe $= 10000 \log \frac{b'}{\beta'}$.

5. Man ziehe nun von $16\frac{3}{4}$ reaumürschen Graden über dem Gefrierpunkt, die halbe Summe der in beyden Stationen beobachteten Thermometerhöhen ab, und nenne den Rest C, so ist $C = 16\frac{3}{4} - \left(\frac{T + t}{2}\right)$.

6. Man multiplicire endlich die nach (4) herausgekommene Höhe der einen Station über der andern, mit der Größe $1 - \frac{C}{215}$, so erhält man die wahre corrigirte Höhe der obern Station über der untern.

Es wird also in Toisen, die

$$\text{corrig. Höhe} = \left(1 - \frac{C}{215}\right) 10000 \log \frac{b'}{\beta}.$$

III. Um diese Berechnung in einem Beyspiele zu erläutern, so will ich setzen, in der untern Station stehe das Barometer auf 27 Zoll $4\frac{1}{2}$ Lin. $= b = 328{,}5$ Lin., das Thermometer auf 18 Grad $= T$. In der obern Station das Barometer auf 26 Zoll $2\frac{3}{4}$ Lin. $= \beta = 314{,}7$ Lin., das Thermometer auf 7 Grad $= t$, so wird

$$\frac{\beta\,(t - 10)}{4320} = - \frac{3 \cdot 314{,}7}{4320} = - 0{,}2 \text{ Lin.}$$

$$\frac{b.(T - 10)}{4320} = + \frac{8 \cdot 328{,}5}{4320} = + 0{,}6 \text{ Lin.}$$

Mithin die corrigirten Barometerhöhen

$$\beta' = 314{,}7 + 0{,}2 = 314{,}9 \text{ Linien}$$
$$b' = 328{,}5 - 0{,}6 = 327{,}9 \text{ Linien.}$$

Ferner wird

$$C = 16\tfrac{3}{4} - \left(\frac{18+7}{2}\right) = 16{,}75 - 12{,}5 = 4{,}25$$

$$\text{und } \frac{C}{215} = \frac{4{,}25}{215} = 4{,}25 \,.\, 0{,}0046$$

=

$= 0{,}019$, daher $1 - \frac{C}{215} = 1 - 0{,}019 =$

$0{,}981$ also die

$$\text{corrig. Höhe} = 0{,}981 \cdot 10000 \log \frac{327{,}9}{314{,}9}$$
$$= 0{,}981 \cdot 10000 \cdot 0{,}0175687$$
$$= 172{,}34 \ldots \text{Toisen}$$
$$= 1034{,}04 \text{ pariser Fuß.}$$

Man darf wohl nicht denken, daß die Zehentheile eines Fußes in dieser Rechnung zuverlässig seyn werden, da kleine Fehler in den Beobachtungen die Höhe wohl selbst auf einige Fuße unsicher geben.

IV. In diesem Exempel waren an beyden Stationen die Thermometerhöhen über dem Gefrierpunkt, folglich die Werthe von T, t, positiv. Für Thermometerhöhen unter dem Gefrierpunkt, muß man die Werthe von T, t, als negativ betrachten, und solchergestalt, sowohl bey Berechnung der corrigirten Barometerhöhen (3), als auch des Werthes von C, sich hiernach richten.

V. Hr. de Luc hat auf diese Art sehr viele Höhen durchs Barometer gemessen, sie mit der geometrischen Messung verglichen, und meistens nur einen sehr geringen Unterschied gefunden, wie

wie man aus dem IIten Theile seines Werkes §. 624 u. f. ersehen kann.

Er bedient sich aber, um desto sicherer zu verfahren, an jeder Station zweyer Thermometer, von deren Einrichtung man die Gründe sowohl in seinem oberwähnten Werke, als auch in Kästners Abh. vom Höhenmessen, findet.

Das erste Thermometer befindet sich unmittelbar an dem Brette, an welchem das Barometer hängt; dem Barometer kann also nichts wiederfahren, was dem Thermometer nicht auch wiederführe, und so dienet dieses Thermometer, die Veränderungen und Correctionen zu bestimmen, denen wegen der Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme, die Barometerhöhen selbst unterworfen sind, die Grade dieses Thermometers werden also bey Berechnung der Werthe b', β' gebraucht.

Das andere Thermometer dienet, die Temperatur der Luftsäule zu bestimmen, in der die Barometerhöhe beobachtet wird, und die Grade desselben werden bey der Berechnung des Werthes von C zum Grunde gelegt.

Da es aber nicht wohl eines jeden Sache ist, die Scalen für diese Thermometer gehörig nach Hrn. de Luc's Vorschrift einzutheilen, und

und es übrigens auch keinen großen Fehler verursacht, wenn man sich bey jeder Station nur eines einzigen Thermometers (welches aber neben dem Barometer in freyer Luft und an einem schattigten Orte hangen muß) bedienet, so habe ich Hrn. de Luc's Vorschriften auf den Gebrauch des reaumurschen Quecksilberthermometers, das zwischen dem Eis- und Siedepunkte 80 Grade hält, eingerichtet, weil dieses Thermometer sehr bekannt ist, und zu gegenwärtiger Absicht einige Bequemlichkeiten hat.

Gebrauchte man ein Fahrenheitisches Thermometer, so müßte man die beobachteten Grade desselben, über oder unter dem Gefrierpunkte, auf reaumürsche Grade reduciren welches sehr leicht geschehen kann, weil $2\frac{1}{4}$ Fahrenh. Grade einen reaumürschen betragen.

VI. Was übrigens ausser den oben (I. 1 — 6) angeführten Vorsichten auch noch bey den Thermometern und deren Verfertigung zu beobachten ist, davon muß man in besondern Schriften Nachricht suchen, von denen oberwähntes Werk des Hrn. de Luc, ferner Michaeli du Crest's kleine Schriften vom Thermometer und Barometer, aus dem Franz. von J. C. Thenn (Augsb. 1770), Hrn Comm. Strohmeyers Anleitung, übereinstimmende Thermometer zu verfertigen

tigen (Gött. 1775), und vorzüglich Hrn. Lutz (s. oben I. 3) Anweisung Thermometer zu verfertigen (Nürnb. 1781.); auch Gottfr. Ernst Rosenthals Anleitung zur Kenntniß meteorologischer Werkzeuge (II Bände), zu empfehlen sind.

VII. Wie die Barometer besonders zu langen Bergreisen eingerichtet werden müssen, davon ertheilet ebenfalls Hr. de Luc den gehörigen Unterricht; m. s. auch Branders Beschreibung zweyer besonderer und neuer Barometer, die zu Höhenmessungen vorzüglich zu gebrauchen sind, als ein Zusatz zu Hrn. du Crests Samml. kleiner Schriften von Thermometern und Barometern (Augsb. 1777.).

Beschreibung eines einfachen Reisebarometers, nebst einer Anleitung zur leichten Berechnung der Berghöhen von Hrn. Prof. Benzenberg (Düsseldorf bey Schreiner 1811.).

Noch gehört zu dem Höhenmessen vermittelst des Barometers, *I. F. Hennert*, Commentatio de altitudinum mensuratione ope barometri. Eine Schrift, welche von der Soc. der Wissenschaften in Göttingen den

Preiß

Preiß erhalten hat, und 1786. zu Utrecht herausgekommen ist.

Noch einige Bemerkungen über de Luc's Höhenformel s. m. in einem Zusatze am Ende dieses 2ten B. der pract. Geometrie.

Einige Anmerkungen über die trigonometrische Messung der Höhen sehr weit entlegener Gebirge.

§. 199. I. Wenn man die Höhe eines von den Standpunkten sehr weit entlegenen Berges, nach den vorhergehenden Methoden bestimmen will, so kann man fragen, was die Krümmung der Erde auf diese Messungen für Einfluß habe.

Es sey also Fig. LXI G der Mittelpunkt der Erdkugel, und CEB ein Stück eines größten Kreises auf der Oberfläche der Erde.

A ein Object, z. E. die Spitze eines entfernten Berges, um die Höhe AB über der Erdfläche erhaben.

Weil AB eine Verticallinie seyn muß, so wird sie, verlängert, durch den Mittelpunkt der Erde gehen (§. 4).

Gesetzt nun, c sey ein Standpunkt, um die Höhe cC über der eigentlichen Erdfläche erhaben,

ben, so wird auch Cc die Verlängerung des Halbmessers GC seyn. Man gedenke sich durch c eine Horizontalebene co, so wird dieselbe auf Gc senkrecht stehen (§. 11).

Der Winkel Aco, sey bey c der Elevationswinkel des Objects A, über der durch c gehenden Horizontalfläche oder Horizontallinie co; und ein Perpendickel Ao auf die durch c gehende Horizontalfläche wird die Höhe des Objects A, über dem Horizont des Beobachters c ausdrücken.

co wird die Horizontalweite des Objects A von c seyn.

Nun erhellet, daß die vorhergehenden trigonometrischen Methoden, eigentlich nur allemahl, die Höhe Ao, über dem Horizont des Standpunktes c bestimmen, keinesweges aber die wahre Höhe des Objects über der Erdfläche bey B, oder die Höhe AB.

Wollte man also die trigonometrisch gefundene Ao, für die wahre Höhe AB annehmen, so würde man einen Fehler begehen, der desto größer ist, je weiter A von c weg liegt, je mehr also die Krümmung der Erdfläche zwischen B und C beträgt.

Ich

Ich will nun zeigen, wie man aus der trigonometrisch gemessenen Höhe A o, die wahre Höhe des Berges A B, finden könne.

II. Es heisse also die Höhe A o = c, der Elevationswinkel A c o = α, die Krümmung der Erde zwischen C und B, oder der Bogen C B, als Maaß des Winkels G = β.

Der Halbmesser der Erde G C = C B = r, des Standpunkts c Erhöhung über der wahren Erdfläche, oder C c = b. Wäre der Standpunkt c z. E. selbst auf einer Bergspitze, so bedeutet C c die Höhe dieses Berges.

Nun ist in den ähnlichen Dreyecken G c e, A e o, der Winkel e A o = G = β, mithin für sin tot = 1

$$Ao : Ae = 1 : \sec\beta \text{ oder}$$
$$Ae = c \,.\, \sec\beta$$

Ferner in dem rechtwinklichten Dreyecke G c e

$$Gc : Ge = 1 : \sec\beta \text{ also}$$
$$Ge = (r + b) \sec\beta$$

daher $Be = Ge - GB = (r + b) \sec\beta - r$

folglich $Be + Ae$ oder $AB = (r + b + c) \sec\beta - r$.

III. Man siehet also, daß ausser dem Halbmesser der Erde, welcher 3272020 Toisen beträgt (§. 117. I. Lehns.), auch die Größe des Bogens CEB = β bekannt seyn müsse.

Die-

Diesen Bogen, welcher des Punkts B Weite von C ausdrückt (denn alle Weiten auf der Erdfläche, sind eigentlich Bogen größter Kreise) muß man entweder aus geographischen Nachrichten als bekannt annehmen, oder denselben selbst aus gemessenen Standlinien bestimmen.

Wenn des Punkts A Weite von c, oder Ac bekannt ist, welche man etwa aus angenommenen Standlinien bestimmen könnte, so wird dieselbe ebenfalls dienen, den Winkel G, oder den Bogen β zu bestimmen.

Ein gleiches würde man vermittelst der Horizontalweite co der beyden Objecte A, c, bewerkstelligen können.

Denn wenn der Elevationswinkel Aco sehr klein ist, welches bey Höhenmessungen aus sehr weit entlegenen Standpunkten, immer statt findet, so kann man ohne merklichen Irrthum, die aus Standlinien trigonometrisch gefundene Horizontalweite co, der wahren Weite cA gleichsetzen.

Ich kann also $co = cA$ als eine bekannte Größe annehmen, und will $co = cA = a$ setzen.

IV. In dem Dreyecke GcA sind also die Größen $Gc = r + b$, $cA = a$, und der eingeschlossene Winkel $GcA = 90^\circ + \alpha$ bekannt. Daraus findet sich der Winkel G nach den bekannten Regeln. Aber ohne diesen Winkel G läßt sich die Größe AB noch auf eine andere Art finden.

V. Man berechne aus den in (IV) angenommenen bekannten Größen in dem Dreyecke AcG, die Seite AG, ziehe davon ab $GB = r$, so hat man AB.

Wenn man nach (Trig. S. XVIII.) verfährt, und die dortigen a, b, hier cG, cA, oder $r + b$, a, bedeuten läßt, und den dortigen Winkel $\varphi = 90^\circ + \alpha$ setzt, so erhält man erstlich

$$\sin\psi = \frac{2\cos(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)\sqrt{a(r+b)}}{a+r+b}$$

und dann $AG = (a + r + b)\cos\psi$.

Ex. Aus Cassini Abhandl. von der Figur und Größe der Erdkugel, (aus dem Franz. von Albr. Klimm).

Im X. Kapitel dieses Buchs giebt Cassini die trigonometrische Messung verschiedener Höhen auf dem Pyrenäischen Gebürge, und fand z. E. für den Kanigou, einen der höchsten des erwähnten Gebürges, den Elevationswinkel $Aco = \alpha = 2^\circ\ 37'$, und die aus einer gewissen

sen Standlinie gefundene Weite $Ac = a = 28767$ Toisen. Der Standpunkt c war nahe an der Oberfläche des Meeres, so, daß cC oder b nur $9'$ betrug, eine Größe, die man ohne merklichen Fehler hier $= 0$ setzen kann. Dieß giebt

also hier $\sin\psi = \frac{2 \cos (45° + \frac{1}{2}\alpha) \sqrt{a \cdot r}}{a + r}$,

und $AG = (a + r) \cos \psi$

Mithin	$\log 2$	$= 0,3010300$
	$l \cos (45° + \frac{1}{2}\alpha)$	$= 9,8393380$
	$\frac{1}{2} (l\,a + l\,r)$	$= 5,4868551$
		$15,6272231$
	$l\,(a + r)$	$= 6,5186175$
	$\log \sin \psi$	$= 9,1086056$
	ψ	$= 7°.\,22'.\,40''$
	$\log \cos \psi$	$= 9,9963892$
	$l\,(a + r)$	$= 6,5186175$
	$\log AG$	$= 6,5150067$
	daher AG	$= 3273457$
	abgezog. GB	$= 3272020$
Höhe des Kanigou		$= 1437$ Tois. $= AB$.

Cassini findet 1441 Toisen, dieß rühret aber daher, daß er den Halbmesser der Erde etwas anders angenommen hat.

Um nun zu zeigen, was man für einen beträchtlichen Fehler begehet, wenn man A o für A B annehmen wollte, so will ich in dem rechtwinklichten Dreyecke c A o auch noch A o berechnen.

$$\begin{aligned} \log AC = l\,a &= 4{,}4588949 \\ \log \sin A c o &= 8{,}6594748 \\ \hline \log A o &= 3{,}1183697 \\ A o &= 1313 \text{ Toisen.} \end{aligned}$$

Mithin AB — Ao = 1437 — 1313 = 124 Tois.

Man würde also einen Fehler von 124 Toisen begehen.

Hieraus erhellet also, wie nöthig es sey, bey Bestimmung der Höhe eines Berges aus entlegenen Standpunkten, die Krümmung der Erde in Betrachtung zu ziehen.

VI. Wenn man sich durch C eine Tangente, oder Horizontallinie C ε vorstellet, die in die Verticallinie G B A bey ε einschneidet, so ist B ε der verticale Abstand dieser Horizontallinie, von der Erdfläche bey B, oder B ε drückt aus, um wie viel der, um den Bogen BC von C entfernte Punkt B, unter der Horizontallinie durch C liegt, und daher nennet man B ε auch das Gefälle von C bis B.

Die

Dieses Gefälle kömmt nun sowohl bey Messung sehr weit entlegener Gebürge, als auch beym Nivelliren vor, wo denn besonders im letzten Falle die Betrachtung dieses Gefälles von großer Wichtigkeit ist.

Man siehet übrigens gar leicht, daß dieses Gefälle mit in obiger Formel (II) für die Höhe des entfernten Gebürges enthalten ist.

Denn in dem rechtwinklichten Dreyecke $GC\varepsilon$ ist $G\varepsilon = r \sec\beta$, folglich $B\varepsilon = r \sec\beta - r$.

Nun war (II)

$$AB = (r + b + c) \sec\beta - r \text{ oder}$$
$$AB = r \sec\beta - r + (b + c) \sec\beta$$
also $$AB = B\varepsilon + (b + c) \sec\beta$$

woraus also erhellet, daß in der Bestimmung der Höhe AB, in der That das Gefälle $B\varepsilon$ mit enthalten ist.

VII. Um dieses Gefälle in jedem Falle sehr leicht berechnen zu können, so überlege man, das

auch $B\varepsilon = r(\sec\beta - 1) = r \cdot \left(\frac{1}{\cos\beta} - 1\right)$

$= r\left(\frac{1 - \cos\beta}{\cos\beta}\right)$ ist. Weil nun selten der Bogen CB auf der Erdfläche, viel über $\frac{1}{2}$ Grad betragen

tragen wird, mithin der Winkel β immer von geringer Größe ist, so kann man ohne merklichen Fehler $\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \beta^2$ (Trig. S. X.) setzen; dieß giebt also das Gefälle

$$B\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} r \, . \, \beta^2}{1 - \frac{1}{2} \beta^2}$$

oder ohne merklichen Irrthum

$$B\varepsilon = \tfrac{1}{2} r \, \beta^2$$

weil man das Glied $\frac{1}{2} \beta^2$ im Nenner des vorhergehenden Werthes, wegen seiner Unbeträchtlichkeit, in Vergleichung der 1, weglassen kann.

Bey dieser Formel $B\varepsilon = \frac{1}{2} r \, . \, \beta^2$ muß man nun überlegen, daß die Größe β eigentlich das Maaß des Winkels G in Decimaltheilen des Sinus totus, der $= 1$ gesetzt worden, ausdrücke. Ist also der Winkel β in Secunden gegeben, so muß man in unserer Formel statt β den Werth $\frac{\beta}{206264}$ setzen; dieß giebt daher das Gefälle

$$B\varepsilon = \tfrac{1}{2} r \, . \, \frac{\beta^2}{206264^2}.$$

Weil nun $r = 3272020$ Tois. $= 19632120$ pariser Fuß ist, so wird $\frac{1}{2} r \, . \, \frac{\beta^2}{206264^2} =$

$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{19632120}{206264^2} \cdot \beta^2$; berechnet man nun die Größe $\frac{1}{2} \cdot \frac{19632120}{206264^2}$ durch Logarithmen, so findet man dieselbe $= 0{,}0002307$, daher ist $B\varepsilon = 0{,}0002307 \cdot \beta^2$, welche Formel also das Gefälle in pariser Fußen giebt, wenn der Winkel β in Secunden ausgedrückt wird.

Will man $B\varepsilon$ durch Logarithmen berechnen, so ist

$$\log B\varepsilon = 2 \log \beta + 3{,}3630768 - 7.$$

Ex. Es sey $\beta = 1' = 60''$, so ist $B\varepsilon = 0{,}0002307 .. \cdot 60^2 = 0{,}83 ..$ par. Fuß.

VIII. Es kann aber auch geschehen, daß die Entfernung BC nicht in Secunden, sondern in Längenmaaße gegeben würde. In diesem Falle muß man erst berechnen, wie viel Secunden der Bogen CB hält; und diese Anzahl von Secunden alsdann statt β in obige Formel setzen.

Man kann aber noch kürzer auf folgende Art dazu gelangen. Gesetzt, der Bogen CB, dessen Gefälle man berechnen soll, halte a pariser Fuß.

Weil

Weil nun 1 Grad auf der Erde 57107,5 Toisen, oder 342645 par. Fuß hält, so kommen auf eine Minute $\frac{342645}{60}$ oder 5710,7 par. F. Auf eine Secunde 95,2 par. Fuß. Um also die Anzahl von Secunden = x zu finden, die auf a Fuß gehen, so schliesse man nach der Regel de Tri

$$95,2 : a = 1'' : x''; \text{ also } x'' = \frac{a}{95,2}$$

Secunden; diesen Werth setze man statt β in die obige Formel, so wird

$$B\varepsilon = \frac{0,0002307}{(95,2)^2} \cdot a^2$$

oder $B\varepsilon = 0,00000002546 \cdot a^2$.

Es wird auch

$$\log B\varepsilon = 2 \log a + 0,4060030 - 8.$$

IX. Diese beyden Formeln, die man also in jedem Falle gar leicht durch Hülfe der beständigen Logarithmen berechnen kann, werden nun zeigen, unter welchen Umständen, bey Ausmessung der Höhen, das Gefälle beträchtlich ist oder nicht. Vorzüglich sind diese Formeln in der Lehre vom Nivelliren brauchbar, welche im im folgenden Bande dieses Werkes vorkommen wird.

Man hat übrigens auch Tafeln berechnet, aus denen man das einem gewissen β oder a, zugehörige Gefälle sogleich herausnehmen kann. Eine solche Tafel für rheinl. Maaß, findet sich in Picards Abhandl. vom Wasserwägen, mit Lamberts Beyträgen ꝛc. Eine andere in franz. Maaß in Cassini's oberwähnten Buche. Da aber diese Tafeln nicht für jeden Werth von β oder a, das Gefälle enthalten, und man für solche β, oder a, die nicht in diesen Tafeln genau zu finden sind, auf eine etwas mühsame Art durch Proportionaltheile, das Gefälle suchen muß, so kann man sich statt dieser Tafeln weit bequemer der gegebenen Formeln bedienen, zumahl da die Rechnung durch Logarithmen so leicht geführet werden kann.

Anmerkung.

X. In (VIII) ist vorausgesetzt worden, daß an dem Orte, wo das Gefälle berechnet werden soll, der Grad auf der Erdfläche 57107,5 Toisen halte. Da nun aber nicht überall die Grade von gleicher Größe sind, so kann man eine allgemeinere Formel verlangen, welche

welche für jeden gegebenen Grad auf der Erde, gebraucht werden kann.

Man setze also, 1 Grad auf der Erde sey an dem Orte, wo man das Gefälle eines Bogens von a pariser Schuhen berechnen soll, = m pariser Schuhen, so ist der Umfang eines Kreises, zu welchem dieser Grad gehöret, = m . 360 pariser Schuhe, und der Halbmesser,

oder der Werh von r in (VII) = $\frac{m \,.\, 360}{2 \,.\, \pi}$,

wo π die bekannte Ludolphische Zahl bey der Kreisberechnung bedeutet.

Um nun den Bogen β, welcher den a pariser Schuhen zukömmt, in Secunden zu finden, so schließt man, weil $1^\circ = m$ pariser Schuhen, so ist $1'' = \frac{m}{3600}$ pariser Schuhen. Also

$$\frac{m}{3600} : a = 1'' : \beta''; \text{ demnach}$$

$$\beta = \frac{3600 \,.\, a}{m}$$

Also in (VII) das Gefälle

$$B\varepsilon = \frac{m \,.\, 360}{4 \,.\, \pi} \,.\, \left(\frac{3600 \,.\, a}{m \,.\, 206264}\right)^2$$

=

$$= \frac{90 \cdot 3600^2}{\pi \cdot 206264^2} \cdot \frac{a^2}{m}$$

wo der beständige Logarithme = 0,9408473 — 3 also

$$\log B\varepsilon = 2 \log a + 0{,}9408473 - (\log m + 3,$$

gefunden wird, und demnach für jedes gegebene m das Gefälle für a pariser Fuße, leicht berechnet werden kann.

XI. In den meisten Fällen wird es hinreichend seyn, das Gefälle bloß nach der Formel (VIII) zu berechnen: Denn die Grade auf der Erde sind doch so sehr verschieden nicht, daß daraus ein beträchtlicher Fehler in der Berechnung des Gefälles zu befürchten wäre, wobey man nur immer einerley Grad braucht.

XII. Ex. Gesetzt, für m = 57107,5 Toisen = 342645 pariser Schuhen, und a = 24000 pariser Schuhen, sollte das Gefälle berechnet werden, so ist

2 log a	= 8,7604224
best. Logar.	= 0,9408473
	9,7012697
log m + 3	= 8,5348444
log Bε	= 1,1664253

also das Gefälle $B\varepsilon$ = 14,669 paris. Schuh.

Nähme

Nähme man m aber z. E. 107,5 Toisen kleiner, so fände sich für dasselbe a das Gefälle Bε = 14,697, welches von obigem nur um 0,028 eines pariser Schuhes, also um eine für die Ausübung unbeträchtliche Größe verschieden ist.

Daß in den bisherigen Schlüssen die Erde für eine vollkommene Kugel genommen worden ist, und zwar jedesmal für eine Kugel von einem Halbmesser, den der angenommene Grad erforderte, verursacht keinen Fehler von Erheblichkeit.

XIII. Aus (X) findet sich umgekehrt, wenn man die beständige Größe, welche in $\frac{a^2}{m}$ multiplicirt ist, M nennet

$$a^2 = \frac{m}{M} \cdot B\varepsilon \text{ also}$$

$$\log a = \tfrac{1}{2} (\log B\varepsilon + \log m - \log M)$$

d. h. man kann den Bogen a oder BC Fig. LXI. in pariser Schuhen berechnen, welchen man bey ε in einer gegebenen Höhe Bε über der Erdfläche, übersehen kann. Denn wenn man sich bey ε befindet, und von ε eine Tangente εC an die Erdfläche zieht, so stellet diese Tangente den äussersten Lichtstrahl vor, welchen man

man von ε an der Erde vorbey ziehen kann, und der Berührungspunkt C ist also der entlegenste Ort, den man von der Höhe ε aus, sehen kann. Ist demnach diese Höhe Bε gegeben, so giebt die gefundene Formel, den Abstand dieses Orts C von der Höhe Bε, auf der man sich befindet, wobey denn Bε ebenfalls in pariser Schuhen ausgedrückt seyn muß.

Begreiflich wird hiebey vorausgesetzt, daß kein Gegenstand zwischen B und C die Aussicht verhindert.

Da sich der Lichtstrahl von C aus, nicht in einem leeren Raume, sondern in der Luft bewegt, in der er gebrochen wird, so ändert dieß den Abstand, den man, von ε aus, übersehen kann, um ein merkliches.

Correction der trigonometrisch gemessenen Höhen, wegen der Brechung der Lichtstrahlen.

§. 200. I. Es ist aus der Erfahrung bekannt, daß, wenn ein Lichtstrahl aus der Luft, in Wasser, Glaß, oder sonst in eine durchsichtige dichtere Materie, fährt, derselbe von seiner gewöhnlichen geraden Richtung, nach der er fortgehen würde, abgelenket wird, so bald er die Oberfläche des Wassers oder Glases

ses berührt. Die Erfahrungen, wodurch dieser Satz bestätigt wird, finden sich in allen dioptrischen Anfangsgründen (z. E. gleich im ersten Artikel der Kästn. Dioptrik, in dessen angewandter Math.)

Dieser Satz will so viel sagen, wenn AB Fig. LXII. z. E. die Oberfläche eines mit Wasser angefüllten Gefäßes, oder eines gläsernen Würfels ABEF vorstellet, so wird ein Lichtstrahl cd, der auf dieselbe bey d auffällt, nicht den geraden Weg cde, fortsetzen, sondern bey d, durch das Wasser oder Glaß, nach einer ganz andern Richtung df fortgehen, dergestalt, daß die neue Richtung df, mit der cde, einen gewissen Winkel edf macht.

Diese Aenderung in dem geraden Wege eines Lichtstrahles geschiehet allemahl, so oft derselbe aus einer dünnern durchsichtigen Materie in eine dichtere fährt; eben dieses würde auch einem Lichtstrahle begegnen, der z. E. aus einer dünnern Luft in eine dichtere führe.

II. Man setze durch d auf die brechende Fläche AB ein Perpendickel mn, so lehret ferner die Erfahrung, daß 1) der gebrochene Strahl df, das Perpendickel mn, und der einfallende Strahl cd, in einer einzigen Ebene liegen, 2) daß meistens, wenn der Lichtstrahl cd aus einer dünnern durchsichtigen

gen Materie in eine dichtere fährt, der gebrochene Strahl df mit dem Perpendickel mn einen kleinern Winkel fdn macht, als der einfallende Strahl cde, daß also der einfallende Strahl, gegen das Perpendickel zu, gebrochen oder gelenket werde, daß er aber 3) von dem Perpendickel weggebrochen werde, wenn er umgekehrt aus einem dichtern Mittel in ein dünneres fährt. 4) Daß der Sinus des Winkels mdc oder edn, welchen der einfallende Strahl, mit dem Perpendickel mn macht, gegen den Sin. des Winkels fdn, den der gebrochene Strahl df mit dem Perpendickel mn macht, ein bestimmtes Verhältniß habe, welches aber für die verschiedenen durchsichtigen Materien, durch welche sich ein Lichtstrahl cdf fortbewegt, bisher nur durch Erfahrungen hat gefunden werden können, und nicht bloß von den Dichtigkeiten der durchsichtigen Materien abhängt. Wenn z. E. der Lichtstrahl cd, aus Luft in Wasser fährt, so verhält sich ohne merklichen Fehler, der Sinus des Winkels mdc, zum Sinus des Winkels fdn = 4 : 3, aber wie 3 : 2, wenn der Strahl aus Luft in Glaß fährt.

Sind die Winkel mdc, fdn klein, so ist das Verhältniß der Sinusse ohne großen Fehler dem Verhältnisse der Winkel gleich, dann verhalten sich also die Winkel mdc, fdn, selbst, wie die Zahlen 4 : 3 oder 3 : 2.

III.

III. Der Winkel fdn heißt der gebrochene Winkel, und edn, oder mdc, der Neigungswinkel; der Unterschied dieser beyden Winkel, oder der edf, heißt der Refractionswinkel.

IV. Eine Folge aus dem bisherigen ist nun diese:

Wenn der Lichtstrahl cd von einem gewissen Objecte c herkäme, und sich bey f ein Auge innerhalb der dichtern Materie (II) befände, so würde dieses Auge das Object c nicht an seiner rechten Stelle c sehen, sondern weil es vom Objecte c, den Lichtstrahl nach der Richtung df bekömmt, so würde es das Object c, in der Verlängerung von fd zu sehen glauben, und es z. E. bey γ hinsetzen, so wie es hingegen, wenn die dichtere Masse ABEF nicht da wäre, das Object c nach der geraden Richtung fc sehen würde.

Eben dieser Umstand findet nun auch in unserer Atmosphäre statt. — Man stelle sich statt c die Spitze eines entlegenen Berges vor, das Auge f aber irgendwo im Thale. Weil nun auf den Bergen die Luft immer dünner ist, als im Thale, so erhellet, daß auch das Auge f, einen Lichtstrahl, der von der Spitze des Berges herabfährt, nicht unmittelbar nach einer geraden Richtung fc, sondern nach einer

ganz

ganz andern $fd\gamma$ bekommen muß, welche mit der wahren fc einen gewissen Winkel γfc machen wird; diese Ablenkung von dem wahren natürlichen Wege fc, rühret nun bloß daher, daß der Lichtstrahl aus einer dünnern Luft, in die untere dichtere Atmosphäre fällt, und daher eine gewisse Brechung leidet, welche von dem Verhältnisse der verschiedenen Dichtigkeiten der Luft bey c und f abhängt.

V. Man gedenke sich nun durchs Auge f eine Horizontallinie fo, so ist der Winkel, welchen cf mit fo macht, der wahre Elevationswinkel der Bergspitze am Auge des Beobachters f, über der durch f gehenden Horizontallinie.

VI. Weil aber der Beobachter f, das Object c nicht in der wahren Richtung cf, sondern nach einer ganz andern γf stehet, so wird derselbe bey Messung des Elevationswinkels, eigentlich nicht den wahren cfo, sondern den scheinbaren Elevationswinkel γfo erhalten, mithin wenn er in der trigonometrischen Berechnung der Höhe co den scheinbaren Elevationswinkel γfo statt des wahren cfo braucht, so wird nicht die wahre Höhe des Berges co, sondern die scheinbare γo herauskommen; man wird also einen Fehler $= \gamma c$ begehen, der desto beträchtlicher seyn wird, je mehr der scheinbare Winkel $\gamma f o$, von dem wahren $c f o$ unterschieden ist.

Dieß zeigt, daß, wenn man in Messung der Höhen entlegener Objecte, keinen Fehler begehen will, man vorher den scheinbaren gemessenen Elevationswinkel, in den wahren verwandeln müsse, welches geschehen würde, wenn man von dem Winkel $\gamma f o$, den $\gamma f c$, welchen man die Refraction nennet, abzöge.

Allein wie findet man in jedem Falle die Größe dieser Refraction $\gamma f c$, mithin die nöthige Correction des beobachteten Elevationswinkels? Ich werde sogleich zeigen, wie man sie jedesmahl bestimmet. — Ich muß aber vorher noch folgende Erläuterungen vorausschicken.

VII. Eigentlich ist der Weg eines Lichtstrahls durch unsere Luft, eine krumme Linie; denn weil die Dichtigkeit der Luft von oben herab beständig größer wird, so ist klar, daß ein Lichtstrahl, der von der Spitze eines entlegenen Berges herabfährt, immer in dichtere und dichtere Luftschichten kömmt, mithin immer mehr und mehr von seinem Wege abgelenkt wird, und also eine gewisse zusammenhängende krumme Linie bildet. Den ausgeführtern Beweiß hievon lese man in Kästners Astron. §. 136. in dessen angew. Math.

Die

Die wahre Gestalt dieser krummen Linie ausfindig zu machen, haben sich von jeher die Naturforscher beschäftigt; sie hängt offenbar mit von dem Gesetze ab, nach welchem sich die Dichtigkeit der Luft von der Erdfläche bis auf eine gewisse Höhe verändert. — Da aber dieses Gesetz noch nicht vollkommen bekannt ist, so weiß man auch noch nicht völlig genau die wahre Gestalt dieser krummen Linie.

VIII. Indessen läßt sich darthun, daß 1) diese krumme Linie in einer Verticalebene liegt, die durchs Auge des Beobachters, und durchs Object gehet, 2) daß sie gegen die Erdfläche zu, hohl ist, und 3) daß sie wenigstens nicht sehr merklich, von einem Kreisbogen abweicht, dessen Halbmesser ohngefähr 7 bis 8 mahl größer ist, als der Halbmesser der Erde. Den Beweiß hievon findet man in Lamberts Eigenschaften der Bahn des Lichts (Berl. 1772.) im III. Abschnitt.

Es sey also Fig. LXIII. fn ein Stück eines größten Kreises auf der Erdfläche, C der Mittelpunkt desselben; also fC der Halbmesser der Erde.

Bey f ein Beobachter auf der Oberfläche der Erde; c ein Object, um die Höhe cn über der Erdfläche erhaben.

Man beschreibe nun in der Ebene fCc mit einem Halbmesser fL, der ohngefähr 7 bis 8 mahl größer ist als fC, einen Kreisbogen fec, durch die beyden Punkte f, c, so daß dieser Kreisbogen gegen die Erdfläche fn hohl ist, so wird fec die Bahn oder krumme Linie seyn, in der sich das Licht von c bis f bewegt.

Man stelle sich bey f ein paar Tangenten fm, fγ vor; fm für den Kreisbogen fn, und fγ für den Kreisbogen fec; so ist fm die Horizontallinie des Orts f.

Die Tangente fγ wird aber die Richtung vorstellen, welche ein unendlich kleines Stückgen fi des Bogens fec, bey f hat; da also der Lichtstrahl ceif bey f, unter der Richtung if das Auge rühret, so erhellet, daß, weil fγ die Verlängerung von fi ist, ein Auge bey f, das Object c, nicht an seinem wahren Orte, sondern in der Richtung der Tangente fiγ, sehen wird;

Da also fγ die scheinbare Richtung, nach der das Object gesehen wird, und fc die wahre Richtung ist, so ist, eben so wie vorhin, cfm der wahre Elevationswinkel, γfm aber der scheinbare, der also um die Refraction γfc größer ist, als der wahre.

Man

Man siehet also, daß wegen der krummen Linie, in der sich das Licht durch die Luft bewegt, das Object c immer höher zu liegen scheinen muß, als es in der That liegt, daß man also in (§. 199.) statt der wahren Höhe nc, die scheinbare nγ bekommen würde, wenn man nicht den gemessenen Elevationswinkel mfγ durch die Refraction cfγ verbesserte.

IX. Um nun die Refraction in jedem Falle zu erhalten, dienet folgendes.

Weil der Winkel fCn immer nur sehr klein ist, und z. E. wenn n von f auch 7 bis 10 Meilen entfernt wäre, der Bogen fn oder der Winkel C kaum 40 bis 50 Minuten beträgt, so kann man, wie eine kleine Ueberlegung zeigen wird, ohne merklichen Irrthum die Weite fc der beyden Objecte f, c, der Länge des Bogens fn gleich setzen.

Aber fc ist die Chorde des Bogens fec, und da ebenfalls der Bogen fec nur eine geringe Anzahl von Minuten halten wird, so wird auch ohne merklichen Fehler, die Länge des Bogens fec der Chorde fc gleich seyn. Folglich wird auch ohne beträchtlichen Irrthum der Bogen fec mit dem Bogen fn gleiche Länge haben.

Nun ist aber aus der Geometrie bekannt, daß, wenn zwey Kreisbogen, die mit verschiedenen Halbmessern beschrieben worden, gleiche Länge haben, sich z. B. die Mengen von Minuten, die auf jeden Bogen gehen, umgekehrt, wie der beyden Bogen Halbmesser verhalten.

Man nenne also die Menge von Minuten oder Secunden, die der Bogen fn, oder der Winkel C hält $= \beta$, die auf den Bogen fec gehen $= \alpha$, den Halbmesser fC $=$ r und den Halbmesser fL des Bogens fec $=$ R, so ist

$$\alpha : \beta = r : R$$

aber $r : R = 1 : 8$ folglich auch

$$\alpha : \beta = 1 : 8$$

oder $\alpha = \frac{1}{8} \beta$,

d. h. der Bogen, der den Weg des Lichtes zwischen zweyen Objecten f, c, vorstellet, oder auch der diesem Bogen, an seinem Mittelpunkte zugehörige Winkel L, enthält nur den 8ten Theil der Anzahl von Minuten ꝛc., welche auf den Winkel C, oder den Bogen fn gehen, der zwischen der Höhe cn, und dem Orte des Beobachters f, auf der Erdfläche enthalten ist.

Dieser merkwürdige Satz dienet nun, die Refraction γfc auf folgende Art zu finden.

Weil fγ eine Tangente des Bogens fec, fc aber eine Chorde desselben ist, so hat der Winkel γfc zu seinem Maaße den halben Bogen fec, wie gleichfalls aus der Geometrie bekannt

kannt ist. Da nun $fec = \alpha = \frac{1}{8}\beta$ ist, so wird seyn der Winkel $\gamma fc = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\beta = \frac{1}{16}\beta$.

Die Refraction beträgt also den 16ten Theil des Winkels fCn, dessen Maaß der Bogen β oder fn ist.

X. Auf diese Art kann man also in jedem Falle sehr leicht die Größe der Refraction finden, wenn man weiß, wie viel Minuten oder Secunden auf den Bogen fn gehen, der zwischen dem Beobachter f, und der auszumessenden Höhe cn enthalten ist.

Gesetzt, der Bogen fn sey 30 Minuten, so ist die Refraction $\gamma fc = \frac{30}{16}$ Minuten $= 1'. 52''$, wäre also der scheinbare gemessene Elevationswinkel $mf\gamma = 1^\circ\ 15'$, so wäre der wahre Elevationswinkel $cfm = 1^\circ\ 15' - 1' 52'' = 1^\circ. 13', 8''$.

XI. Die Anzahl von Minuten und Secunden, die aber in einem gegebenen Falle auf den Bogen fn gehen, kann man finden, wenn der Bogen fn in Längenmaaße bekannt ist; da nun die Länge dieses Bogens ohne merklichen Fehler der Weite fc gleich ist, so ergiebt sich auch die Refraction, wenn man weiß, wie weit das Object c von dem Orte f wegliegt. Man sehe fc als einen Bogen auf der Erdfläche an, verwandle ihn in Minuten und Secunden, und nehme

den

den 16ten Theil davon, so hat man die Refraction.

Man setze also die Weite fc, die aus der trigonometrischen Messung bekannt ist = a, so ist auch fn = a, und daher in Secunden der

Winkel C = $\frac{a}{r}$. 206264, wo r den Halbmesser der Erde bedeutet. Setzet man also r = 3272020 Toisen, so ist die Refraction

$$= \frac{1}{16} C = \frac{a \cdot 206264}{16 \cdot 3272020} = 0{,}003938 \cdot a$$

Secunden, in welcher Formel a in Toisen gegeben seyn muß.

XII. Man siehet leicht, daß, wenn die auszumessende Höhe cn, von dem Standpunkte f nicht gar weit wegliegt, ohne merklichen Irrthum die Refraction für Null angesehen werden kann. Gesetzt der Bogen fn betrüge z. B. nur 1 Minute oder im Längenmaaße 5710 pariser Fuß, so wäre die Refraction nur $\frac{1}{16}$ einer Minute oder etwa 3 Secunden. Man könnte sie daher ohne beträchtlichen Irrthum weglassen; allein bey Messung der Höhen, aus sehr weit entfernten Standpunkten, darf man die Refraction nie aus der Acht lassen.

XIII. Die beygebrachte Regel, daß die Refraction den 16ten Theil des Winkels fCn betrage, ist eigentlich auf die Voraussetzung gegründet, daß des Kreisbogens fec Halbmesser 8 mahl größer ist, als des Kreisbogens fn Halbmesser. Weil aber die krumme Linie des Lichtstrahls von dem Zustande der Luft abhängt, mithin der Kreisbogen fec bald flächer bald erhabener seyn muß, je nachdem der Zustand der Luft durch Wärme oder Dünste u. d. gl. verändert wird, so erhellet, daß auch des Kreisbogens fec Halbmesser nicht immer vollkommen einerley Größe haben wird. Dieß zeigt also, daß auch die Refraction nicht beständig $\frac{1}{16}$ des Winkels C, sondern bald etwas größer, bald etwas kleiner seyn werde. Indessen wird aber doch die Refraction nie viel von $\frac{1}{16}$. C abweichen: wenn sich auch der Zustand der Luft sehr merklich verändert.

Da der Zustand der Luft, von der Veränderung ihrer Dichtigkeit abhängt, und diese durch den Stand des Barometers und Thermometers bestimmt wird, so erhellet, daß die Refraction von dem Stande des Barometers und Thermometers bey f abhängen muß. Wenn ich überhaupt setze, daß die Refraction $\frac{1}{m}$ des Winkels C betrage, so habe ich nach einer von der Wahrheit nicht sehr entfernten Hypothese gefun-

gefunden, daß, wenn in der untersten Station f das Barometer auf 28 Zoll stehet, die Werthe des Buchs $\frac{1}{m}$ für verschiedene Grade des Reaumürschen Thermometers folgende sind

Stand d. Therm.	der Werth von $\frac{1}{m}$
$-10°$	$\frac{1}{15,6} = 0,06410$
0	$\frac{1}{16,4} = 0,06097$
$+10$	$\frac{1}{17,2} = 0,05814$
$+20$	$\frac{1}{18,0} = 0,05555$

Jeder Werth dieser Tafel muß aber nun noch in dem Verhältnisse größer oder kleiner genommen werden, in welchem die Barometerhöhe bey f, größer oder kleiner ist als 28 Zoll.

Ex. Was für ein Theil des Winkels C wird die Refraction seyn, wenn beym Standpunkte f, das Thermometer 10 Grade über dem Gefrierpunkt, das Barometer aber auf 27,5 Zoll stände?

Weil für + 10° des Therm. der Werth von $\frac{1}{m} = \frac{1}{17,2} = 0,05814$ ist, so schließe man

$$28 : 27,5 = 0,05814 : x$$

so wird $x = 0,05710$, also wird bey einem solchen Zustande der Luft, die Refraction = 0,05710 des Winkels C seyn.

XIV. Eigentlich hängt die Refraction auch etwas von dem Elevationswinkel $\gamma f m$ ab, allein der Einfluß dieses Winkels auf die Refraction, ist fast in allen Fällen so unbeträchtlich daß man ihn völlig ausser Acht lassen kann.

XV. Ausser der in VIII erwähnten Schrift, können zum weitern Nachlesen noch folgende Schriften dienen.

Memoires de l' Ac. de Paris. 1749. p. 101.

Meines Vaters Tob. Mayeri *Programma de refractionibus objectorum terrestrium.* Goett. 1751.

XVI. Kann man auf der Spitze c eines entfernten Berges, zu eben der Zeit als ein Beobachter an dem Standpunkte f den scheinbaren Elevationswinkel $\gamma f m$ der Bergspitze c beobachtet, den scheinbaren Depressionswinkel des Stationspunktes f d. h.

den

den Winkel um welchem f unterhalb der Horizontallinie von c erscheinet, messen lassen, so kann man die Höhe cn finden, wenn ausser jenen zwey Winkeln nur bloß auch noch die Dichtigkeiten der Luft in c und f bekannt sind, welche denn aus den Barometerständen, und Temperaturen an diesen Standpunkten c und f berechnet werden können. Von dieser nützlichen Aufgabe, sehe man das weitere in meiner bey der hiesigen Soc. der Wiss. gehaltenen Vorlesung de apparentiis objectorum terrestrium (in den Comment. Soc. R. sc. recent. ad ann. 1808 — 11.) §. 21 : 13.
