XV. Kapitel.

Von Ausmessung zugänglicher und unzugänglicher Linien auf dem Felde.

§. 177.

Die Ausmessung gerader Linien, die ich im ersten Theile gezeigt habe, beziehet sich nur auf solche Entfernungen, an die sich ohne beträchtliche Hindernisse, der Maaßstab anlegen läßt.

Es kann aber sehr oft vorkommen, daß entweder die auszumessenden Linien zu lang sind, folglich die Messung zu weitläuftig würde, oder daß sich Hindernisse vorfinden, die keine unmittelbare Anlegung des Maaßstabes zulassen. — In diesem Falle verschafft uns die Geometrie gute Hülfsmittel, auch ohne würkliche Anlegung des Maaßstabes, dergleichen Linien zu messen.

Hierzu dienet nun besonders die Lehre von der Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyecke, die ich bey meinen Lesern voraussetze. — Da es nun gut ist, daß Anfänger sich vorher in Messung der Weiten üben, ehe sie zu zusammengemengesetztern Operationen fortgehen, so werde ich in diesem Kapitel unterschiedene Methoden beybringen, wie dergleichen einfache Operationen vorzunehmen sind.

Es ist klar, daß ich hier nur die wichtigsten, und in der Ausübung besonders oft vorkommenden Fälle erklären kann. — Es würde zu weitläuftig seyn, alle Fälle, die sich auf dem Felde gedenken lassen, abzuhandeln. Indessen wird man sich leicht bey allen Schwierigkeiten zu helfen wissen, wenn man sich die Vorschriften des gegenwärtigen Kapitels wohl bekannt gemacht hat.

Es bedarf wohl keines Beweises, daß eine und dieselbe Aufgabe sehr viele Auflösungen zuläßt. Es wird aber nach Verhältniß der Umstände bald diese bald jene Auflösung vorzüglich bequem seyn. So ist es in manchen Fällen vortheilhaft, sich bloß der Meßkette zu bedienen; in andern Fällen ist die Auflösung vermittelst des Meßtisches, des Astrolabii, der Boussole u. s. w. vorzuziehen; Die mit einer Aufgabe verbundenen Nebenumstände müssen entscheiden, welche Auflösung in jedem Falle zu wählen ist.

Die Hauptsache bey Messung der Weiten auf dem Felde, kömmt darauf an, daß man sich ein Dreyeck, oder eine andere Figur gedenkt,

denkt, von der die zu messende Entfernung ein Stück ist, daß man nun an diesem Dreyecke oder dieser Figur so viel Dinge misset, als man nöthig hat, um daraus die unbekannte Größe, entweder durch Konstruction, oder Rechnung ableiten zu können.

Da man nun oft keine andern Werkzeuge, als Maaßstäbe, oder eine Meßkette bey der Hand hat, so will ich vors erste zeigen, wie allerley unzugängliche Weiten, bloß durch Hülfe dieser beyden Werkzeuge, bestimmt werden können. Obgleich diese Aufgaben in den meisten Anleitungen zur Feldmeßkunst vorkommen, so habe ich doch nicht für undienlich erachtet, auch hier das vornehmste davon beyzubringen, weil sie zugleich die Gründe von andern geometrischen Aufgaben enthalten.

Ich setze bey den folgenden Aufgaben voraus, daß man in der unmittelbaren Messung der Linien, nach Anleitung des IIIten Kapitels, schon hinlänglich geübt sey.

Von Messung unzugänglicher Weiten, bloß durch Ketten und Maaßstäbe.

Aufgabe.

§. 178. A, B, Fig. XXVII. sind zwey Objecte, die sich in einer Horizontal-

tal-

talebene befinden, man soll ihren Abstand AB finden, der sich wegen eines dazwischen liegenden Hindernisses F nicht unmittelbar messen läßt: vorausgesetzt, daß von einem dritten willkührlich angenommenen Punkte C ein freyer Zugang nach A, B, verstattet ist.

Aufl. Man setze in C einen Stab lothrecht ein, und messe die Weiten AC, BC, mit den Maaßstäben, oder der Meßkette; die gemessenen Weiten AC, BC, trage man in den Verlängerungen von AC, BC, rückwärts von C nach a, und von C nach b, dergestalt, daß Ca = CA und Cb = CB werde; messe dann die Entfernung ba, so wird dieselbe = AB seyn.

Der Beweis ist aus der Gleichheit der Dreyecke ABC, bCa, klar.

Zus. I. Dieses Verfahren setzt zum voraus, daß sich die Weiten AC, BC, ungehindert auf einer horizontalen Ebene rückwärts tragen lassen. Dieses verstattet aber oft der Raum nicht, besonders wenn AC, BC, beträchtlich groß sind. In solchem Falle trage man nur die Hälfte, den dritten, vierten 2c. Theil der Weiten AC, BC rückwärts, von C nach α, und von C nach β: alsdenn aber wird die

Wei-

Weite $\alpha\beta$ auch nur die Hälfte, der dritte oder vierte ꝛc. Theil, der unbekannten Weite AB seyn. Denn wenn z. E. $C\alpha = \frac{1}{3} CA$, und $C\beta = \frac{1}{3} CB$ genommen worden wäre, so ist $C\alpha : C\beta = CA : CB$, da nun auch der Winkel $\beta C\alpha = ACB$, so ist das Dreyeck $C\beta\alpha$ dem ACB ähnlich, mithin auch $AC : C\alpha = AB : \alpha\beta$, folglich weil $C\alpha = \frac{1}{3} AC$, auch $\alpha\beta = \frac{1}{3} BA$.

Zus. II. Lassen sich die den Weiten CA, CB, proportionale Stücken $C\alpha$, $C\beta$, nicht rückwärts tragen, so trage man sie in den geraden Richtungen CA, CB, vorwärts von C nach m, von C nach n, so wird auf eben die Art auch mn der AB proportional seyn.

Zus. III. Bey diesem Verfahren (Zus. I. II.) muß man sich aber alle Mühe geben, mn oder $\beta\alpha$ sehr genau zu messen; denn ein kleiner Fehler auf mn oder $\beta\alpha$, vervielfältigt sich, wenn man AB daraus finden will.

Gesetzt, man habe $Cm = \frac{1}{8} CA$; $Cn = \frac{1}{8} CB$ genommen, so ist auch $mn = \frac{1}{8} AB$; wäre daher z. E. mn = 4 Ruthen gefunden worden, so wäre AB = 8 . 4 R. = 32 R. Hätte man aber mn um 1 Zoll fehlerhaft gemessen, so betrüge dieses auf AB schon einen 8 mahl größern Fehler.

Zus. IV. Oft kann man sich bey Auflösung der bisherigen Aufgabe auch folgenden Hülfsmittels bedienen, wo z. E. Fig. XXVIII. AB wegen eines dazwischen liegenden Flusses nicht gemessen werden könnte, bey M sich aber eine Brücke befände; da hier das Rückwärtstragen nicht statt findet, so nehme man in der Verlängerung von AB, ein paar willkührliche Stücken Aa; Bb; An a, b, setze man ein paar Perpendiculärlinien (§. 58.) am, bn, so lang, daß man über die Brücke M, von m nach n messen kann. Um nun aus den gemessenen Stücken am, bn, mn, die Weite AB zu finden, so gedenke man sich durch n mit AB oder ab eine parallele pn, so ist $pn = ab$, und das Dreyeck nmp rechtwinklicht, wo $pm = am - bn$, folglich $pn = \sqrt{(mn^2 - (am - bn)^2)} = ab$, mithin auch $AB = ab - Aa - Bb$ gefunden werden kann.

Dieses Verfahren kann in ähnlichen Fällen oft mit Nutzen gebraucht werden.

Aufgabe.

§. 179. Die Weite AB, Fig. XXIX. die sich nicht unmittelbar messen läßt, zu finden, wenn man von dem willkührlichen Standpunkt D, nur nach B, aber nicht nach A hinkommen kann.

Aufl.

Aufl. Man verlängere AB, und nehme auf deren Verlängerung eine Länge BC, von willkührlicher Größe, von D messe man die Weiten BD, DC, und trage sie in geraden Linien rückwärts; BD von D bis b, und DC von D bis c, setze bey b, c, Stäbe ein, und gehe mit einem andern Stabe in der geraden Richtung cb, bis d fort, so daß der Stab d zugleich mit D, A, in gerader Linie stehen würde. Hierauf messe man bd, so wird bd = AB seyn. Gleichfalls wegen Gleichheit der Dreyecke ABD, bDd; die sich gar leicht erweisen läßt.

Zus. I. Es erhellet, daß man, wie in vorhergehender Aufgabe, gleichfalls nur nöthig hat, proportionale Stücken rückwärts zu tragen.

Zus. II. Auch hätte man, wenn man Dd mässe, des Standpunktes D Weite von A, weil Dd = DA.

Zus. III. Eine andere Auflösung der vorgelegten Aufgabe zeigt sich Fig. XXX, wo vorausgesetzt wird, daß man vermittelst einer Meßschnur, oder einer Kette, im Stande ist, einen Winkel an einen andern Punkt zu tragen.

Man messe erstlich die Weite BD bis an den angenommenen Standpuukt, und trage sie rückwärts von D nach b, so daß bDB eine gerade

gerade Linie sey. Bey α stecke man einen Stab in die gerade Linie BA, und bey δ einen in die gerade Richtung BD, und messe nun in dem kleinen Dreyecke $\alpha B \delta$, die drey Seiten $B\alpha$, $B\delta$, $\alpha\delta$.

Dieses Dreyeck trage man nun an den Punkt b, so, daß der Winkel B an b komme. Man nehme also auf der geraden Richtung bD, die Linie $ba = B\delta$. Fasse nun auf einer Meßschnur oder Kette, eine Länge so groß, als die Summe der beyden Linien $B\alpha$, $\alpha\delta$; befestige die beyden Enden dieser Schnurlänge, bey a, b, und spanne sie nach den Richtungen bd, ad so aus, daß $bd = B\alpha$ und $ad = \alpha\delta$ werde, so erhält man bey b einen Winkel = B. Man stecke nun bey C einen Stab ein, welcher sowohl mit b und d, als auch mit A und D in gerader Linie stehe, so wird die Weite bC, die man hierauf messen kann = AB seyn, wie gleichfalls aus der Gleichheit der beyden Dreyecke bDC, ADB erhellet.

Es wird bey diesem Verfahren gut seyn, die Längen $B\alpha$, $B\delta$ nicht gar zu klein, sondern z. E. einige Ruthen lang zu nehmen.

Noch besser und bequemer ist es, $B\alpha = B\delta$ zu nehmen, damit das Dreyeck $\alpha B\delta$ gleichschenklicht werde.

Zus.

Zus. IV. Aus den gemessenen Seiten des kleinen gleichschenklichten Dreyecks B$\alpha\delta$, läßt sich der Winkel B durch trigonometrische Rechnung finden. Wenn man nun auf eben die Art auch bey D, nach den Richtungen DB, DA, die Längen De = Dε willkührlich annähme, und dann eε mäße, so liesse sich aus den Größen De, Dε, eε, auch der Winkel D berechnen. Aus den beyden solchergestalt gefundenen Winkeln B, D, und aus der gemessenen Seite BD, findet sich alsdann die unbekannte Weite AB durch trigonometrische Rechnung. Dieses Verfahren zeigt also, wie bloß durch Hülfe der Meßkette, und der damit verbundenen Rechnung, die Weite AB gefunden werden könnte, ohne daß man nöthig hat, auf dem Felde selbst die Seite BD rückwärts, und den Winkel B an b zu tragen.

Nimmt man die Längen Bα, Bδ, Dε, De, durchaus von gleicher Größe, und z. E. 5 Ruthen lang, so sind für den Halbmesser 5°, die Linien $\alpha\delta$, εe, Sehnen der gesuchten Winkel B, D. Wenn man nun ein für allemahl für den Halbmesser von 5°, oder 5000 Lin. die Sehnen berechnet, und eine Tafel davon verfertigt hat, so findet man aus derselben, sogleich ohne weitere Rechnung die den Sehnen $\alpha\delta$, εe, zugehörigen Winkel. Man vergleiche hiemit §. 138. III. Diese Messungsart, indem man die Winkel durch Hülfe einer

Kette

Kette oder Schnur, und einer Chordentafel bestimmt, ist von vielen Feldmessern empfohlen worden, und die Anwendung davon auf sehr viele Fälle hat Hr. Jetze (gemeinnützige Praxis auf dem Felde und Papier ꝛc.) umständlich auseinander gesetzt.

Aufgabe.

§. 180. Eine Weite AB Fig. XXXI. zu messen, zu deren keinem Endpunkte A oder B man bequem hinkommen kann.

I. Aufl. Man setze bey C einen Stab ein, in gerader Linie mit A und B. An C mache man einen rechten Winkel BCD §. 58., und nehme CD von beliebiger Länge. Aus dem Standpunkte D trage man auf CD von D nach c eine andere willkührliche Länge, z. E. einige Ruthen, und setze an c abermahls einen rechten Winkel, damit die Richtung cE mit CA parallel werde. In cE setze man bey b und a, ein paar Stäbe in die Linien DA, DB ein, so ist, weil abc mit ABC parallel läuft

$$AB : ab = BD : bD = CD : cD; \text{ also}$$

$$AB = \frac{ab \,.\, CD}{cD}$$

Misset

Misset man also ausser den willkührlich angenommenen Längen CD, cD, auch noch die ab, so findet sich daraus die unbekannte Entfernung AB.

C, c brauchen nicht rechte Winkel zu seyn, wenn sie nur sonst von gleicher Größe sind. — Die Hauptsache kömmt nur darauf an, daß die Richtung cE, der CA parallel werde.

Hat man in der Richtung CA, ein sehr weit entlegenes Object, so läßt sich die Richtung cE, auf eine sehr leichte Art nach §. 60., der CA parallel machen.

II. Aufl. Ein anderes Verfahren, die unzugängliche Weite AB zu finden, zeigt sich Fig. XXXII.

Man nehme bey D einen willkührlichen Standpunkt an, und setze dann bey F einen Stab mit D und A, und bey E einen Stab mit D und B in gerader Linie.

Setze demnächst bey G einen Stab mit B und F in gerader Linie, und alsdann in die gerade Richtung GD, bey H einen Stab, zugleich mit E und A in gerader Linie, so ergiebt sich durch diese Verzeichnung auf dem Felde ein Viereck HGEF; darinnen kann man messen EH, HD, DG, GF, FE, ED, DF.

Um nun die unbekannte Weite AB zu finden, so verzeichne man auf dem Papiere, nach dem verjüngten Maaßstabe eine kleinere Figur ehdgfe, welche der EHDGFE auf dem Felde ähnlich ist, dergestalt, daß die kleinen Dreyecke ehd, edf, fdg, in eben der Ordnung und Verhältniß auf dem Papiere, wie die auf dem Felde, gegen einander liegen.

Man verlängere hierauf die Seiten eh, fd und ed, fg, bis erstere sich in a, und leztere in b durchschneiden, messe nach dem verjüngten Maaßstabe, womit das kleine Viereck aufgetragen worden, die Weite ab; so viel Ruthen, Fuße 2c. man für dieselbe findet, eben so viel Ruthen, Fuße 2c. wird die Weite AB würklich halten, wenn man sie mit der Meßkette messen könnte.

Bew. Weil die kleinen Dreyecke hde, edf, fdg, denen HED, EDF, FDG ähnlich gemacht worden, so sind die Winkel hed $=$ HED; def $=$ DEF, also hed $+$ def $=$ HED $+$ DEF, oder der Winkel hef $=$ HEF; nun ist auch efd $=$ EFD, folglich in den Dreyecken AEF, aef, die Winkel an den Grundlinien EF, ef einander gleich, nemlich AEF $=$ aef; EFA $=$ efa; daher die beyden Dreyecke AEF, aef einander ähnlich; auf gleiche Weise sind auch die Dreyecke BEF, bef,

bef, ähnlich. Dieß giebt also folgende Proportionen:

$$AE : EF = ae : ef$$
$$EF : EB = ef : eb$$
$$\text{Also } AE : EB = ae : eb$$
$$\text{Aber auch } AEB = aeb$$
$$\text{Daher Dr. } AEB \backsim \text{Dr. } aeb$$
$$\text{Mithin } AE : AB = ae : ab$$
$$\text{Aber auch } EF : AE = ef : ae$$
$$\text{folglich } EF : AB = ef : ab$$
$$\text{oder } EF : ef = AB : ab.$$

D. h. weil nach dem verjüngten Maaße ef so viel Ruthen, Fuße ꝛc. hält, als EF auf dem Felde nach der Meßkette, so wird auch ab nach dem verjüngten Maaße so groß seyn, als AB nach der Meßkette.

Uebrigens ist es bey diesem Verfahren vortheilhaft, die Standlinie EF auf dem Felde nicht zu kurz anzunehmen.

III. Aufl. Ein anderes Verfahren, die unzugängliche Weite AB Fig. XXXIII. zu finden, ist folgendes. Man wähle bey C einen willkührlichen Standpunkt, und setze in mäßiger Entfernung von C, bey E, D, ein paar Stäbe in die geraden Richtungen CB, CA; in den Verlängerungen von CE, CD, DE, nehme man EG = CE, HD = CD, EF und DI = DE. Setze bey G, F, H, I, Stäbe ein.

Hierauf bringe man bey L einen Stab hin, so, daß er sich sowohl mit G, F, als auch mit A, E, in geraden Richtungen befindet, so wird GL = CA seyn, wie sich leicht erweisen läßt. Auf eben die Art setze man bey K einen Stab, gemeinschaftlich in die geraden Richtungen HIK, BDK, so wird auch HK = BC seyn. Man messe also die beyden Längen HK, GL, und trage erstere in die Verlängerung von BC, von C nach b, die andere GL, in die Verlängerung der AC, von C nach a, so wird die Weite ab, die man nun messen kann, der AB gleich seyn.

Dieses Verfahren gehet auf dem Felde, wenn man nur Platz zum Rückwärtstragen hat, gleichfalls sehr bequem von statten, und ist weit leichter, als das ähnliche Pentherische (S. dess. pract. Geometrie §. 383.) und weniger zusammengesetzt, als dasjenige, welches Hr. Jetze (Gemein. Praxis auf dem Felde rc. p. 33.) vorträgt.

IV. Auflös. Gebrauch entfernter Objecte.

Wenn man auf dem Felde eine freye Aussicht nach sehr weit entlegenen Gegenständen haben kann, so kann man sich derselben mit Vortheil auf folgende Art zu Ausmessung unbekannter Entfernungen bedienen.

Es

Es sey Fig. XXXIV. AB die auszumessende Weite.

Man nehme eine willkührliche Standlinie CD an; und visire bey C, auf welchen Gegenstand I des entlegenen Horizontes die Richtung CA hintrifft. Dc sey nun ein beliebiger Theil der Standlinie DC. Man begebe sich nach c, und lasse bey i einen Stab in die Richtung cI nach dem entlegenen Objecte, einsetzen. Auf gleiche Weise treffe die Richtung CB auf das Object K am entlegenen Horizonte, und man lasse auch bey k einen Stab in die Richtung cK einsetzen. Hierauf gehe man mit zwey Stäben in der Richtung ci, vorwärts, (welches geschiehet, wenn man mit den Stäben c, i, immer in gerader Linie bleibt) und setze bey a einen Stab so ein, daß ein Gehülfe bey D, ihn zugleich in der geraden Linie DA siehet. Auf gleiche Weise gehe man auch mit dem andern Stabe in der Richtung ck vorwärts bis nach b, wo der Gehülfe bey D ihn in der geraden Linie DB siehet; solchergestalt stehet also a in dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der beyden Linien cI, DA, und b in dem Durchschnitte der beyden Richtungen cK, DB. Man messe hierauf die Weite ab, so wird dieselbe ein solcher Theil von AB seyn, als cD von der Standlinie CD ist.

Denn

Denn weil die Objecte I, K sehr weit entlegen sind, so kann man ohne großen Fehler die Stücken ca, CA und cb, CB, als parallel ansehen §. 60., mithin die Winkel ACD = acD; CDB = cDb, BCD = bcD, folglich die Dreyecke ACD dem acD, und BCD dem bcD ähnlich setzen. Daher hat man

$$\begin{array}{l} DA : Da = DC : Dc \\ BD : bD = DC : Dc \\ \hline \end{array}$$

also $DA : Da = BD : bD$,

folglich wegen des gemeinschaftlichen Winkels ADB das Dr. ABD ∽ abD, mithin

$$AB : ab = BD : bD = DC : Dc,$$

folglich ist ab ein solches Stück von AB, als cD von CD ist.

Es verstehet sich, daß diese Methode desto weniger fehlerhaft ist, je weiter die Gegenstände I, K am Horizonte hinaus liegen.

Diesen Gebrauch entfernter Gegenstände zu Messung der Weiten lehrt unter andern Lambert in seinen Beyträgen zur practischen Geom. §. 177 ff. Es ist kein Zweifel, daß man sich dieses Verfahrens in Fällen, wo die zu bestimmende Weite AB nicht gar zu groß ist, oder von der Standlinie zu weit wegliegt, mit Nutzen wird bedienen können.

Anmerkung.

§. 181. Das bisherige mag zureichen, Anfängern Gelegenheit zu geben, sich in Messung gerader Linien auf diese Art zu üben. Man wird indessen bald wahrnehmen, daß, wenn die auszumessenden Weiten entweder zu groß sind, oder von der Standlinie, oder den Standpunkten zu weit wegliegen, die gegebenen Auflösungen theils unzulänglich, theils auch wegen vorkommender Hindernisse und Mangel des Raumes entweder gar nicht ausgeübt werden können, oder doch zu weitläuftig ausfallen. Wenn aber diese Einschränkungen nicht vorhanden sind, so kann man sich ihrer oft mit Vortheil bedienen. Uebrigens kömmt die Richtigkeit des Verfahrens auch auf eine geschickte Auswahl der Standlinien, oder der Standpunkte an, wo man die Vorsicht gebrauchen muß, daß an denselben nicht gar zu spitze oder stumpfe Winkel zum Vorschein kommen.

Auch wird es zur Erleichterung der Arbeit, und Irrungen zu vermeiden, gut seyn, wenn man sich von der Auflösung einer Aufgabe, vorher einen Entwurf auf dem Papiere macht, ehe man die Operation auf dem Felde selbst vornimmt.

Eine andere Einschränkung der bisherigen Methoden, ist, daß die auszumessenden Weiten mit

mit den willkührlich angenommenen Standpunkten oder Standlinien sich in einer einzigen Ebene befinden müssen; in bergigten Gegenden würden daher die gegebenen Auflösungen selten anwendbar seyn.

Wir müssen also auf andere Hülfsmittel bedacht seyn, und hierzu werden uns der Meßtisch, das Astrolabium, die Boussole ꝛc. vortreffliche Dienste leisten.

Messung der Weiten, an die sich der Maaßstab nicht unmittelbar bringen läßt, durch Hülfe des Meßtisches, des Astrolabii ꝛc.

Aufgabe.

§. 182. A, B, Fig. XXXV. Tab. III. sind zwey dergleichen Objecte, man soll ihren Horizontalabstand AB finden, vorausgesetzt, daß man von einem willkührlichen Standpunkte C, geradezu nach B und A hinmessen kann.

Aufl. I. Vermittelst des Meßtisches: Man bringe den Meßtisch über den Standpunkt C, stelle ihn horizontal (§. 113.) und bestimme auf ihm einen Punkt c, der loth-

recht

recht über C liegt (§. 128. IV.). An c lege man das Diopterlinial, visire nach A, B, und ziehe dahin die Richtungslinien cm, cn, so hat man den Winkel ACB auf dem Felde, aufs Meßtischgen gebracht (§. 128.). Man messe nun die Weiten CA, CB, und trage erstere CA nach dem verjüngten Maaßstabe auf den Meßtisch von c nach a, die andere CB aber, auf die entsprechende Richtung cn von c nach b. Messe demnächst auf dem Meßtische die Weite ab, nach dem verjüngten Maaßstabe, so wird solche der AB gemäß oder ähnlich seyn, d. h. nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man ca, cb, aufgetragen hat, so viel Ruthen, Schuhe, und Zolle halten, als AB nach der Meßkette halten würde, weil wegen des Winkels ACB = acb, und der Proportion AC : CB = ac : cb, das Dreyeck acb auf dem Meßtische, dem großen Dreyecke ACB ähnlich seyn wird.

II. Aufl. Vermittelst des Astrolabii AB zu finden, messe man den Winkel ACB (§. 132.) und die beyden Seiten AC, BC; berechne hieraus in dem Dreyecke ACB die Seite AB nach der gewöhnlichen Weise, oder nach (Trig. S. XVIII).

Wollte man nicht so genau verfahren, so trüge man, vermittelst eines geradlinigten Transporporteurs, den gemessenen Winkel ACB aufs Papier, und setzte auf beyde Schenkel die verjüngten Weiten CA, CB, so erhielte man, wie auf dem Meßtische ein kleines Dreyeck, das dem großen ACB ähnlich wäre ꝛc.

Aufgabe.

§. 183. Die Weite AB (Fig. XXXVI) zu finden, wenn man von einem willkührlichen Stande C nur nach A hinmessen kann.

Aufl. I. Vermittelst des Meßtisches. 1. Man bringe wie vorhin (§. 182.) den Meßtisch über C, und bestimme auf demselben den Winkel mcn = ACB; messe die Weite CA und trage sie auf die entsprechende Richtungslinie cm, von c nach a.

2. Man nehme nun den Meßtisch über C weg, und stelle ihn horizontal über A, dergestalt, daß der Punkt a (1) über A, und durch gehörige Verrückung und Wendung des ganzen Meßtisches, die Richtung ac in die gerade Linie CA, oder vielmehr in die über AC eingebildete Verticalebene zu liegen komme, so, daß man bey A durch die Dioptern des längs ac gelegten Linials, das bey dem ersten Stande C zurückgelassene Signal bedeckt siehet — so wird die bey der ersten Station C auf dem Meßtische nach

nach B gezogene Linie cn, bey der zweyten Station über A, die Lage cn, die mit der cn der erstern Station, parallel seyn wird, bekommen.

3. Man lege nun an a über A, die dioptrische Regel, visire nach B, und ziehe auf dem Meßtische die Richtungslinie ar; wo dieselbe die Richtung cn durchschneidet, da wird sich ein Punkt b ergeben, welcher gegen a, c, eben die Lage haben wird, die B gegen A, C hat; denn vermöge des Verfahrens ist wieder das Dreyeck auf dem Meßtische, nemlich abc, dem großen ABC ähnlich, weil die Winkel acb = ACB, cab = CAB sind. Die Linie ab auf dem Meßtische, wird also nach dem verjüngten Maaßstabe, der AB gemäß seyn.

Es versteht sich, daß, während man auf dem Meßtische die Linien neben der Regel herziehet, derselbe unterdessen in unverrückter Lage erhalten werden müsse.

Anmerkungen.

4. Wenn man bey einer gewissen Station wie A (2) die Linie ac auf dem Meßtische, nach der vorhergehenden Station C zurückrichten will, so daß zugleich a lothrecht über A zu liegen komme, und der Meßtisch horizontal stehe, so ist die Vorsicht nöthig, daß,

wäh-

während man vermittelst der Gabel (§. 128. IV.) und durch das Verrücken des Stativs den Punkt a lothrecht über A bringt, man zugleich auch der Linie ac nur erst ohngefähr nach dem Augenmaaße die Richtung nach C gebe; Denn müßte man, nachdem a über A gebracht worden, nachher den Meßtisch noch viel wenden, um ac in die völlig genaue Richtung nach C vermittelst Anlegung des Diopterlinials zu bringen, so würde der Punkt a nicht lothrecht über A bleiben, sondern sich während der Horizontalwendung des Tischblatts wieder merklich von A entfernen. Dieß kann hingegen nicht geschehen, wenn in dem Augenblicke, da a über A einspielt, auch die Linie ac schon ohngefähr die Richtung nach C hat. Die geringe Horizontalwendung, die nemlich alsdann zur völlig genauen Einrichtung von ac, noch vorzunehmen ist, wird keine so merkliche Aenderung in der Lage des Punktes a bewürken, daß daraus in der Ausübung beträchtliche Fehler zu besorgen wären.

5. Hr. Corrector Voigt in Quedlinburg hält in seinen neuesten Versuchen zur Erleichterung der practischen Geometrie (Leipz. 1792.) II. Abschn. §. 24 u. f. die Forderung (4) für äusserst schwer in der Ausübung. Er meynt, man möge bey A den Meßtisch drehen, rücken und wenden, wie man

wolle,

wolle, so werde man nie allen drey Bedingungen, nemlich daß

erstlich, a lothrecht über A zu liegen komme,

zweitens, ac längs AC eingerichtet sey, und

drittens, der Meßtisch horizontal stehe,

zugleich eine Genüge leisten können, ausser nur in dem Falle, wenn der Punkt a in die Mitte des Meßtisches falle. Denn so bald a ausserhalb dieser Mitte liege, so beschreibe a bey der Wendung des Tischblatts einen Kreis, und habe man daher anfänglich a über A gebracht, so werde sich a wieder verrücken, wenn hierauf ac nach C zurückgerichtet werden soll, oder habe man anfänglich ac längs AC eingerichtet, so werde, wenn man alsdann die Gabel anlegt, durch einen äusserst seltenen Zufall a lothrecht zugleich über A einspielen, oder gesetzt auch, es geschehe, so werde doch nachher bey der Horizontalstellung des Meßtisches der Punkt a sich wieder verrücken u. s. w.

6. Daß mir diese Schwürigkeiten in der Stellung des Meßtisches nicht unbekannt gewesen sind, wie Hr. V. zu meynen scheint, erhellet aus dem §. 227. IV. der ersten Ausgabe dieses II. Theils meiner praktischen Geometrie. Ich fand es aber kaum der Mühe werth, davon

von so viel Aufhebens zu machen, und empfohl also bloß die Vorsicht (4). Denn ich hatte mich durch viele Erfahrung, auch an meinen Zuhörern, überzeugt, daß es gar so schwer nicht sey, allen drey Bedingungen (5) in so weit eine Genüge zu leisten, daß der Fehler für die Ausübung unmerklich werde, wenn man erstlich beym Verrücken der Beine des Stativs, immer zugleich mit nach dem Augenmaaße längs ac hinausvisirt, und davor sorgt daß 2) während man mit der Stellung und Einrichtung des Meßtisches beschäftigt ist, die Gabel (§. 128. IV.) festhänge, damit man beständig den Punkt auf dem Boden, und das von der Gabel herabhängende Loth vor Augen haben kann. Es ist daher nöthig, (und freylich hätte ich dieß erwähnen sollen), daß die an den jedesmahligen Punkt auf dem Meßtische angelegte Gabel, sich an der untern Fläche des Tischblatts durch eine Handschraube ohngefähr wie (Fig. LXXXVI.) befestigen lasse, damit sie während der Verrückung und Wendung des Tisches nicht abgenommen werden darf. So geringe dieser Umstand zu seyn scheint, so wesentlich ist er, wenn Anfänger die gehörige Stellung des Meßtisches ohne Zeitverlust sollen bewerkstelligen können. Denn gesetzt, man habe die Gabel angelegt, und bemerkt, der Punkt a auf dem Meßtische falle nach dem Augenmaaße etwa 2 Zoll seitwärts des Punktes A auf dem

Boden, man wolle nun den Meßtisch etwas rücken, damit a genau lothrecht über A einspiele, so wird es schwer seyn, dieß zu leisten, wenn man während dem Verrücken des Meßtisches die Gabel abnehmen muß; hängt sie aber fest, so ist es sehr leicht, a genau über A zu bringen, visirt man nun dabey immer zugleich nur nach dem Augenmaaße längs a c, damit a c beym Verrücken des Meßtisches nicht merklich aus der Richtung nach C komme, so wird es gewiß nicht die geringste Schwürigkeit haben, allen drey Bedingungen (5) in so fern eine Genüge zu leisten, daß man sich in der Ausübung damit befriedigen kann; Denn wenn man, nachdem a genau über A einspielet, a c nunmehr durch Wendung des Tisches völlig genau nach C zurückrichtet, so wird a nur mit einem unmerklichen Fehler sich verrücken, und auch dieser Fehler läßt sich noch leicht verbessern. — Die Verrückung, welche die Horizontalstellung des Meßtisches in dem Punkte a hervorbringt, hat so viel als nichts zu bedeuten. Der Meßtisch sey, nachdem a über A einspielet, auch um 5 und mehrere Grade geneigt, so wird nach geschehener Horizontalstellung, vermittelst der Nuß, sich noch immer ohne merklichen Fehler a lothrecht über A befinden. Die merklichste Verrückung von a geschieht immer durch die Horizontal-Wendung des Tischblatts, wodurch a c längs A C eingerichtet wird. Da ich aber annehme, daß nach ge-

geschehener Einspielung des Punktes a über A, auch immer schon nach dem Augenmaaße ac längs AC liege, so wird, nachdem der Meßtisch horizontal gestellt, und hierauf das an ac angelegte Diopterlinial, völlig genau nach C eingerichtet worden, die Verrückung des Punktes a so wenig betragen, daß sehr selten noch eine kleine Verbesserung nöthig seyn wird. Ich berufe mich hiebey auf meine vielfältige Erfahrung, und auf das Zeuguiß derjenigen, welchen ich in der practischen Geometrie Unterricht ertheilt, und die ich gewiß auf alle Irrthümer aufmerksam gemacht habe, die bey geometrischen Operationen zu befürchten sind. Da ich glaubte, daß einen jeden, bey der ersten besten Operation, die eigene Praxis lehren würde, daß, ohne die Gabel zu befestigen, es etwas schwer hält, den Meßtisch gehörig zu stellen, so hielte ich es kaum der Mühe werth, dieses Umstandes zu erwähnen. Ich sehe aber jetzt, daß man in Erzählung praktischer Handgriffe, für manche nicht umständlich genug seyn kann. Ich hoffe durch gegenwärtige Erläuterung nunmehr vollkommen von dem Vorwurfe einer Unvollständigkeit befreyt zu seyn.

7. Hr. V. hat wegen der ihm so schwer fallenden Ausübung der Forderung (5), ein neues Verfahren, den Meßtisch zu richten, vorgeschlagen, und in oberwähnter Schrift mit sehr vielen Beyspielen zu erläutern gesucht. In der

der Hauptsache besteht es darin, daß 1) allemahl der Mittelpunkt des Meßtisches über den Stationspunkt gestellt werde, 2) daß man allemahl aus diesem Mittelpunkt visire, und dann 3) um an einem Punkte wie a, ausserhalb der Mitte des Meßtisches, die wahren Winkel zu erhalten, mit dem aus dem Mittelpunkte gezogenen Visirlinien, durch a Parallellinien ziehe. Dieses ist mit noch einigen Vortheilen, die im Buche selbst nachgelesen werden müssen, so umständlich auf alle geometrischen Operationen angewandt, daß über die Hälfte des Buchs damit angefüllt ist. Meine Art, die Gabel zu gebrauchen, und beym Einrichten des Meßtisches zu verfahren, macht dieß alles überflüssig.

8. Weil indessen bey dem Verfahren des Verf. sich zugleich zeigte, daß die bisher so hochgepriesene Nuß an dem Meßtische ein völlig überflüssiges Ding sey, und nicht einmahl verstatte, den zwey Bedingungen, daß der Meßtisch horizontal stehe, und der Mittelpunkt desselben über den Stationspunkt einspiele, zugleich ein Gnüge zu leisten, so fügt er denn noch bey, auf welche Art er den Meßtisch und das Stativ eingerichtet wissen will. Warum man sich so lange der Nuß bedient habe, rühre von einem Vorurtheile des Ansehens her, auch hätten "die mehresten praktischen Feldmesser „nicht Theorie genug, um die Fehler und Un„be-

„bequemlichkeiten, welche ihnen in der Arbeit „aufstoßen, zu untersuchen, und gelehrte Ma= „thematiker pflegten sich mehr mit tiefsinnigen „Speculationen auf der Studierstube, als mit „Instrumenten zum Feldmessen abzugeben."

9. Daß ein Lowitz, Tob. Mayer, Meister, und andere, die der Verf. doch wohl als gelehrte Mathematiker kennt, sich auch mit Feldmessen und Feldmesser = Werkzeugen abgegeben haben, könnten ihn alte göttingische Lectionscatalogen, und die Schriften dieser Männer lehren. Hätten die bisher üblich gewesene Nuß, das dreybeinigte Stativ, und das gewöhnliche Verfahren, den Meßtisch zu stellen, so ungeheure Schwürigkeiten in der Ausübung, als Hr. V. behauptet, woher käme es, daß die Ehre, die ganze praktische Geometrie zu reformiren, nur allein Hrn. V. vorbehalten seyn konnte, und daß erst zu Ende dieses Jahrhunderts eine Entdeckung gemacht werden konnte, die doch wahrlich einem jeden bey der ersten besten Operation sich hätte darbieten müssen. Sollten sich obige Männer, und andere einsichtsvolle Feldmesser, die ich kenne, auch von dem Vorurtheile des Ansehens haben regieren lassen? Ich weiß also nicht, woran es liegt, daß bey der Erfüllung obiger Bedingungen (5), die Nuß und das gewöhnliche dreybeinigte Stativ sich bey des Hrn. V. Praxis so eigensinnig bewiesen haben.

10.

10. Es ist mir zwar nicht unbekannt, daß schon mehrere Feldmesser sich statt der Nuß, zum Horizontalstellen des Tisches, Schrauben bedienet haben, die an dem untern Theile der Stativschenkel angebracht werden. Die Ursache aber war, weil die Nuß, wenn sie ihres Zwecks, nemlich den Meßtisch auch mit zu unterstützen, nicht verfehlen soll, sehr stark gemacht werden muß, und dieß ansehnliche Kosten verursacht. Ist sie zu schwach, so giebt sie nach, und der Meßtisch kommt leicht aus der Horizontallage, zumahl wenn man am Rande desselben zu arbeiten hat. Dieß kann aber bey den 3 Schrauben y, y, y, an meinem Meßtische (§. 108. 2.) sich nicht eräugnen, und bey mir dient die Nuß bloß zur Horizontalstellung des Tischblatts, und braucht also nicht stark zu seyn. Ich kenne wenigstens keine einfachere Einrichtung, als eine Nuß, einen Meßtisch bequem horizontal zu stellen. Es bloß durch Schrauben an dem untern Theile der Stativschenkel zu bewerkstelligen, hat in der Ausübung manche Beschwerlichkeiten, und verursacht viel Zeitverlust. Ein gleiches möchte bey Hrn. V. Meßtische statt finden.

11. Ich will übrigens dem Verfahren des H. Voigts, im Falle würklich die obgedachten Schwürigkeiten im gehörigen Stellen des Meßtisches statt finden sollten, (welches aber ich wenigstens, bey der Vorsicht (4. 6.) und nach

meiner Praxis, nicht zugebe) das Sinnreiche nicht absprechen, gebe aber doch zu überlegen, ob das Ziehen der Parallellinien auf dem Meßtische, mit den aus dem Mittelpunkte gezogenen Visirlinien, und die übrigen von dem V. angegebenen Hülfsmittel, die Operationen nicht zusammengesetzter machen, die Aufmerksamkeit auf das übrige stören, leicht Irrungen veranlassen, und nicht zeitraubender sind, als das gewöhnliche Verfahren bey den Vorsichten (4) und (6). Es kann etwas auf dem Papiere ganz gut seyn, wovon die Praxis ganz anders urtheilt. Ich habe seit zwanzig Jahren manchen Unterricht in der praktischen Geometrie ertheilt, manche erhebliche Messung veranstaltet, auch manche Vorschläge zur Erleichterung praktischer Arbeiten geprüft, daß ich mir schmeichle, ziemlich mit den Schwürigkeiten bekannt zu seyn, die bey Feldmesseroperationen aufstoßen können, aber bis jetzt habe ich noch keine Ursache gefunden, die Nuß abzudanken, noch viel weniger die Forderungen (5) für ein so unauflösliches Problem zu halten. Es versteht sich, daß freylich auch hierzu einige Uebung nöthig ist. Ungeschickte Hände bringen aber auch bey des Hrn. Verf. Verfahren nichts zu Stande, und begehen z. E. nur bey dem Ziehen der Parallellinien (7) Fehler, die größer sind, als diejenigen, welche bey dem gewöhnlichen Verfahren zu besorgen sind.

Aufl. II. Mit dem Astrolabio messe man die beyden Winkel C, A, und finde aus C, A, AC, die Seite AB durch Rechnung, nach der bekannten Proportion

sin B : AC = sin C : AB; wo B = 180° — A — C mithin

log AB = log AC + log sin C — log sin (180° — A — C).

Anmerkung.

Es pflegt sich unterweilen (in Aufl. I.) zuzutragen, daß wegen der Wahl eines zu großen verjüngten Maaßstabes, oder weil der Punkt c auf dem Meßtische nicht bequem angenommen worden, die Richtungslinie ar die cn auf dem Meßtische nicht durchschneidet, sondern daß der Durchschnitt b ausserhalb des Meßtisches fällt. In diesem Falle, welcher Fig. XXXVII. vorgestellet ist, wo ar die Richtung cn in b ausserhalb des Meßtisches schneidet, nehme man entweder einen kleinern verjüngten Maaßstab an, womit man die Weite CA von c nach a aufträgt; oder wenn man denselben Maaßstab beybehalten will, so halbire man bey γ die Linie ac, oder nehme aγ = ½ ac oder ¼ ac, je nachdem man es für gut befindet, und ziehe durch γ mit cn eine parallele γβ, welche die Richtungslinie ar nach B, in β durchschneidet, also in einem Punkte, der auf den

Meß-

Meßtisch fällt. Messe nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man ca aufgetragen hat, die Weite aβ. Hätte man nun a$\gamma = \frac{1}{2}$ac genommen, so wäre auch a$\beta = \frac{1}{2}$ab; für a$\gamma = \frac{1}{3}$ ac, wäre a$\beta = \frac{1}{3}$ ab u. s. w. Man würde also die der AB gemäße Weite ab, dennoch vermittelst der aβ finden, obgleich b ausserhalb des Meßtisches fiele.

Beym Gebrauche des Astrolabii ist man solchen Vorfällen, wie eben gewiesen worden, nicht ausgesetzt, weil man da AB durch Rechnung findet.

Wenn die Weite AB sehr groß ist, so wird der Durchschnitt b sehr oft ausserhalb des Meßtisches fallen, oder man müßte einen sehr kleinen verjüngten Maaßstab annehmen. Dann könnte man sich aber keine große Genauigkeit versprechen. Deßwegen ist bey Messung sehr großer Weiten immer das Astrolabium vorzuziehen.

Einige practische Schriftsteller rathen ein Brett A von guten trockenen Lindenholze, wie Fig. XXXVIII. ausweiset, das etwa 6 bis 8 Zoll breit, und eben so lang und dick als der Meßtisch ist, bey w, r, mit zweyen eingeschnittenen Nuthen zu versehen, die man demnächst an ein paar Leisten i, k, welche etwa durch Schrauben an die untere Fläche des

Meß-

Meßtisches Fig. XXXVII. befestigt werden können, anschiebet, so, daß das Brett A mit der Ebene des Meßtisches genau in einer einzigen Fläche zu liegen komme. Da man solchergestalt durch das angesetzte Brett einen größern Raum auf dem Meßtische erhält, so kann man sich dadurch aus der Verlegenheit helfen, wenn ein Durchschnittspunkt wie b Fig. XXXVII. ausserhalb des Meßtisches fallen sollte, weil man alsdann den Durchschnitt b auf dem angesetzten Brette erhalten wird, wenn anders b nicht gar zu weit ausserhalb des Meßtisches fällt.

Aufl. III. Da man bey der vorgelegten Aufgabe nöthig hatte, den Meßtisch von dem ersten Standpunkte C nach A zu bringen, und dieses Tragen des Meßtisches von einem Orte zum andern, mit einigen Unbequemlichkeiten verbunden ist, auch fehlerhaft werden kann, wenn man bey der zweyten Station über A, den Meßtisch nicht sorgfältig genug nach C zurückrichtet, so kann man durch folgendes Hülfsmittel das Forttragen des Meßtisches ersparen. S. Fig. XXXIX. Man stecke nemlich, nachdem der Meßtisch über C gestellet worden, bey D und O, in beliebiger Weite von C ein paar Stäbe ab, die mit B in gerader Linie stehen. Nun ziehe man auf dem Meßtische aus dem lothrecht über C liegenden Punkte c, nach den vier Objecten A, B, O, D, die unbestimmten Rich-

Richtungslinien ct, cw, cn, cm; die gemessenen Weiten CA, CO, CD, trage man nach dem verjüngten Maaße, auf die entsprechenden Richtungslinien ct, cn, cm, von c nach a, von c nach o, von c nach d. Ziehe durch die Punkte d, o, auf dem Meßtische die gerade Linie dob, welche die nach B zulaufende Richtung cw in b schneidet, messe dann die Weite ab, nach dem verjüngten Maaßstabe, so wird man die AB in Ruthen, Fußen und Zollen finden, weil ab der AB gemäß (§. 182. I.) seyn muß.

Denn wegen des gemeinschaftlichen Winkels OCD = ocd, und weil man co : cd = CO : CD gemacht hat, ist der Triangel cod $\backsim$ COD, also der Winkel cdo = CDO, folglich auch der Triangel bcd $\backsim$ BCD, weil die Winkel in beyden einerley sind.

folglich cb : CB = cd : CD. Es ist aber auch
(per Constr.) ca : CA = cd : CD

---

also cb : CB = ca : CA
Auch d. Winkel ACB = acb
folgl. d. Dreyeck ACB $\backsim$ acb
Mithin ca : CA = ab : AB,

d. h. weil man nach dem verjüngten Maaße ca der CA gemäß gemacht hat, so wird nach eben dem Maaßstabe auch ab der AB gemäß seyn.

Die-

Dieses Verfahren ist in der That zu empfehlen, ob man gleich die Linien CO, CD, ausser der CA, auch noch messen muß; dadurch erspart man sich aber das Forttragen des Meßtisches, wie auch die gehörige Stellung über A, wozu oft mehr Zeit erfordert wird, als zur Messung der Linien CO, CD.

Es ist vortheilhaft, den Punkt D nicht zu nahe bey C anzunehmen. Kann man ihn einige Kettenlängen weit von C annehmen, so wird dieß in den meisten Fällen hinreichend seyn. Dieß geschieht deswegen, damit der Winkel CBD, und folglich auch cbd auf dem Meßtische nicht zu spitzig ausfalle wegen (§. 185. I.).

Aufgabe.

§. 184. Eine Weite AB Fig. XL. zu messen, zu deren keinem Ende A oder B, man aus willkührlichen Standpunkten C, D, hinkommen kann.

Aufl. I. Vermittelst des Meßtisches. Man nehme eine willkührliche, nicht zu kleine Standlinie CD an, bringe den Meßtisch horizontal über C, und bestimme auf demselben den Punkt c, der über C lothrecht liegt.

An c lege man die Regel, visire nach A, B, D, und ziehe dahin die Richtungslinien

cm,

cm, cn, cr. Messe nun die Standlinie CD, und trage sie verjüngt, auf die zugehörige Richtung cr, von c nach d, so stellet der Punkt d auf dem Papiere den Punkt D auf dem Felde, vor.

Hierauf bringe man den Meßtisch mit den darauf gezogenen Linien cm, cn, cr, nach der zweyten Station über D; dergestalt, daß 1) der bey der ersten Station erhaltene Punkt d, lothrecht über D, 2) die Linie dc bey der zweyten Station wieder längs DC zu liegen komme, dergestalt, daß man durch die Diopter der längs dc angelegten Regel, die bey C zurückgelassene Fahne erblickt, und 3) der Meßtisch horizontal stehe, nach dem Verfahren (§. 183. 4. rc.).

In dieser Lage bleibe er nun unverrückt.

Man richte die Diopter nach A und B, und ziehe aus d, längs des Diopterlinials, die Richtungen da, db, oder, ohne diese Linien da, db würklich auszuziehen, bemerke man bloß deren Durchschnitte a, b, auf den Richtungslinien cm, cn, die bey der erstern Station des Meßtisches, nach den Objecten A, B, hingezogen worden, so wird man auf dem Meßtische bey D die Weite ab finden, welche der AB nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man dc aufgetragen hat, gemäß seyn, mit-

mithin die auf AB gehende Menge von Ruthen u. s. w. anzeigen wird.

Bew. Weil die Winkel acd = ACD und adc = ADC, so ist das Dreyeck acd dem Dreyecke ACD ähnlich. — Dieß giebt folgende Proportionen

AC : ac = CD : cd und eben so
BC : bc = CD : cd
also AC : ac = BC : bc
oder AC : BC = ac : bc

da nun auch der Winkel ACB = acb, so ist das Dreyeck acb dem ACB ähnlich, mithin AB : ab = AC : ac = CD : cd, oder AB : CD = ab : cd, d. h. wenn cd die Weite CD nach dem verjüngten Maaßstabe ausdrückt, so wird auch ab die AB nach diesem Maaßstabe ausdrücken.

Zus. I. Diese Aufgabe ist sehr wichtig, denn so wie die Linie AB auf dem Felde, durch ab auf dem Meßtische, entworfen worden, so dienet diese Aufgabe, selbst ganze Figuren auf das Papier zu bringen, wovon in der Folge mit mehrerem Unterricht gegeben werden soll.

Die wichtigste Vorsicht ist 1) den Meßtisch in unverrückter Stellung zu erhalten, während man Linien auf demselben ziehet, und 2) bey der

der zweyten Station des Meßtisches, durch gehörige Wendung des Tisches, die Linie dc genau längs DC einzurichten.

Wenn letzteres geschehen ist, so werden die Linien ca, cb, oder cm, cn, die man über der erstern Station auf dem Meßtische erhalten hatte, bey der zweyten Station desselben über D, genau mit den correspondirenden Linien auf dem Felde, d. h. mit CA, CB parallel seyn, weil der Winkel acd = ACD, bcd = BCD u. s. w.; Auch ab wird mit AB parallel werden, dergestalt, daß also über der zweyten Station alle Linien ac, ab 2c. denen zugehörigen AC, AB gleichlaufend seyn werden.

Zus. II. Man kann auch, ohne bey der zweyten Station des Meßtisches dc längs DC durchs Zurückvisiren einzurichten, den gehörigen Stand des Meßtisches, durch Hülfe einer guten Magnetnadel, erhalten.

Da nemlich die Richtungen der Magnetnadel ohne merklichen Fehler als parallel angenommen werden können, wenn die Oerter nicht weit von einander entfernt sind (§. 118. 6.), so ziehe man, nachdem über der ersten Station die Linien cm, cn, cr, gezogen worden, bey unverrückter Stellung des Meßtisches, auf demselben auch die Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$ (§. 121.).

Damit nun bey der zweyten Station des Meßtisches über D, die Linien cm, cn, denen CA, CB parallel werden, und übrigens auch dc längs DC zu liegen komme, so bringe man durch gehörige Verrückung des Tisches erstlich den Punkt d lothrecht über D, und dabey die Linie dc nur erst ohngefähr nach dem Augenmaaße in die Richtung DC. Hierauf lege man die dioptrische Regel wieder an die bereits bey der ersten Station gezogene Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$, wende demnächst den ganzen Meßtisch horizontal herum, und bediene sich dabey der Schraube (§. 108. 5.), wodurch man dem Tischgen die sanfte Wendung geben kann, bis die Magnetnadel wieder genau über der auf dem Boden des Magnetkästgens gezogenen Nordlinie einspielet, so wird alsdann die Linie $\mu\nu$ über der zweyten Station, der $\mu\nu$ über der erstern, parallel werden. Mithin werden auch die Richtungen cm, cn, bey der Station 2, mit CA, CB die gehörige parallele Lage erhalten, und wenn d über D liegt, so wird auch dc längs DC fallen. Mithin wird man durch Hülfe der Magnetnadel eben das erhalten, was sonst bey der zweyten Station, durchs Zurückvisiren nach der erstern, erreicht wird.

Dabey wird aber zum vorausgesetzt, daß D von C nicht gar zu weit wegliege, weil es sonst ohne einigen Fehler nicht verstattet ist, die Richtung der Nadel bey D, mit der Richtung derselben bey C, als gleichlaufend anzunehmen.

Dieses Verfahren, durch Hülfe der Magnetnadel, an jeder folgenden Station, den Meßtisch so zu stellen, daß die auf demselben bereits bey der ersten Station erhaltenen Linien, wieder mit den correspondirenden auf dem Felde parallel werden, habe ich hier nur gelegentlich beygebracht, weil es sonst in andern Fällen nützlich ist. Auch wird es bey der Vermessungsart gebraucht, deren sich Hr. Hogreve (S. dess. Landesvermessungen) bey der topographischen Aufnahme eines Landes bedient.

Bey der Aufgabe des gegenwärtigen §phes, (und in allen Fällen, wo es geschehen kann) wollte ich aber doch allemahl lieber rathen, sich bey der zweyten Station, des Zurückvisirens nach der erstern, zu bedienen, weil dasselbe nicht den Fehlern unterworfen ist, die sich von den zufälligen Unvollkommenheiten der Magnetnadel (§. 120. 7. 8.) befürchten lassen.

II. Auflösung.

Man kann auch, ohne den Meßtisch in die zweyte Station D zu bringen, sogleich bey der erstern C die Weite AB finden; nur muß man

sich

sich die Mühe geben, noch einige Linien mehr zu messen. S. die XXXIX. Figur.

Nachdem man nemlich den Meßtisch gehörig über C gestellet hat, so lasse man bey D, O, ein paar Stäbe mit B in die gerade Linie DB, und bey I einen Stab in die gerade Linie DA einsetzen. Ziehe nun auf dem Meßtische nach den Objecten A, B, D, O, I, aus c die Linien ct, cw, u. s. w. Messe demnächst die Weiten CD, CO, CI, und trage sie nach dem verjüngten Maaßstabe auf die entsprechende Richtungen cm, cn, cw, von c nach d, von c nach o, von c nach i, lege an d, o, und an d, i, ein Linial, so werden die gehörigen Verlängerungen der Linien do, di, auf denen nach A, B gezogenen Richtungen cw, ct, die Punkte b, a, abschneiden, und solchergestalt auf dem Meßtische die Weite ab bestimmen, welche der AB gemäß seyn wird.

Der Beweis hievon ist dem der III. Aufl. des 180. §. völlig ähnlich. Hier liegt I auch in der geraden Linie CB, es ist aber dieses nicht nöthig, wenn I nur in der geraden Linie DA liegt.

III. Auflösung.

Mit dem Astrolabio und durch Hülfe trigonometrischer Rechnung.

Man messe mit dem Winkelmesser bey C (Fig. XL.) die Winkel ACD, BCD; hierauf bey D die Winkel CDA, CDB, und dann die Standlinie CD, so wird sich durch Auflösung einiger Dreyecke, die Weite AB folgendergestalt berechnen lassen.

1. Man nenne die bekannten Winkel BCD $= \alpha$, ACD $= \beta$; CDA $= \gamma$, CDB $= \delta$, die Standlinie CD $=$ m; so sind erstlich in den Dreyecken ACD, BCD, die Winkel

$$CAD = 180° - ACD - CDA = 180° - (\beta + \gamma)$$
$$CBD = 180° - BCD - CDB = 180° - (\alpha + \delta)$$

bekannt.

2. Man setze also der Kürze halber CAD $=$ A; CBD$=$B, so ist in den Dreyecken CDA, CDB.

$$\sin A : m = \sin \gamma : AC$$
$$\sin B : m = \sin \delta : BC$$

Daher $AC = \frac{m \sin \gamma}{\sin A} = m \sin \gamma \operatorname{cosec} A$

$$BC = \frac{m \sin \delta}{\sin B} = m \sin \delta \operatorname{cosec} B.$$

3.

3. Also sind die Seiten AC, BC des Dreyeckes ACB bekannt.

4. Auch weiß man den eingeschlossenen Winkel ACB = ACD — BCD = $\beta - \alpha$ (1) daraus läßt sich also die Weite AB trigonometrisch berechnen.

5. Die gewöhnliche Regel ist folgende.

Man nenne die halbe Summe der beyden Winkel CAB, CBA, = S, ihre halbe Differenz = φ; so ist

$$\frac{180^\circ - ACB}{2} = S, \text{ oder}$$

$$90^\circ - \tfrac{1}{2} ACB = S.$$

Um die halbe Differenz φ zu finden, so schliesse man

$$BC + AC : BC - AC = \text{tang } S. : \text{tang } \varphi$$

$$\text{also tang } \varphi = \frac{BC - AC}{BC + AC} \text{ tang } S$$

$$= \frac{BC - AC}{BC + AC} \cot \tfrac{1}{2} ACB$$

in welcher Formel die Seiten BC, AC, und der Winkel ACB (2, 3. 4.) bekannt sind.

6. Wenn nun BC die größere Seite bedeutet, so ist der gegenüberstehende Winkel CAB bekannter:

termaaßen $= S + \varphi = 90^\circ - \frac{1}{2} ACB + \varphi = 90^\circ - (\frac{1}{2} ACB - \varphi)$
also auch CAB bekannt.

7. Hiernächst wird also die Weite AB durch folgende Proportion gefunden

$$\sin CAB : BC = \sin ACB : AB$$

oder (6)

$$\cos (\tfrac{1}{2} ACB - \varphi) : BC = \sin ACB : AB$$

Daher $AB = \frac{BC \sin ACB}{\cos (\frac{1}{2} ACB - \varphi)}$ oder wenn man Tafeln für die Secanten hat

$$AB = BC \sin ACB \sec (\tfrac{1}{2} ACB - \varphi).$$

8. Diese Auflösung kann durch Logarithmen bewerkstelligt werden. Aus (2) erhält man die Logarithmen der Seiten BC, AC; und folglich aus den Tafeln die Seiten BC, AC selbst. Um den Winkel φ (5) zu finden, muß man vorher die Logarithmen von $CB + AC$ und $CB - AC$, berechnen.

Damit man nun nicht nöthig habe, erstlich aus den Tafeln die Seiten BC, AC, und dann die Logarithmen von $BC + AC$; $BC - AC$ zu suchen, so kann man obige Rechnung noch etwas abkürzen, wie folget.

9. Weil aus (5) auch

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{1 - \frac{AC}{BC}}{1 + \frac{AC}{BC}} \cdot \cot \tfrac{1}{2} ACB$$ ist, so

suche man einen Winkel $= \psi$, dessen Tangente $= \frac{AC}{BC}$ ist, so hat man

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{1 - \operatorname{tang} \psi}{1 + \operatorname{tang} \psi} \cdot \cot \tfrac{1}{2} ACB.$$

10. Wenn man aber in Trig. S. XII. 6 das dortige $\beta = 45^\circ$ und $\gamma = \varphi$, mithin $\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} 45^\circ = \sin \operatorname{tot} = 1$ setzet, so wird

$$\operatorname{tang} (45^\circ - \psi) = \frac{1 - \operatorname{tang} \psi}{1 + \operatorname{tang} \psi}.$$

11. Folglich (9)

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} (45^\circ - \psi) \cdot \cot \tfrac{1}{2} ACB$$
$$= \frac{\operatorname{tang} (45^\circ - \psi)}{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} ACB}.$$

12. Bringt man also das bisher beygebrachte in eine einzige Vorschrift, und bedienet sich überall der Logarithmen, so erhält man folgende

Regel.

Man suche erstlich nach (2) die Logarithmen der beyden Seiten BC, AC.

Hierauf nach (9) einen Winkel ψ durch $\log \tan \psi = \log AC - \log BC$.

Alsdann nach (11) einen Winkel φ durch $\log \tan \varphi = l \tan (45° - \psi) - l \tan \frac{1}{2} ACB$ so wird (7) $\log AB =$

$$\log BC + \log \sin ACB + \log \sec (\tfrac{1}{2} ACB - \varphi).$$

13. Wenn man sich der gemeinen Formel (5) bedienen will, so muß man in dem Falle, da AC, BC, die Gränzen der Tafeln überschreiten, durch Proportionaltheile die Rechnung führen. Und da braucht man, um den Winkel φ zu berechnen, 4 Proportionaltheile, nemlich zwey um die Werthe von BC, AC, und zwey um die Logarithmen von BC + AC, BC — AC, zu erhalten.

Bedienet man sich aber der Vorschrift (12), so braucht man dazu nur zwey Proportionaltheile, einen, um den Winkel ψ bis auf Secunden und dann einen, um $\log \tan (45° - \psi)$ zu berechnen.

Daher ist also die Formel (12) zur Berechnung ungleich bequemer, als die gewöhnliche (5).

14.

14. In den meisten Fällen ist es erlaubt, die Secunden in den Winkeln ψ; $45° - \psi$; φ; wegzulassen; den Fall ausgenommen, da diese Winkel sehr klein sind. Hierdurch wird also, wegen Ersparung der Proportionaltheile, die Rechnung noch leichter.

15. Die Formel (12) setzt zum voraus, daß BC die größere, und AC die kleinere Seite des Dreyecks ACB ist. Es ist klar, wenn AC die größere, BC aber die kleinere Seite wäre, alsdann

$$\log \operatorname{tang} \psi = \log BC - \log AC$$

log tang φ wie vorhin bliebe, und $\log AB = \log AC + \log \sin ACB + \log \sec (\frac{1}{2} ACB - \varphi)$ würde.

16. Es ist ferner klar, daß die Formel (12) für log tang ψ eigentlich diesen Logarithmen für den Sinus totus $= 1$ giebt. Verlangt man aber den Logarithmen dieser Tangente für den Halbmesser der Sinustafeln, so muß man eigentlich zu log AC — log BC die Zahl 10 addiren.

Ein gleiches ist in Absicht des Logarithmen der Tangente des Winkels φ zu bemerken.

17. Wenn der Winkel $\varphi > \frac{1}{2} ACB$ gefunden wird, so ist eigentlich $\frac{1}{2} ACB - \varphi$ negativ; als:

alsdann muß man aber statt $\cos\left(\frac{1}{2}ACB - \varphi\right)$ (7) oder statt $\sec\left(\frac{1}{2}ACB - \varphi\right)$ setzen $\cos\left(\varphi - \frac{1}{2}ACB\right)$ oder $\sec\left(\varphi - \frac{1}{2}ACB\right)$.

Dieß erhellet daraus, weil $\cos\left(\frac{1}{2}ACB - \varphi\right) = \cos\left(\varphi - \frac{1}{2}ACB\right)$ ist, und eben dasselbe auch von den Secanten gilt.

Exempel.

18. Um den Gebrauch der in (12) beygebrachten Formel mit einem Beyspiele zu erläutern, so soll folgendes dazu dienen.

An einer Standlinie CD von 1517,7 Kalenb. Fußen $= m$, maaß ich die Winkel

$ACD = \beta = 63^\circ.38'$; $BCD = \alpha = 49^\circ.44'$
$CDA = \gamma = 89^\circ.54'$; $CDB = \delta = 95^\circ.13'$

Dieß giebt den Winkel

$A = 26^\circ.28'$; $B = 35^\circ.3'$; $ACB = 13^\circ.54'$
$\frac{1}{2}ACB = 6\ .57'$

Folglich

$$\begin{aligned}
\log m &= 3{,}1811859\\
l \sin\gamma &= 9{,}9999993 - 10\\
l \operatorname{cosec} A &= 0{,}3509797\\
\hline
\log AC &= 3{,}5321649\\
l m &= 3{,}1811859\\
l \sin\delta &= 9{,}9981924 - 10\\
l \operatorname{cosec} B &= 0{,}2408679\\
\hline
l BC &= 3{,}4202512\\
l AC &= 3{,}5321649\\
\hline
\end{aligned}$$

$\log \tang\psi = 9{,}8880863$ also $\psi = 37^\circ.41'.53''$

$45^\circ - \psi = 7.18.7.$

$$\begin{aligned}
\log \tang(45^\circ - \psi) &= 9{,}1076759\\
l \tang \tfrac{1}{2} ACB &= 9{,}0859996\\
\hline
l \tang \varphi &= 10{,}0216763\\
\varphi &= 46^\circ.25'.45''
\end{aligned}$$

$\varphi - \frac{1}{2} ACB = 39^\circ.28'.45'' = 39^\circ.29'$ beyn.

Also endlich

$$\begin{aligned}
l AC &= 3{,}5321649\\
l \sin ACB &= 9{,}3806237 - 10\\
l \sec(\varphi - \tfrac{1}{2} ACB) &= 0{,}1124898\\
\hline
\log AB &= 3{,}0252784
\end{aligned}$$

$AB = 1060$ Kalenb. Fuß. beynahe.

Dieß

Dieß ist die Weite des südlichen Johannis=kirchthurms in Göttingen, vom Observatorio. Die erwähnte Standlinie von 1517,7 Fußen war auf einer Wiese ausserhalb der Stadt angenommen worden.

IV. Auflösung.

Wollte man, vermittelst einer Zeichnung, aus CD und den mit dem Astrolabio gemessenen Winkeln α, β, γ, δ, die Weite AB auf dem Papiere bestimmen, so kann man sich zu dieser Absicht unterschiedener Methoden bedienen.

I. Man trage die gemessene Grundlinie CD, nach dem verjüngten Maaßstabe aufs Papier, und mache also cd Fig. XLI. der CD gemäß. Setze hierauf durch Hülfe des geradlinigten Transporteurs, oder vermittelst anderer Methoden (§. 1. 3. 9 u. f.), an c ein paar Winkel acd = ACD, bcd = BCD, und an d die Winkel cdb = CDB, cda = CDA, so werden sich auf dem Papiere die Linien ca, da, bey a, und cb, db, bey b schneiden, und solchergestalt die Weite ab bestimmen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe der auf dem Felde AB gemäß seyn wird.

II. Oder man berechne in dem Dreyecke ACD, aus den bekannten Größen CAD, ADC, CD die beyden Seiten CA, AD, und dann aus den

Win=

Winkeln BCD, CDB und der Standlinie CD, in dem Dreyecke CDB die beyden Seiten CB, DB, welche Rechnung durch Logarithmen sehr geschwinde von statten gehet. Beschreibe demnächst auf dem Papiere über cd (Fig. XLI.) die man der CD gemäß nimmt, das kleine Dreyeck cda, oder bestimme bloß den Punkt a, durch den Durchschnitt zweyer Kreisbogen, die man aus c, d, mit den Halbmessern ca, da, welche man den berechneten Seiten CA, DA, gemäß nimmt, beschreibt. Auf gleiche Weise wird auch mit den Weiten cb, db, die denen CB, DB gemäß gemacht worden, das Dreyeck cdb beschrieben, mithin der Punkt b, folglich auch die Weite ab bestimmt.

III. Es wird sehr oft geschehen, daß die Längen ca, da, cb, db, so groß ausfallen, daß man sie mit einem Handzirkel von gewöhnlicher Größe nicht bequem von dem verjüngten Maaßstabe abnehmen, folglich auch nicht die Dreyecke acd, cbd, beschreiben kann. In diesem Falle muß man sich entweder eines größern Stangenzirkels bedienen, oder auf folgende Art zu Werke gehen.

Es sey Fig. XLII. ABCD, noch immer das bisher betrachtete Viereck auf dem Felde. Man stelle sich von A, B, auf die Standlinie, die Perpendiculärlinien AE, BF; herabgefället vor; und berechne in den rechtwinklichten Dreyecken ACE,

ACE, BDF, die senkrechten Entfernungen AE, BF, und die Weiten CE, DF. Dieß kann geschehen, weil man die Seiten CA, BD, und die Winkel ACE $= 180^\circ -$ ACD $= 180^\circ - \beta$. BDF $= 180^\circ -$ CDB $= 180^\circ - \delta$ weiß.

Es ist nemlich

$$\sin CAD : CD = \sin CDA : CA$$
$$\sin CBD : CD = \sin BCD : BD$$

also $CA = \dfrac{m \sin \gamma}{\sin A}$; $BD = \dfrac{m \sin \alpha}{\sin B}$

Mithin in den rechtwinklichten Dreyecken CAE, BDF, für den Sinus totus $= 1$

$$1 : \sin (180^\circ - \beta) = AC : AE$$
$$1 : \cos (180^\circ - \beta) = AC : CE$$
$$1 : \sin (180^\circ - \delta) = BD : BF$$
$$1 : \cos (180^\circ - \delta) = BD : DF$$

Man berechne also erstlich durch Logarithmen

$$\log CA = \log m + \log \sin \gamma - \log \sin A$$
$$\log BD = \log m + \log \sin \alpha - \log \sin B$$

so wird demnächst

$$\log AE = \log AC + \log \sin (180^\circ - \beta)$$
$$\log CE = \log AC + \log \cos (180^\circ - \beta)$$
$$\log BF = \log BD + \log \sin (180^\circ - \delta)$$
$$\log DF = \log BD + \log \cos (180^\circ - \delta)$$

Die

Die ganze Rechnung wird also sehr leicht durch Logarithmen geführt.

Hier in der XLIIsten Figur fallen beyde Perpendiculärlinien AE, BF, ausserhalb der Dreyecke ACD, CBD, und E liegt linker Hand C; F rechter Hand D. Man wird nun gar leicht aus einer roh entworfenen Zeichnung, oder auch selbst aus Beschaffenheit der Winkel an der Standlinie CD, beurtheilen können, welche Lage in jedem Falle die Punkte E, F, mithin auch die zugehörigen Perpendiculären AE, BF haben.

Nachdem man nun die Größen CE, AE, BF, DF, berechnet hat, so wird man auf dem Papiere gar leicht die Punkte a, b, Fig. XLI. bestimmen können. Man nehme nemlich auf der verjüngten Standlinie cd, die Weiten ce, df, denen berechneten CE, DF gemäß, errichte durch e, f, ein paar senkrechte Linien, und nehme auf ihnen die Weiten ea, fb, denen EA, FB, gemäß, so wird man die Weite ab auf dem Papiere erhalten, welche der AB auf dem Felde gemäß seyn wird.

Um die Form der Berechnung zu übersehen, so will ich die Zahlen des obigen Beyspiels in der III. Aufl. (18) gebrauchen.

Diese geben demnach

$$\begin{array}{rl}
\log m & = 3{,}18118 \\
l \sin \alpha & = 9{,}88255 \\ \hline
 & \ 13{,}06373 \\
l \sin B & = 9{,}75913 \\ \hline
\log BD & = 3{,}30460 \\
l\, f\,(180^\circ - \delta) & = 9{,}99819 \\
l \cos (180^\circ - \delta) & = 8{,}95867 \\ \hline
\log BF & = 3{,}30279 \\
\log DF & = 2{,}26327 \\
\log m & = 3{,}18118 \\
l \sin \gamma & = 9{,}99999 \\ \hline
 & \ 13{,}18117 \\
l \sin A & = 9{,}64902 \\ \hline
\log AC & = 3{,}53215 \\
l\, f\,(180^\circ - \beta) & = 9{,}95229 \\
l \cos (180^\circ - \beta) & = 9{,}64749 \\ \hline
\log AE & = 3{,}48444 \\
\log CE & = 3{,}17964
\end{array}$$

Dieß giebt also

$$AE = 3051;\ CE = 1512$$
$$BF = 2008;\ DF = 183$$

Wobey

Wobey dann zu bemerken ist, daß in diesem Beyspiele, der Punkt E rechter Hand C, und F gleichfalls rechter Hand D liegen muß, wonach man sich also bey der Zeichnung zu richten hat.

Diese Methode, die Punkte A, B auf dem Felde, zu Papiere zu bringen, hat in Absicht der gewöhnlichen, wobey man sich wohl gar des gemeinen Transporteurs zum Auftragen der Winkel bedienet, sehr viele Vorzüge, ob sie gleich, wegen einiger Rechnung, die aber in der That sehr leicht ist, etwas zusammengesetzter zu seyn scheint. Wenn man zum Auftragen der Winkel sich auch gleich des geradlinigten Transporteurs bedienen wollte, so wird man doch nie die Schärfe erhalten, welche man in Entwerfung der Punkte A, B. vermittelst der Perpendiculärlinien EA, BF, sich zu versprechen hat.

Wenn man ferner überlegt, wie sehr die vielen Kreisbogen, die man beym Gebrauche des geradlinigten Transporteurs ziehen muß, einen Riß verunzieren, wie vielen Unbequemlichkeiten, besonders bey sehr stumpfen oder spitzen Winkeln, der geradlinigte Transporteur unterworfen ist, wie wenig Genauigkeit man sich zu versprechen hat, wenn, wie es sehr oft zu geschehen pflegt, sich die verlängerten Schenkel der aufgetragenen Winkel, bey a, b, unter sehr

sehr spitzen Winkeln durchschneiden, und sich folglich sehr an einander fortschleifen, wie viel Fehler man überhaupt beym Austragen der Winkel, noch aus sehr vielen andern Ursachen zu befürchten hat, so wird man gewiß eine kleine Berechnung der Perpendiculärlinien EA, CE rc. nicht scheuen, und da bey Entwerfung mehrerer Oerter aus einer Standlinie, einige derselben oft sehr weit von der Standlinie wegliegen, so wird man auch durch die Größe der berechneten Perpendiculärlinien AE, CE u. s. w. schon ohngefähr einen Ueberschlag machen können, theils, wie man die Standlinie auf dem Papiere am bequemsten legen, theils auch, wie groß man den verjüngten Maaßstab nehmen müsse, damit man alle Oerter auf der vorgegebenen Größe des Papiers erhalte, und nicht einige ausserhalb desselben fallen, wie z. E. (§. 183. II.). Uebrigens geschiehet es bey Vermessung ganzer Landschaften, sehr oft, daß man die Entfernung solcher Oerter, die man schon zu Papiere gebracht hat, wieder zu neuen Standlinien und zur Bestimmung anderer Oerter gebraucht, und da ist es schlechterdings nothwendig, auf ihre Verzeichnung alle mögliche Sorgfalt zu wenden, weil sich sonst Fehler auf Fehler häufen, und alle Arbeit vergeblich seyn würde. Nie wird man aber durch würkliche Auftragung der Winkel, die zu dieser Arbeit nöthige Genauigkeit erhalten

Anmer-

Anmerkungen, die Standlinie betreffend.

§. 185. I. Wenn die Punkte A, B auf dem Felde, sowohl unter sich, als auch von der Standlinie, sehr weit wegliegen, und es die Umstände nicht zulassen, die Standlinie CD sehr groß und bequem anzunehmen, so werden die Winkel CAD, CBD in solchem Falle oft sehr klein werden, und dieses verursacht, 1) daß sich die Linien CA, DA; CB, DB, (und also auch die correspondirenden auf dem Meßtische) sehr aneinander fortschleifen, wodurch also auf dem Meßtische, wo die gezogenen Linien eine körperliche Dicke haben, selten recht genau die wahren Durchschnittspunkte angegeben werden können. 2) Daß die Weite AB dennoch sehr unsicher gefunden wird, wenn man auch gleich die Winkel mit dem Astrolabio messen, und AB durch Rechnung finden wollte. Denn die Folge wird lehren, daß, wenn die Winkel CAD, CBD, sehr klein werden, folglich ACD + ADC, oder BCD + BDC sehr nahe an 180° kommen, alsdann kleine Fehler, die man bey Messung der Winkel an beyden Standpunkten begehet, auf die gesuchte Weite AB, sehr großen Einfluß haben, und sie mit einer desto größern Unrichtigkeit geben, je kleiner CAD, CBD sind.

Zur Richtigkeit des Verfahrens muß man also 1) eine sehr kleine Standlinie vermeiden,

2) dafür sorgen, daß man an ihr nicht zu stumpfe oder spitze Winkel erhält. Oft läßt sich aber wegen der unbequemen Lage der Gegend, keine Standlinie unmittelbar messen, die den erwähnten Bedingungen ein Genüge leistet. Wie wird man also bey solchen Umständen verfahren?

Es sey Fig. XLIII. AB die auszumessende Entfernung; die Gegend verstatte es nicht, eine größere und bequemere Standlinie, als die CD, unmittelbar zu messen. Da nun CD so liegt, daß z. E. bey D ein paar sehr stumpfe Winkel CDA, CDB, vorkommen, und dieses der Richtigkeit, in Bestimmung der Weite AB, nachtheilig ist, so wähle man eine andere Standlinie CE, wenn man sie gleich nicht unmittelbar messen kann, und nehme sie von einer solchen Größe und Lage, wie nach den vorhergehenden Bedingungen erfordert wird. Da man sie aber nicht unmittelbar messen kann, so bediene man sich der erstern Standlinie CD, und bestimme aus ihr die zweyte CE; hier würde man also z. E. bey C, D, die beyden Winkel DCE, CDE, messen, und in dem Dreyecke CDE, aus den erwähnten Winkeln, und der unmittelbar gemessenen CD, die neue Standlinie CE berechnen. Dieser Standlinie CE bediene man sich nun zur Bestimmung der Weite AB, indem man an ihr die Winkel ACB, ACE, CEA, CEB misset rc., so wird man

man AB gewiß viel richtiger finden, als es vermittelst der bloßen Standlinie CD geschehen konnte, weil nunmehr die Triangel an CE nicht so spitzige oder stumpfe Winkel, wie die an CD, bekommen.

Fände man, daß die neue Standlinie CE noch nicht groß genug wäre, oder gegen AB eine schickliche Lage hätte, so könnte man aus der CE, abermahls eine neue Standlinie bestimmen, und auf diese Art so lange fortfahren, bis man für AB eine schickliche und gehörige Standlinie erhielte.

Dieses Mittel, von einer kleinen und unschicklichen Standlinie wie CD, immer zu größern und bequemern fortzugeben, lehret und empfiehlt *Taquet* (s. dessen Opera mathem. Antwerp. 1707. Geom, pract. lib. I. Cap. V. Probl. III.).

II. Wenn in den bisherigen Auflösungen der vorgelegten Aufgabe, die angenommene Standlinie horizontal ist, und die Winkel an ihr auch horizontal gemessen werden, so erhält man durch Rechnung oder Zeichnung, eigentlich den Horizontalabstand der Objecte A, B (§. 7.) und diesen verlangt man doch gewöhnlich, sowohl bey Entwerfung ganzer Landschaften, als auch, wenn man bloß von der Entfernung der Gegenstände A, B redet.

Die Winkel kann man nun in den meisten Fällen immer horizontal erhalten, wenn das Werkzeug mit einer Kippregel (§. 100) versehen ist, die man beym horizontalen Stande des Instruments, nach den etwa erhabenen Gegenständen A, B, hinrichtet. Hat aber das Werkzeug keine Kippregel, so muß man an den Standpunkten die schiefen Winkel messen, und aus den Neigungen ihrer Schenkel gegen den Horizont, welche man entweder nach dem Augenmaaße annehmen, oder auch selbst messen kann, die Horizontalwinkel nach den Vorschriften des Xten Kapitels §. 141. V. durch Rechnung bestimmen.

Die Standlinie läßt sich aber nicht immer genau horizontal annehmen und messen. In diesem Falle muß man aus den Umständen beurtheilen, ob man ihre Schiefe, wenn sie nicht sehr beträchtlich ist, außer Acht lassen darf, oder ob man genöthigt ist, ihre horizontale Größe durch Nivelliren, oder nach andern Methoden, wie z. E. nach den §§. 38. (6.) 41. 44. u. s. w. zu bestimmen.

III. Bey Entwerfung ganzer Landschaften, nimmt man oft die Entfernung zweyer Bergspitzen, zweyer Thürme u. s. w. zu Standlinien an. Diese Standlinien kann man selten unmittelbar messen, und selten liegen die Standpunkte in einer Horizontalebene. In diesem Falle werden nun dergleichen Standlinien nach

der

der Methode (I) aus einer andern vorher durch Rechnung bestimmt.

Aufgabe.

§. 186. A, B, C, Fig. XLIV. sind drey Oerter auf dem Felde, deren Lage gegen einander bekannt ist; D ist ein vierter Ort; man soll finden, wie weit er von denen A, B, C, entfernt ist.

Aufl. I. Um die Lage der drey Objecte A, B, C zu bestimmen, so seyen in dem Dreyecke ABC, gegeben oder bekannt die Seiten AB = b, BC = c und der eingeschlossene Winkel ABC = β. Es erhellet, daß man auch andere Stücke des Dreyecks als gegeben ansehen könne, wenn sie nur das Dreyeck bestimmen.

II. Man messe nun an dem Orte D, die beyden Winkel ADB = δ, BDC = ε, so werden sich daraus die Entfernungen AD, BD, DC durch trigonometrische Rechnung finden lassen.

III. Man nenne den unbekannten Winkel BAD = x, so ist in dem Vierecke ABCD, der Winkel.

$$\begin{aligned} BCD &= 360^\circ - ABC - BAD - ADC \\ &= 360^\circ - \beta - x - \delta - \varepsilon \\ &= \mu - x \end{aligned}$$

wenn man der Kürze halber

$$360° - \beta - \delta - \varepsilon = \mu \text{ nennt.}$$

IV. Nun hat man in den beyden Dreyecken BAD, BDC

$$\sin ADB : AB = \sin BAD : BD$$
$$\sin BDC : BC = \sin BCD : BD$$

oder $\sin \delta : b = \sin x : BD$

$$\sin \varepsilon : c = \sin (\mu - x) : BD$$

also $BD = \frac{b \sin x}{\sin \delta}$; $BD = \frac{c \sin (\mu - x)}{\sin \varepsilon}$

folglich $\frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta} = \frac{\sin (\mu - x)}{\sin x}$

Aber aus (Trig. S. XII. 2.) folgt

$$\frac{\sin (\mu - x)}{\sin x} = \frac{\sin \mu \cos x - \sin x \cos \mu}{\sin x}$$

$$= \sin \mu \cot x - \cos \mu$$

also ist $\cos \mu + \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta} = \sin \mu \cot x$

Mithin wegen $\frac{\cos \mu}{\sin \mu} = \cot \mu$. Der Werth von

$$\cot x = \cot \mu + \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta \sin \mu}$$

V. Ist nun auf solche Art der Winkel x gefunden, so hat man aus (IV) auch die Weite BD, und in den Dreyecken ABD, BCD ist genug

genug bekannt, um auch die Seiten AD, CD durch Rechnung zu finden.

VI. Bey Berechnung der Cotangente des Winkels x (IV) ist zu bemerken, daß alle trigonometrische Linien für den Sinus totus = 1 genommen werden müssen, und wenn für cot x ein negativer Werth herauskömmt, so zeigt dieses an, daß der Winkel x stumpf sey. Man suche also in solchem Falle einen spitzigen Winkel, dessen Tangente eben den bejahten Werth hat, addire zu diesem Winkel 90°, so hat man den eigentlichen stumpfen Winkel x.

Ex. Es sey $\beta = 115°$; $\delta = 25°$; $\varepsilon = 45°$; $b = 1112$ Fuß, $c = 2000$ Fuß, so wird $\mu = 175°$ mithin

$$\begin{array}{lll} & \log b & = 3,0461048 \\ & \log \sin \varepsilon & = 9,8994850 - 10 \\ \hline & \log b \sin \varepsilon & = 2,8955898 \\ \text{Ferner} & \log c & = 3,3010300 \\ & \log \sin \delta & = 9,6259483 - 10 \\ & \log \sin \mu & = 8,9402960 - 10 \\ \hline & l\, c \sin \delta \sin \mu & = 1,8672743 \text{ daher} \end{array}$$

$$l\,\frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta \sin \mu} = 1,0283155$$

welches die Größe $\frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta \sin \mu} = 10,67371$ giebt.

Nun

Nun ist $\cot \mu = \cot 175° = \cot (90° + 85°)$ $= - \tang 85°$ (Trig. S. XXII. $= - 11,43005$ dieß giebt demnach

$\cot x = - 11,43005 + 10,67371 = - 0,75634$

Da also hier $\cot x$ verneint wird, so ist x stumpf.

Man suche also einen spitzen Winkel, dessen Tangente 0,75634 ist. — Man findet ihn in den Tafeln $= 37° 6'$, addire 90° dazu, so wird $x = 127° 6'$.

Die Berechnung der Seiten AD, BD, CD, werde ich hier nicht vornehmen, denn sie ist, nachdem man den Winkel BAD $= 127° 6'$, mithin auch die übrigen Winkel ABD, DBC, BCD, gefunden hat, nach den Proportionen.

$\sin \delta : b = \sin x : BD$
$\sin \delta : b = \sin ABD : AD$ wo $ABD = 180° - x - \delta$
u. s. w.

gar leicht durch Logarithmen anzustellen.

Eine andere Formel für die Auflösung dieser Aufgabe giebt Hr. Doct. Burkhardt in Hrn. v. Zachs monatlichen Correspondenz, Oct. 1801. S. 360. Ich finde die Rechnung in der Hauptsache nicht viel kürzer, als die nach meiner Formel, der man leicht noch viel andere Gestalten geben kann.

VII.

VII. So kann man, indem man bloß an dem Standpunkte D, die zwey Winkel δ, ε misset, leicht die Weiten AD, BD, DC, durch Rechnung, so genau man will, finden. Man kann aber, wenn es um keine sehr große Schärfe zu thun ist, die Weiten AD, BD, DC, auch durch eine geometrische Construction finden.

Nachdem man in Fig. XLV. ein Dreyeck abc, auf dem Papiere beschrieben hat, welches dem ABC auf dem Felde ähnlich ist, so beschreibe man ferner über der Seite ac einen Kreis, dergestalt, daß ac die Chorde eines Bogens amc werde, der doppelt so groß ist, als das Maaß des auf dem Felde observirten Winkels ADC. Nehme hierauf von a bis m die Chorde eines Bogens am, der doppelt so viel Grade hält, als der auf dem Felde beobachtete Winkel ADB, ziehe durch m, b, eine gerade Linie mbd, so wird diese bey d im Umfange des Kreises einen Punkt bestimmen, der gegen die Punkte a, b, c, eben so liegt, wie D auf dem Felde, gegen die Oerter A, B, C; und die Weiten ad, bd, dc, werden denen AB, BD, DC auf dem Felde gemäß seyn.

Bew. Denn weil der Winkel adc am Umkreise, zu seinem Maaße den halben Bogen amc hat, und der Bogen amc doppelt so viel Grade rc. hält, als der Winkel ADC auf

dem

dem Felde, so ist klar, daß der Winkel adc = ADC seyn müsse.

Auf eben die Art ist auch der Winkel adb vermöge der Construction = ADB.

Es muß also der Punkt d gegen die drey a, b, c nothwendig eben die Lage haben, welche D gegen A, B, C, hat, weil durch das Dreyeck abc, und die beyden Winkel adb, adc, der Punkt d, völlig so bestimmt ist, so wie es D, vermöge des Dreyecks ABC, und der beyden Winkel ADB, ADC ist.

Mithin müssen die Weiten ad, bd, cd, nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man das Dreyeck abc aufgetragen hat, denen AD, BD, CD gemäß seyn.

VIII. Wegen der Ziehung des Kreises amcd muß ich noch folgendes erinnern.

Um dessen Halbmesser zu finden, bediene man sich des geradlinigten Transporteurs, oder noch besser, eines tausendtheiligten Maaßstabes (§. 65. XI.) auf folgende Art.

Man verzeichne Fig. XLVI. einen willkührlichen Winkel KIM, trage von I bis K, den Halbmesser des geradlinigten Transporteurs, oder tausend Theile des tausendtheiligten Maaßstabes,

stabes, von I bis L die Chorde oder Seite ac des Dreyecks abc, Fig. XLV., von I. bis M die Chorde des doppelten Winkels ADC, oder adc nach dem tausendtheiligten Maaßstabe; (z. E. die Chorde von $2(\delta+\varepsilon) = 140°$ in dem Beyspiele (VI), ziehe durch K, M, eine gerade Linie, und durch L mit KM eine parallele, so wird, wie sich leicht übersehen läßt, IN der Halbmesser eines Kreises seyn, für welchen ac die Chorde von $2 \cdot adc = 2(\delta+\varepsilon)$ ist. Man fasse also IN mit dem Zirkel, und beschreibe aus a, c, ein paar sich bey n durchschneidende Kreisbogen, so wird n der Mittelpunkt des zu ziehenden Kreises amcd seyn.

Um die Chorde am einzutragen, so trage man Fig. XLVI. von I bis r die Chorde des doppelten Winkels $ADB = \delta$, nach dem tausendtheiligten Maaßstabe, und ziehe hierauf mit Kr, durch N eine parallele Np, so wird Ip die Chorde eben dieses Winkels, für den Halbmesser des Kreises amcd seyn, die man daher von a bis m in den Kreis einzutragen hat.

IX. Will man des Kreises (Fig. XLV.) Halbmesser $= \rho$ durch Rechnung finden, so ist wegen $ac = 2\rho \sin adc = 2\rho \sin(\delta+\varepsilon)$;

$$\rho = \frac{ac}{2\sin(\delta+\varepsilon)} = \tfrac{1}{2}\, ac \operatorname{cosec}(\delta+\varepsilon)$$

wo

wo demnach ρ in dem Maaße gefunden werden kann, als womit man etwa ac gemessen haben könnte.

X. Die einzutragende Chorde am wäre $= 2 \rho \sin \delta = \sin \delta \operatorname{cosec} (\delta + \varepsilon) \, . \, ac$.

Mechanicus Branders mechanische Auflösung dieser Aufgabe.

§. 187. Er ertheilt solche am Ende seiner Beschreibung eines Universal-Meßtisches (Augsb. 1772.), und verfährt auf dem Felde folgendergestalt. Fig. XLVII.

Man bringe über den Standpunkt D das Meßtischgen, und bestimme auf demselben den Punkt d, lothrecht über D. Aus d ziehe man auf dem Papiere nach den Objecten A, B, C, die Richtungslinien dα, dβ, dγ. Nun seyen EO, OF, ein paar Liniale, dergestalt mit einander verbunden, daß sie, wie die Figur ausweiset, um einen Zapfen bey O, ohngefähr wie die Schenkel eines Zirkels um ihren Kopf, beweglich sind, und durch eine Schraube nach Gefallen in jeder Oeffnung festgehalten werden können.

Beyde Liniale OE, OF, seyen bey i, k, mit ein paar beweglichen Hülsen versehen, an denen sich sehr scharfe stählerne Spitzen, oder

Stifte

Stifte a, c, befinden. Unter dem Umdrehungspunkte O, befinde sich eine dritte dergleichen Spitze b. So stellet also dieses Werkzeug gleichsam einen dreyspitzigen Stangenzirkel vor, und durch Verschiebung der Hülsen sowohl, als auch durch gehörige Oeffnung der beyden Liniale, wird man machen können, daß zwischen den drey Spitzen a, b, c ein beliebiges Dreyeck enthalten ist. Um nun dieses Werkzeug zu gegenwärtiger Absicht zu brauchen, so fasse man auf einem verjüngten Maaßstabe, zwischen die drey Spitzen a, b, c die drey Seiten des Dreyecks ABC, so, daß die Weiten ab, bc, ac, denen AB, BC, AC gemäß werden. Setze nun den Stangenzirkel auf die gezogenen Richtungslinien $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ dergestalt, daß jede Spitze a, b, c auf die entsprechende Richtungslinie $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ zu stehen komme, mithin das kleine Dreyeck abc auf dem Meßtische, gegen den Punkt d, eben die Lage erhalte, die das Dreyeck ABC gegen D hat, so werden sich auf dem Meßtische die Weiten da, db, dc ergeben, welche nach dem verjüngten Maaßstabe, denen DA, DB, DC gemäß seyn werden.

Dieses ist ein Verfahren, welches nach der Versicherung Hrn. Branders, auf dem Felde sehr geschwind von statten gehet.

Statt eines solchen Stangenzirkels mit drey Spitzen, könnte man sich auch Handzirkel bedienen, die mit drey Schenkeln versehen sind, dergleichen man unterweilen in Reiszeugen antrifft, und in Leupolds Theatro Machinarum Geom. beschrieben findet.

Zus. Weil die Entfernungen da, db, dc, ab, bc, denen DA, DB, DC, AB, BC, gemäß sind, weil folglich, in den Dreyecken dab, DAB; da : ab = DA : AB, und in den Dreyecken dbc, DBC; dc : cb = DC : CB ist, so sind die Seiten ab mit AB und bc mit BC, und auf eben die Art auch ac mit AC parallel.

Anmerkungen.

§. 188. I. Diese Aufgabe ist nicht nur, wie bisher gelehret worden, bey Messung der Weiten von großen Nutzen, sondern kann auch selbst bey Entwerfung ganzer Landschaften mit Vortheil angewandt werden. Hr. *Dupain de Montesson*, Kunst alles in Grundriß zu bringen, was auf den Krieg, oder auf die bürgerliche und öconomische Baukunst Beziehung hat (aus dem Franz. übers.), Dresden und Leipzig 1781. erwähnt im I. Th. S. 19., des Hrn. *Pothenot* als Erfinder dieser Aufgabe. Ein Aufsatz von ihm befindet sich in den Mem. de l'Ac. royale de sc. à Paris 1692. p. 188.

Clai-

Clairaut (Anfangsgr. der Geometrie aus dem Fr. von F. J. Bierling III. Theil §. XXII.) und Lambert in seinen Beyträgen zur practischen Geometrie §. 109. behandeln die bisherige Aufgabe gleichfalls, und empfehlen sie den Feldmessern. Auch hat Kästner in seinen geom. Abh. (1. Samml. 51.) trigonometrische Formeln dazu gegeben.

II. Bey Auflösung der bisherigen Aufgabe siehet man den lothrecht über D liegenden Punkt d auf dem Meßtische, als gegeben an, und bestimmt die Weiten da, db, dc, dadurch, daß man dem ganzen Dreyecke abc, seine gehörige Lage gegen d giebt. Die Auflösung würde aber ganz anders ausfallen, wenn das Dreyeck auf dem Meßtische bereits vorgezeichnet wäre, und der Punkt d gesucht werden sollte. In diesem Falle würde offenbar Hrn. Branders Auflösung einiger Abänderung bedürfen. Indessen ist aber gerade der leztere Fall wichtig, bey Entwerfung der Landschaften. Wenn es bloß darum zu thun ist, die Weiten DA, DB, DC auf dem Felde zu bestimmen, so kann man nach Hrn. Branders Art verfahren; Wenn aber A, B, C, drey Oerter auf dem Felde sind, die man bereits durch a, b, c, auf dem Meßtische entworfen hat, und soll nun den Standort des Meßtisches D, durch den Punkt d auf dem

Meß-

Meßtische angeben, so daß d gegen die bereits verzeichneten Punkte a, b, c, eben die Lage bekomme, die D gegen A, B, C, hat, so muß man offenbar auf eine andere Auflösung bedacht seyn.

Man siehet leicht, daß in dem letztern Falle die Hauptsache darauf ankomme, den Meßtisch so zu stellen, daß die Seiten ab, bc, ac, mit den zugehörigen AB, BC, CA, eine parallele Lage erhalten (§. 187. Zus.), denn unter solchen Umständen darf man nur an die Punkte a, b, c die dioptrische Regel legen, nach den Objecten A, B, C, visiren, und die Richtungslinien αa, βb, γc, rückwärts verlängern, so werden sie sich insgesammt auf dem Meßtische bey d durchschneiden, und solchergestalt den verlangten Punkt d angeben, der gegen a, b, c, dieselbe Lage haben wird, die D gegen A, B, C, hat.

In der Folge werde ich nun zeigen, wie man bey D dem Meßtische eine solche Lage geben könne, daß ab, bc, ac, den zugehörigen Linien auf dem Felde AB, BC, AC parallel werden.

III. In der bisherigen Aufgabe lagen die drey Punkte A, B, C nicht in einer geraden Linie; sie können aber auch, wie in der Fig. XLVIII, in einer geraden Linie liegen, und

so

so ist dieses alsdann ein besonderer Fall der allgemeinen Auflösung in §. 186. III. IV. Es ist alsdann der dortige Winkel β hier $= 180°$, und der gesuchte Winkel x, hier der DAC.

Anmerkung.

IV. 1. Ich halte es nicht für überflüssig, hier noch einige andere einzelne Fälle durchzugehen, welche unter der allgemeinen Formel (§. 186.) enthalten sind.

2. In (Fig. XLIV.) und in (§. 186.) ist nemlich angenommen worden, daß die Punkte B und D auf verschiedenen Seiten der Linie AC liegen. Dann ist also der Winkel ABC, oder β, wenn man ihn zugleich als einen Winkel des Vierecks ABCD betrachtet $< 180°$.

3. Fällt B in AC selbst, so hat man für diesen Fall $\beta = 180°$ in der Formel (§. 186).

4. Fällt B diesseits AC, wie Tab. VII. Fig. LXXXVII, so daß nunmehr B und D auf einerley Seite von AC liegen, so muß man nunmehr unter β in (§. 186.) nicht den Winkel ABC innerhalb des eben so genannten Dreyecks verstehen, sondern den erhabenen in dem Vierecke ABCD, so weit er hier mit dem Bogen bezeichnet ist, nemlich die

Er-

Ergänzung des Winkels ABC des gegebenen Dreyecks, zu 360°. Dieß läßt sich aus der Art, wie sich das Viereck ABCD der XLIVten Fig. in das ABCD der LXXXVIIten Fig. verwandelt, leicht übersehen.

5. Nennt man demnach den Winkel ABC innerhalb des Dreyecks (Fig. LXXXVII.) jezt $= B$, so muß man bey Anwendung der Formel (§. 186.) auf den Fall (4) in (§. 186. III. IV.) $\beta = 360° - B$, also $\mu = B - \delta - \varepsilon$ setzen. Alles übrige in der Berechnung des Winkels $BAD = x$ bleibt unverändert wie §. 186. IV.

6. Man lasse B (4) sich dem Punkte D nähern, doch so, daß B immer innerhalb des Triangels ACD bleibe, so wird der Winkel B dem Winkel $D = \delta + \varepsilon$ immer näher und näher kommen, und der Unterschied $\beta - \delta - \varepsilon$ (5) immer kleiner und kleiner werden. Fällt B in D, so ist $B - \delta - \varepsilon = 0$, also $\mu = 0$, und der Winkel BAD, oder x wird selbst $= 0$, wie aus (§. 186. IV.) auch erhellet, weil für $\mu = 0$, cot x unendlich wird.

7. Läßt man den Punkt B sich noch weiter fort bewegen, so fällt nunmehr der Standort D innerhalb des gegebenen Dreyecks ABC (Fig. LXXXVIII.), so lange übrigens, wie in allen bisherigen Fällen, die beyden

den Winkel ADB $=\delta$ und BDC $=\varepsilon$ auf unterschiedenen Seiten von der durch B und D eingebildeten geraden Linie BD fallen, und es ist nunmehr der Winkel ABC wie bisher (5) $=$ B, auch ADB $=\delta$, BDC $=\varepsilon$, DAB $=$ x, wie bisher, und der Winkel BCD in dem Vierecke ABCD $= 360° - B - x - \delta - \varepsilon$; alle übrige Rechnnng bleibt wie (§. 186. III. — V.). Also ist jetzt in der Formel (§. 186. IV.) $\beta = B$ und $\mu = 360° - B - \delta - \varepsilon$.

8. Wenn in (7) der Standort D zwischen A und *B*, in gerader Linie mit A und B, fiele, wie (Fig. LXXXIX), so würde man in (7) den stumpfen Winkel ADB also $\delta = 180°$ setzen müssen. Dieß gäbe demnach für diesen Fall $\mu = 180° - B - \varepsilon$, und x wieder $= 0$, weil der Winkel DAB $=$ x der LXXXVIIIsten Figur $= 0$ wird, so bald D in AB fällt. Dieß giebt auch die Formel (§. 186. IV.) auf den gegenwärtigen Fall angewandt, weil cot x für $\delta = 180°$ unendlich wird, wegen $\sin \delta = 0$

9. Fiele D in die gerade Linie CB; so wäre $\varepsilon = 180°$, also in (§. 186. IV.) $\cot x = \cot \mu$, folglich $x = \mu = 180° - B - \delta$, wie auch leicht aus einer für diesen Fall entworfenen Figur sich einsehen läßt.

10. Fiele D ausserhalb des Dreyecks, wie Fig. LXXXX., so wäre dieß wieder der Fall der XLIVsten Figur. Nur daß jetzt AB in Ansehung der Punkte D und C das wäre, was AC (Fig. XLIV.) in Ansehung der Punkte B und D war.

Man nenne demnach jetzt (Fig. LXXXX.) den Winkel ACB in dem gegebenen Dreyecke $= \beta$; $AC = b$; $BC = c$; $CAD = x$; $ADC = \delta$; $BDC = \varepsilon$; so bleibt alle Rechnung wie (§. 186. IV.), um die Entfernungen AD, CD, BD, der Winkelpunkte des gegebenen Dreyecks ABC, von dem Standorte D zu finden.

11. Auf diese Art zeigt sich sehr leicht; wie in einem jeden vorgegebenen Falle die Aufgabe (§. 186.) zu behandeln ist.

12. Wer die Aufgabe (§. 186.) auf dem Felde anwenden will, um die Lage des Standorts D, aus den bey D visirten Winkeln δ und ε, oder aus den scheinbaren Weiten der Seiten AB, BC, des gegebenen Dreyecks ABC zu finden, der muß an dem Standorte D schon vorläufig wissen, ob B jenseits AC, oder diesseits AC liege, ob also die Auflösung (§. 186. IV.) oder hier (4) vorzunehmen ist. Denn wer bey D nach B visirt, kann in manchen Fällen aus dem bloßen Sehen

hen nicht wissen, ob ihm B jenseits oder diesseits AC liege, er müßte denn im Schätzen der Weiten AD, BD, CD, nach dem Augenmaaße geübt seyn, oder aus einer etwa schon vorhandenen Charte, dies beurtheilen können. Dieß möchte aber, zumahl wenn AD, BD, CD, nicht sehr von einander unterschieden sind, nicht allemahl sicher genug geschehen.

Diese wichtige Bemerkung hat Kästner, Geometr. Abh. I. Sammlung (Göttingen 1790.) 51. Abh. (39), der gegenwärtigen Aufgabe beygefügt, und man sieht leicht, daß auch bey der Branderischen Auflösung derselben (§. 187.) Rücksicht auf diesen Umstand zu nehmen ist. Man kann nemlich Fig. XLVII. die drey Spitzen a, b, c des Stangenzirkels, auf die visirten Linien Dα, Dβ, Dγ auch so stellen, daß der Kopf O des Stangenzirkels, oder die unter ihm befindliche Spitze b, mit dem Punkte d auf einerley Seite von ac zu liegen kömmt.

So könnte auch in (§. 186. VII.) das gegebene Dreyeck abc die Lage $\alpha\beta$c Fig. XLV. Nr. 2. in dem Kreise haben, da denn hier nach dem Verfahren (§. 186.) der Punkt δ im Umfange, statt d in Fig. XLV. N. 1., erhalten werden würde, wo δ und β im gegenwärtigen Falle auf einerley Seite von ac zu liegen kämen.

Nicht gar zu große Weiten aus einem einzigen Stande zu messen.

§. 189. 1. Man hat verschiedene Werkzeuge ausgedacht, aus einer sehr kleinen Standlinie, z. E. nur von einigen Fußen, dennoch mit erträglicher Genauigkeit, Entfernungen zu messen, und man nennet diese Messungsart, die Messung aus einem einzigen Stande, weil man eine so kleine Standlinie, ohne sich weit von der Stelle zu bewegen, erhalten und messen kann. Um nun aus so kleinen Standlinien Entfernungen zu messen, so sind die zu dieser Absicht erfundenen Werkzeuge vorzüglich dahin gerichtet, die sogenannten parallactischen Winkel mit großer Schärfe zu messen.

2. Es sey Fig. XLIX. AB eine sehr kleine Standlinie, und C ein Gegenstand, dessen Weite CA, oder CB man finden soll, so heißt der Winkel ACB, welcher der Standlinie AB gegenüber stehet, der parallactische Winkel, oder die scheinbare Größe der Standlinie am Punkte C.

3. Nun erhellet, daß, wenn AB sehr klein, AC, BC, aber beträchtlich groß sind, auch der parallactische Winkel C sehr klein seyn werde.

4. Da die Lage einer so kleinen Standlinie immer von unserer Willkühr abhängt, so kann man AB so annehmen, daß der Winkel CAB ein rechter ist, oder wenigstens einem rechten sehr nahe kömmt. Geschiehet dieses, so wird auch B beynahe ein rechter Winkel, mithin ohne merklichen Irrthum ACB ein gleichschenklichtes Dreyeck, worinn man aus der Größe des parallactischen Winkels C, und der Standlinie AB, die Weiten AC, BC durch Rechnung finden kann. Es wird nemlich $\sin C : AB = \sin tot : BC$ oder $BC = AC = \frac{AB}{\sin C}$ weil ich $\sin tot = 1$ setze. Ist nun C sehr klein, mithin ohne merklichen Irrthum $\sin C = C$ (oder $= \frac{C}{206264}$, wenn C in Secunden gegeben wäre), so findet sich

$$BC = AC = \frac{AB}{C} \cdot 206264.$$

5. Es kömmt also nur darauf an, den parallactischen Winkel C ausfindig zu machen. Am besten wäre es, wenn man würklich nach C hinkommen, und diesen Winkel messen könnte. Da dieser Winkel sehr klein ist, so würde man ihn, ohne Winkelmesser, bloß vermittelst eines Fernrohrs, das mit einem Micrometer versehen wäre (§. 172 u. f.), messen können, wenn man nehmlich untersuchte,

wie

wie viel Schraubenumdrehungen, oder Abtheilungen eines Glasmicrometers, dem Bilde der Standlinie AB im Fernrohre bey C, zugehörten. Vorausgesetzt, daß des Fernrohrs Feld, die scheinbare Größe ACB noch fasset.

6. Ein Beyspiel zu dieser Berechnung hat Hr. Hofr. Kästner in seinen geometrischen Abhandl. I. Samml. 48. Abh. an den Ruinen der Hessischen Gleichen die man auf der Göttingischen Sternwarte sehen kann, gegeben. Ein Zwischenraum innerhalb dieser Ruinen von 86 Calenbergischen Fußen = AB hatte auf der Sternwarte bey C eine scheinbare Größe, oder parallactischen Winkel von 8′. 44″ = 524 Sec. Um daraus den Abstand des Gegenstandes von der Sternwarte zu finden, wäre in (4.) AB = 86; C = 524 also

$$\begin{aligned} \log 206264 &= 5,3144252 \\ \mathrm{l\ AB} &= 1,9344984 \\ \hline & 7,2489236 \\ \log C &= 2,7193313 \\ \hline \log AC &= 4,5295924 \\ \text{also } AC &= 33852 \text{ Fuß.} \end{aligned}$$

Hr. Hofr. Kästner zeigt, daß wenn der parallactische Winkel statt 8′. 44″ z. E. nur 8′. 40″, 5 wäre, dieß in dem Schenkel AC schon einen Fehler von 228 Fußen geben würde, welches zeigt, wie genau man die parallactischen Winkel muß messen können, wenn das

Ver-

Verfahren, daraus Entfernungen zu berechnen, eine erträgliche Genauigkeit haben soll.

In einer Abhandlung de micrometris objectis terrestribus adhibendis, welche Hr. Hofr. Kästner den 9. May 1786 der königl. Soc. der Wiss. in Göttingen vorgelesen hat, finden sich noch sehr viele nützliche Bemerkungen über den Gebrauch des bisherigen.

7. Wenn man wie in (5) den parallactischen Winkel bey C nicht unmittelbar messen kann, sondern ihn an der Standlinie AB, selbst (wie bey den sogenannten Messungen aus einem Stande verlangt wird) bestimmen will, so hat man eigene hierzu dienliche Werkzeuge erfunden, welche man Parallaxenmesser nennen könnte.

8. Man könnte aber denken, wozu sind neue und eigene Werkzeuge nöthig? Man messe mit dem Astrolabio bey A, B, die beyden Winkel A, B, so hat man auch $C = 180° - A - B$.

9. Allein man überlege, daß es wegen der geringen Größe der Standlinie AB, theils schwer hält, das Werkzeug mit der gehörigen Genauigkeit zu stellen, theils auch die geometrischen Winkelmesser von gewöhnlicher Größe, bey weitem nicht die gehörige Schärfe, bey Ausmessung dieser Winkel verstatten. Denn man

man müßte A, B, wenigstens bis auf einige Secunden genau messen können, wenn man den parallactischen Winkel so genau finden wollte, als beym Gebrauche einer so kleinen Standlinie nothwendig ist. Wie würde man aber dieses von Astrolabiis, die einen, oder wohl selbst $1\frac{1}{2}$ Fuß, im Durchmesser hätten, erwarten können? Andere Hindernisse zu geschweigen.

10. Man stelle sich Fig. L. durch A, B, ein paar parallele Linien Am, Bn vor, die mit CA, DB die kleinen Winkel mAC, CBn machen; auch durch C mit mA, nB, eine parallele Cr, so wäre der parallactische Winkel ACB bekannt, wenn man die kleinen Winkel mAC, CBn wüßte. Denn hier wäre z. E. $ACB = ACr + rCB = mAC + CBn$, weil die Linien parallel sind.

11. Oder man gedenke sich in Fig. LI. durch A mit BC eine parallele Aw, so hätte man gleichfalls den parallactischen Winkel, wenn man CAw messen könnte.

12 Auf diese beyden letztern Sätze (10. 11) gründen sich nun die Werkzeuge, parallactische Winkel zu messen, ohne selbst nach C hinzugehen, und da die Winkel, wie mAC, nBC, (10) CAw (11) nur klein sind, so erhellet,

daß

daß zur Messung derselben kein eingetheilter Rand von vielen Graden nöthig sey.

13. Ob aber gleich dieses ein Vortheil, und eine Ersparung der Kosten zu seyn scheinet, so darf man doch nicht erwarten, dergleichen Werkzeuge, so kleine Winkel zu messen, für einen wohlfeilen Preis zu bekommen. Um hievon überzeugt zu werden, so will ich nur einen ganz kurzen Begriff von dem zu dieser Absicht erfundenen Pacecianischen Pantometro beybringen.

14. Dieses Werkzeug bestehet Fig. LII. aus zwey rechtwinklichten hölzernen Tafeln A, B, die bey m, n durch Gewinde an einander hängen, und zusammengelegt werden können. OO, oo sind zwey Fernröhre, wenigstens $1\frac{1}{2}$ Fuß lang, davon das oo unbeweglich ist, das andere OO aber vermittelst einer Alhidadenregel, um das Centrum c, eben wie bey einem Winkelmesser gedrehet werden kann; de ist ein in die hölzerne Tafel A eingelassenes Stück Messing, worauf aus dem Mittelpunkte c einige Bogen gerissen sind, worauf sich Gradabtheilungen befinden, über die sich ein Index bey Umdrehung der Alhidadenregel verschiebt; die sanften Umdrehungen des Fernrohres, erhält man vermittelst einer Micrometerschraube bey r. Das ganze Werkzeug wird auf ein Stativ gestellt, und mit den zur Horizontal-

bewe-

bewegung und andern Stellungen nöthigen Vorrichtungen versehen.

Die Axen der beyden Fernröhre können nun vermittelst eines sehr weit entlegenen Gegenstandes, oder auf andere Arten, genau in eine parallele Lage gebracht werden, und wenn sie vollkommen parallel sind, so beträgt ihr Abstand O o etwa 4 bis 5 Fuß, den man aber übrigens sehr genau abmessen muß, weil er bey Bestimmung der parallactischen Winkel, die Standlinie abgiebt.

15. Der Gebrauch dieses Instruments ist nun folgender.

Bey Ausmessung' eines parallactischen Winkels C; Fig. LI. bedeute AB, den Abstand der beyden parallel gestellten Fernröhre (14). Man bringe nun durch gehörige Stellung des ganzen Werkzeugs, das unbewegliche Fernrohr o o genau in die Richtnng nach C, so wird das bewegliche O O, weil es dem unbeweglichen parallel ist, die Richtung A w, haben, die der B C gleichlaufend ist. Das Object C, wenn es also in der Axe des unbeweglichen Fernrohrs erscheinet, wird nicht zugleich in der Axe des beweglichen erscheinen, sondern um den parallactischen Winkel w A C = A C B davon abstehen. Drehet man also das bewegliche Fernrohr, bis das Object C in dessen

Axe

Axe erscheinet, so wird man sowohl durch Umdrehung der Micrometerschraube, als auch durch Fortrücken des Index auf den Gradabtheilungen, die Größe des parallactischen Winkels CAw erfahren.

16. Dieser ganz kurze Unterricht wird hinlänglich seyn, einzusehen, worauf es bey dergleichen Werkzeugen ankomme. Daß aber ein solches Werkzeug, wenn alle Theile die nöthige Vollkommenheit haben sollen, um keinen geringen Preiß verfertigt werden könne, wird man leicht begreifen.

17. Man hat zwar noch andere Erfindungen, z. E. durch Hülfe einiger Spiegel, in Verbindung mit einem Fernrohre, parallactische Winkel zu messen; aber immer bleiben dergleichen Werkzeuge sehr kostbar.

Das in (14) beschriebene rührt vom Grafen *Pacecco ob Ucedos* her, und man hat davon eine Beschreibung unter dem Titel: *Pantometrum Paceccianum, seu instrumentum novum pro elicienda ex una statione distantia loci inaccessa*, welche vom Hrn. P. Mayer zu Mannheim 1767. herausgekommen ist. In dieser Schrift wird erwähnt, daß der Churfürst von der Pfalz für dieses Instrument 1000 Gulden bezahlt habe.

Liesse sich auch gleich dieses Werkzeug für einen wohlfeilern Preiß verfertigen, so sehe ich doch nicht ein, warum man, bloß um Weiten aus einem einzigen Stande zu messen, die Kosten an ein solches, zu anderen Vermessungen sonst unbrauchbares Werkzeug, verwenden will. Denn wenn die parallactischen Winkel klein sind, so geben sie die gesuchten Entfernungen doch nicht mit großer Schärfe (6). Und wenn kömmt eben der Fall vor, daß es nothwendig wäre, aus so sehr kleinen Standlinien Weiten zu messen?. — Meistens wird man doch auf dem Felde immer Standlinien von erträglicher Länge finden, mithin das bloße Astrolabium zur Messung der Winkel gebrauchen können.

Indessen hatte doch die Societät der Wissenschaften in Koppenhagen, eine Preißfrage fürs Jahr 1778. aufgegeben, worinn die beste Einrichtung solcher Instrumente, Weiten aus einem Stande zu messen, und die damit zu erhaltende Genauigkeit, verlangt wird. (S. die Leipz. gelehrten Anzeigen 1777. das Stück vom 12. Jun.). Ich zweifle, ob ein einfacheres, als das Paceccianische Pantometrum, die Frage beantworten wird.

Das von dem Instrumentenmacher Joh. Ahl in Koppenhagen angegebene hieher gehörige Werkzeug, wovon Bugge in seiner

theo:

theoretisch=praktischen Anleitung zum Feldmessen (aus dem Dänischen rc. Altona 1798.) umständlicher aber Ravert in seinen Forelåsninger over Landmaalingen (Kiobenhavn 1793. p. 128.) eine Nachricht ertheilen, scheint nicht viel einfacher als das Paceccianische Werkzeug zu seyn, wenn es in der gehörigen Vollkommenheit verfertigt werden soll.

Hrn. Voigts Secundenmesser.

18. Hr. Conrector Voigt in Quedlinburg hat im IVten Abschnitte seines oben (§. 183. 5.) angeführten Buchs, einen Winkelmesser angegeben, von welchem er glaubt, daß er ebenfalls zu der Aufgabe, Weiten aus einem Stande, vermittelst der erforderlichen parallactischen Winkel, zu messen, und überhaupt zu geometrischen Aufgaben, woben es auf sehr große Genauigkeit ankömmt, gebraucht werden könnte, weil er nach der Einrichtung, die er demselben gegeben hat, sich verspricht, Winkel bis auf einzelne Secunden bestimmen zu können. Er hat nemlich auf dem Astrolabio eine Art von Uhrwerk angebracht, dessen Räder und Getriebe mit der Bewegung der Alhidadenregel in Verbindung stehen, dergestalt, daß, wenn die Alhidadenregel auf dem Rande sich z. E. um einen Grad dreht, ein damit in Verbindung stehender Weiser des Uhrwerks z. E. einen

nen ganzen Umlauf, über eine besondere unter ihm befindliche Scheibe macht. Ist daher z. E. der Umfang dieser Scheibe in 60 Theile getheilt, so entspricht jedem Theile, um welchen der Weiser fortrückt, $\frac{1}{60}$ Grad, oder 1 Minute in dem Winkel, um welchen sich die Alhidadenregel dreht. Durch angebrachte Verniere auf jener Scheibe verschafft Hr. Voigt einzelne Secunden, vorausgesetzt, daß die Kammen der Räder und ihre Getriebe aufs genaueste in einander passen, und also nicht leer gehen. Er ist auf diese Idee durch die Betrachtung des gemeinen Haspels gekommen. Das Muschenbröckische Pyrometer, und jede Uhr hätte ihn darauf führen können. Er fand aber nachher, daß die Räder in einem solchen Secundenmesser leicht Spielraum bekommen, und daher die nöthige Genauigkeit nicht verschaffen, und ist daher jetzt mit einer Verbesserung beschäftigt, die darinn besteht, daß er Räder und Getriebe wegläßt, statt der Getriebe Spindeln, und statt der Stirnräder bloße Rollen nimmt, über deren und der Spindeln Umfang kreutzweise eine Schnur geschlungen wird, so daß die Spindeln sehr schnell umlaufen, wenn die Rollen nur langsam gehen u. s. w. Ob bey dieser Einrichtung sich nicht noch mehr Unbequemlichkeiten finden werden, wird die Erfahrung Hrn. V. belehren. Sind die Schnüre zu schwach gespannt, so geht die Maschiene leer, sind sie zu stark gespannt, so rei-

reiben sie sich, nutzen sich bald ab, und man ist doch immer nicht sicher, ob alle Theile gehörig angreifen, zu geschweigen, daß ein Werkzeug dieser Art sehr zusammengesetzt, beschwerlich in der Behandlung, und kostbar wird. Und gesetzt auch, das Räderwerk des Hrn. Verf. verschaffe einzelne Secunden, so wird dieß doch zu nichts nützen, so lange man nicht die Gradabtheilungen auf dem Rande selbst eben so scharf haben kann. Es wird aber schon ein Werkzeug von 18 bis 20 Zollen im Durchmesser, und der Fleiß eines Ramsden erfordert, wenn die Theilstriche auf dem Rande nur bis auf $\frac{1}{10}$ Minute sicher seyn sollen. Aber bey einem Werkzeuge von dieser Größe reicht man mit der gewöhnlichen Micrometerschraube vollkommen aus, die kleinern Theile zu erhalten, mit einem Fehler, der immer sehr viel geringer ist, als welcher in den Gradabtheilungen des Randes selbst, zu befürchten steht, und das ist doch wohl alles, was man von einem Micrometer verlangen kann. Gäbe es noch kleinere Theile, selbst einzelne Secunden genau an, so wäre dieß eine ganz überflüssige Genauigkeit, die mir vorkömmt, als wenn jemand in Pfennigen sparen wollte, und auf Thaler nicht achtete.

Wenn man freylich die Unterabtheilungen des Randes bloß durch Verniere bestimmt, so kann man immer um eben so viel fehlen, als die

die Theilstriche auf dem Rande selbst unsicher sind, ja um doppelt so viel, wenn die Fehler des Randes, und die des Vernier auf einerley Seite fallen. Ich bediene mich daher würklich nicht gerne eines Vernier, und ziehe, wenn es um mehr Genauigkeit zu thun ist, die Micrometerschraube vor, weil ich mich durch vielfältige Proben versichert habe, daß, wenn sie fleissig gearbeitet ist, und ohngefähr 6 Umdrehungen derselben einen Grad (auf einem Winkelmesser von etwa 15 Zollen im Durchmesser) betragen, man in Ansehung ihrer Revolutionen, auf 10 Secunden sicher rechnen kann. Denn diese 10 Sec. betragen ohngefähr 0,02 einer Revol, welche Größe man auf dem Umfange der Micrometerscheibe, noch gut bemerken kann, wenn sie auch nur einen Zoll im Durchmesser hätte. Freylich könnte man sagen, die Micrometerschraube gehe vielleicht um 10 Secunden leer, d. h. sie greife vielleicht die Alhidadenregel in dem ersten Augenblicke nicht an, weil etwa die Schraubengänge etwas Spielraum haben.

Aber läßt sich dieser Einwurf nicht noch vielmehr bey des Hrn. V. Rädern und Getrieben, machen? Ueberdem habe ich mich durch Erfahrungen versichert, daß eine Micrometerschraube Jahre lang gebraucht werden kann, ehe sie anfängt, etwas leer zu gehen. Auch kann dieses Leergehen vermieden werden,

wenn

wenn man zwischen dem Alhidadenhalter P und der Alhidadenregel O (I. Th. Tab. V.) noch eine stählerne an O befestigte, sehr elastische Feder anbringt, wodurch beyde Theile immer in einer gewissen Spannung gegen einander erhalten werden. Hätte dieses zu befürchtende Leergehen so viel zu bedeuten, so würde man die Micrometerschrauben in der Astronomie schon lange abgeschafft haben, wo sich doch gewiß dieser Fehler bald entdecken müßte.

Ich kann demnach die Erinnerungen Hrn. Voigts, in Ansehung des Winkelmessers, welchen ich im ersten Theile dieser prakt. Geometrie beschrieben habe, und die Vortheile, welche er sich von seinem neuen Secundenmesser verspricht, nicht für erheblich genug ansehen, eine bisher so einfache Vorrichtung, nemlich die Micrometerschraube, oder in Fällen, wo nicht die größte Schärfe nöthig ist, die Verniere zu verlassen, und statt ihrer eine so zusammengesetzte und ungleich kostbarere Einrichtung zu wählen. Es verlohnt sich auch würklich nicht, an einem Astrolabio zum Feldmessen dergleichen anzubringen. Aber auch an größern Werkzeugen zu geographischen und astronomischen Arbeiten möchte Hrn. V. Secundenmesser überflüssig seyn. Denn so bald einmahl der Halbmesser eines Werkzeugs auf 2 und mehrere Schuhe groß ist, verschafft die Micrometerschraube vollkommene Genugthuung, indem sie alsdann gar wohl eine Genauigkeit von 4 bis 5 Secunden verstattet. So denn auch bey dem Paceccianischen Pantometro, dem Hr. V. auch sehr gerne seinen Secundenmesser unterschieben möchte. Die Folge wird lehren, ob dieser neue Secundenmesser sein Glück machen wird. Ich zweifle um so mehr daran, da Hr. V. bey den Rädern und Getrieben selbst schon beträchtliche Unbequemlichkeiten bemerkt hat, und, statt deren, Spindeln und Rollen vorschlägt.