Der praktischen Geometrie zweyter Theil.

X. Kapitel.

Ueber die Fehler, die beym Winkelmessen daher rühren, wenn die Ebene des Werkzeugs nicht genau horizontal gestellet worden.

§. 140.

I. Wir haben schon im vorhergehenden bemerkt, daß, wenn das Fernrohr genau in einer auf das Werkzeug senkrechten Ebene auf: und nieder beweglich, auch das Werkzeug genau horizontal gestellet worden ist, man am Mittelpunkte des Winkelmessers allemahl genau den Horizontalwinkel erhalte, welchen zwey Objecte, nach denen das Fernrohr gerichtet worden ist, mit einander machen, oder wenn man sich durch den Mittelpunkt,

und

und durch beyde Objecte ein paar Verticalebenen vorstellet, so ist oberwähnter Winkel genau der Neigungswinkel dieser beyden Ebenen gegeneinander. Wenn aber das Werkzeug nicht genau horizontal stehet, wie es dann wegen vieler Ursachen, selten völlig genau geschehen kann, so wird auch der Winkel, um den die Alhidadenregel gedrehet worden ist, nicht genau der Horizontalwinkel der beyden Objecte seyn, sondern von demselben um eine gewisse Größe unterschieden seyn; Ein Feldmesser muß nun wissen, unter welchen Umständen dieser Unterschied beträchtlich ist oder nicht, und daher werden folgende Untersuchungen nützlich seyn.

II. Es sey also (Fig. III.) der Bogen ACG ein Stück von dem Rande eines gegen den Horizont schief stehenden Winkelmessers, und E dessen Mittelpunkt. Der Winkelmesser schneide die Horizontfläche in der geraden Linie E A. Um nun den Winkel, den die Ebene des Werkzeugs mit der Horizontalfläche macht, abzubilden, so beschreibe man mit dem Halbmesser E A, in der Horizontalfläche, den Kreisbogen ABH, so ist der sphärische Winkel GAH, die Neigung des Werkzeugs gegen die Horizontalfläche (Trig. S. XLIX. 7. 8.).

III. Es sey auf dem Werkzeuge der Punkt C derjenige, von dem die Grade angerechnet werden,

werden, oder der Punkt o auf den Eintheilungen des Randes.

IV. Das Fernrohr ED des Winkelmessers sey nun, indem die Alhidadenregel, oder der Index des Vernier 0° weiset, nach einem gewissen Objecte hingerichtet, und die Axe des Fernrohrs (welches ich hier als eine Kippregel (§. 99. 18. und §. 100) betrachte) mache in dieser Richtung mit der Ebene des Werkzeugs den Neigungswinkel DEC, dessen Ebene man sich also auf der Fläche des Werkzeugs senkrecht vorstelle.

V. Beschreibt man mit dem Halbmesser EC, in dieser Ebene DEC, den Kreisbogen CD, so wird derselbe das Maaß des Neigungswinkels des Fernrohrs gegen die Ebene des Werkzeugs seyn.

VI. Gesetzt nun, die Alhidadenregel EC, werde aus der Lage EC, in die Lage EG gebracht, bey der das Fernrohr EF nach einem zweyten Objecte hingerichtet ist, so wird es mit der Ebene des Werkzeugs den Neigungswinkel FEG machen, dessen Maaß der mit dem Halbmesser EG = EC beschriebene Kreisbogen FG ist.

VII. Stünde also die Ebene des Werkzeugs genau horizontal, so wären die Ebenen DEC, FEG ein paar Verticalflächen, die erwei-

erweitert, durch die beyden Objecte, nach denen das Fernrohr ED, EF gerichtet ist, gehen würde, der Winkel CEG am Mittelpunkte des Werkzeugs, wäre dieser beyden Verticalflächen Neigungswinkel, den man auszumessen verlangte (§. 132), und der von der Alhidadenregel durchlaufene Bogen CG, das Maaß dieses Winkels.

VIII. Da aber vorausgesetzt wird, daß des Winkelmessers Ebene gegen die Horizontalfläche schief stehe, so sind auch die Ebenen DEC, FEG nicht vertikal, mithin der Winkel CEG auch nicht der wahre Horizontalwinkel der beyden Objecte, oder die Neigung der beyden Verticalebenen, in denen die Objecte liegen (VII), und letzterer ist es doch, den man in der praktischen Geometrie eigentlich verlangt.

IX. Man gedenke sich also durch beyde Richtungen des Fernrohrs, in denen die Objecte erscheinen, ein paar Verticalebenen DEB, FEH, die die Horizontalfläche in den Horizontallinien EB, EH durchschneiden, so ist der Winkel dieser beyden Horizontallinien, d. i. HEB, eigentlich der wahre Winkel, den man verlangt, und der Bogen BH dessen Maaß.

X. Nun sind offenbar die beyden Bogen CG, BH von einander unterschieden, und wenn man daher den Bogen CG, um den die

Alhi-

Alhidadenregel gedrehet worden, für das Maaß des Horizontalwinkels BEH annehmen wollte; so würde man offenbar einen Fehler begehen, der so groß wäre, als der Unterschied der beyden Bogen CG — BH.

XI. Diesen Unterschied nun zu bestimmen, ist die Absicht gegenwärtiger Aufgabe. Sie läßt sich vermittelst der sphärischen Trigonometrie, die man hier offenbar zu Hülfe nehmen muß, weil hier die Neigungen verschiedener Ebenen gegeneinander in Betrachtung kommen, auf folgende Art auflösen.

XII. Es sey der Neigungswinkel des Werkzeugs gegen die Horizontalfläche, oder der sphärische Winkel CAH = k; und der Bogen AC, um den die Alhidadenregel, bey der Richtung des Fernrohrs nach dem ersten Objecte, von der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie EA des Werkzeugs mit der Horizontalfläche, entfernt ist, heisse λ; diesen muß man als bekannt annehmen, wenn man gegenwärtige Aufgabe auflösen will.

Den Bogen CG, um den die Alhidadenregel gedrehet worden, nenne man $= \alpha$.

Den Bogen AB $= \varphi$; den AH $= \psi$; die gegebenen Neigungswinkel DEC $= \beta$; FEG $=$ b.

Hat

Hat man nun aus den bekannt angenommenen Größen λ, α, β, b, k, die beyden Bogen ψ, φ, berechnet, so ist $\psi - \varphi$, oder der Bogen BH gefunden, welcher demnächst mit CG oder dem Bogen α verglichen, die Größe des Fehlers geben wird, welchen man aus der schiefen Lage des Werkzeugs zu befürchten hat. (X)

XIII. Um also die beyden Bogen AB, und AH, oder die Werthe von φ, ψ, zu bestimmen, so stelle man sich den Bogen DC, als ein Stück eines größten auf ACG senkrecht stehenden Kreises, bis nach L verlängert vor, dergestalt, daß der Bogen CL $= 90°$ werde, so ist bekanntermaaßen L der Pol des Kreises ACG.

XIV. Da gleichfalls DB auf ABH senkrecht stehet, so nehme man auch den Bogen BP $= 90°$, so ist P der Pol des größten Kreises ABH.

XV. Nimmt man auch die Bogen ACI, ABK, $= 90°$, und legt durch die Punkte K, I einen größten Kreis, KIPL, so gehet dieser durch die beyden Pole L, P (aus Hrn. Hofr. Kästners Geometrie 49. u. f. Sätzen) und man erhält ein sphärisches Dreyeck LPD.

XVI. Weil man nun AI $=$ AK $= 90°$ genommen hat, so ist der Punkt A, des Kreises

ses KIPL Pol, und der Bogen KI bekanntermaaßen das Maaß des sphärischen Winkels IAK (Kästn. Geom. 52. S. 3. Zus.). Ferner sind aber, weil L des Kreises AGI Pol, und P des Kreises ABK Pol ist, die Bogen LI = 90°; PK = 90° oder LI = PK; das heißt LP + PI = PI + IK folglich LP = IK; also ist die Entfernung LP der beyden Pole, dem Bogen IK, oder dem Maaße des sphärischen Winkels IAK gleich, welchen die beyden Kreise AGI, AHK, zu denen L, P als Pole gehören, mit einander machen.

XVII. Weil ferner L des Kreises AGI Pol ist, so ist der Bogen CI das Maaß des sphärischen Winkels CLI, und aus eben dem Grunde, weil P des Kreises ABK Pol ist, wird auch der Bogen BK des sphärischen Winkels BPK Maaß seyn.

XVIII. In unserm sphärischen Dreyecke LPD ist also $LD = LC - CD = 90^\circ - \beta$ (V. XII.) der sphärische Winkel $LPD = 180^\circ - DPI = 180^\circ - BK$, weil nemlich BK des sphärischen Winkels DPI Maaß ist (XVII). Aber $BK = 90^\circ - AB = 90^\circ - \varphi$ (XII.) daher $LPD = 180^\circ - (90^\circ - \varphi) = 90^\circ + \varphi$.

Eben so des sphärischen Winkels DLI Maaß der Bogen CI (XVII) $= 90^\circ - AC = 90^\circ - \lambda$ (XII).

XIX.

XIX. In dem sphärischen Dreyecke LPD suche man nun aus den beiden Seiten LD $= 90° - \beta$; LP $=$ k (XII. XVI.) und dem eingeschlossenen Winkel DLP $= 90° - \lambda$, den Winkel LPD $= 90° + \varphi$; so wird man erstlich einen Ausdruck bekommen, wodurch sich der Bogen φ bestimmen läßt. Nun ist, aus (Trig. S. LIII. 1.) (wenn das dortige A hier den sphärischen Winkel DLP, das dortige B den sphärischen Winkel LPD, und die beyden Seiten LP, LD die dortigen c, b bedeuten)

$$\text{tang}\,LPD = \frac{\sin DLP \,.\, \text{tang}\,LD}{\sin LP - \text{tang}\,LD \cos LP \cos DLP}$$

Es ist aber LPD $= 90° + \varphi$, also tang LPD $= \text{tang}\,(90° + \varphi) = -\cot\varphi$

DLP $= 90° - \lambda$; also sin DLP $= \sin(90° - \lambda) = \cos\lambda$ und cos DLP $= \cos(90° - \lambda) = \sin\lambda$.

LD $= 90° - \beta$; daher tang LD $= \text{tang}\,(90° - \beta) = \cot\beta$.

Und endlich weil LP $=$ k, so ist sin LP $= \sin k$, cos LP $= \cos k$.

Substituirt man also diese Werthe in den gefundenen Ausdruck, so erhält man

$$-\cot\varphi = \frac{\cos\lambda \cot\beta}{\sin k - \cot\beta \cos k \sin\lambda}$$

und folglich wegen $\frac{1}{\cot\varphi} = \tang\varphi$

$$\tang\varphi = \cos k \tang\lambda - \frac{\sin k \tang\beta}{\cos\lambda}.$$

XX. Solchergestalt ist erstlich aus dem Bogen $AC = \lambda$, dem Winkel $DEC = \beta$, und dem Neigungswinkel $CAH = k$, der Bogen $AB = \varphi$ auf der Horizontalfläche gefunden.

Will man auf eine ähnliche Art aus dem Bogen $AG = \lambda + CG = \lambda + \alpha$, aus dem Winkel $FEG = b$, und dem Neigungswinkel k den Bogen AH oder ψ auf der Horizontalfläche bestimmen, so wird man ihn durch dieselbe Formel finden, welche wir für den Bogen $AB = \varphi$ herausgebracht haben: denn es erhellet, daß man in obiger Formel nur statt φ setzen dürfe ψ, statt β den Buchstaben b, und statt des Bogens $AC = \lambda$, den Bogen $AG = AC + CG = \lambda + \alpha$; Also ist

$$\tang\psi = \cos k \tang(\lambda + \alpha) - \frac{\sin k \tang b}{\cos(\lambda + \alpha)}.$$

XXI. Aus den solchergestalt gefundenen Bogen $AH = \psi$, $AB = \varphi$ hat man nun auch den Unterschied $\psi - \varphi$ oder den Bogen BH, welcher mit $CG = \alpha$ verglichen, den Fehler geben wird, welcher wegen der schiefen Lage des Werk-

Werkzeugs gegen den Horizont zu befürchten stehet.

XXII. Dieser Fehler wird nun freylich in den meisten Fällen unbeträchtlich seyn, das Werkzeug müßte denn gar zu sehr von der horizontalen Lage abweichen. Doch kann es Fälle geben, wo er ansehnlich seyn kann, wenn gleich des Werkzeugs Neigung gegen den Horizont nur geringe ist. Damit sich nun ein Feldmesser hievon überzeugen könne, so habe ich das Verfahren gewiesen, diesen Fehler zu berechnen, wenn die Unrichtigkeit in der Stellung des Werkzeugs, entweder muthmaaßlich angenommen, oder sonst als bekannt vorausgesetzt wird.

XXIII. Ich will die gegebenen Formeln nunmehr durch ein Beyspiel erläutern.

Es sey $k = 1°$; $\beta = 4°$; $b = 10°$; $\lambda = 30°$ und $\alpha = 50°$, so wird für den Winkel φ

$$\begin{array}{ll} \log \cos k = & 9{,}9999338 - 10 \\ \log \tan \lambda = & 9{,}7614394 - 10 \\ \hline \text{Summe} & 0{,}7613732 - 1 \end{array}$$

Hierzu gehört die Zahl

$$\cos k \tan \lambda = 0{,}5772623$$

Ferner ist

log

$$
\begin{array}{rl}
\log \sin k = & 8{,}2418553 - 10 \\
\log \tang \beta = & \underline{8{,}8446437 - 10} \\
\text{Summe} & 17{,}0864990 - 20 \\
\text{abzuziehen } l \cos \lambda = & \underline{9{,}9375306 - 10} \\
& 0{,}1489684 - 3
\end{array}
$$

Zu diesem Logarithmen gehöret die Zahl 0,0014091 $= \frac{\sin k \tang \beta}{\cos \lambda}$ welche abgezogen von $\underline{0{,}5772623}$

läßt $\tang \varphi = 0{,}5758532$

Folglich aus den Sinustafeln $\varphi = 29^\circ.56^I.7''$ für den Winkel ψ ist

$$
\begin{array}{rl}
\log \cos k = & 9{,}9999338 - 10 \\
\log \tang (\lambda + \alpha) = & \underline{0{,}7536812} \\
\text{Summe} = & 0{,}7536150
\end{array}
$$

wozu die Zahl 5,6704183 gehöret, welche den Werth von $\cos k \tang (\lambda + \alpha)$ ausdrückt.

Ferner ist

$$
\begin{array}{rl}
\log \sin k = & 8{,}2418552 - 10 \\
\log \tang b = & \underline{9{,}2463188 - 10} \\
\text{Summe} & 17{,}4881741 - 20 \\
\text{abzuz. } \log \cos (\lambda + \alpha) = & \underline{9{,}2396702 - 10} \\
& 0{,}2485039 - 2
\end{array}
$$

wozu die Zahl $= \frac{\sin k \tang b}{\cos (\lambda + \alpha)} = 0{,}0177232$

gehöret, welche abgezogen von $5{,}6704183$

$$
\begin{aligned}
\text{läßt } \tan \psi &= 5{,}6526951\\
\text{Daher } \psi &= 79^\circ \cdot 58' \cdot 4''\\
\varphi &= 29^\circ \cdot 56' \cdot 7''\\
\text{Also } \psi - \varphi &= 50^\circ \cdot 1' \cdot 57''\\
\text{Da nun } \alpha &= 50^\circ \cdot 0' \cdot 0''\\
\text{so ist } \psi - \varphi - \alpha &= 1' \cdot 57''
\end{aligned}
$$

Es ist also der wahre Horizontalwinkel in diesem Beyspiel um 1' 57'', beynahe um 2', größer als der, welchen das geneigte Werkzeug angiebt: Wenn man also den Bogen CG $= \alpha$ auf dem Rande des Winkelmessers für das Maaß des Horizontalwinkels BEH $= \psi - \varphi$, annehmen wollte, so würde man unter den angenommenen Umständen einen Fehler von beynahe 2 Minuten begehen.

XXIV. Dieser Fehler wäre nun in diesem Beyspiele eben so gar beträchtlich nicht, indessen könnten doch Umstände vorkommen, wo er von Folgen seyn könnte, und aus diesen muß der Feldmesser beurtheilen, ob er ihn ausser Acht lassen darf oder nicht.

XXV. Bey andern Datis kann aber der Fehler auch von einer solchen Beträchtlichkeit werden, daß ihn ein Feldmesser gewiß nicht für Null halten darf. Wenn man z. E. in obigen For-

Formeln $\lambda = 0$, $\alpha = 90°$, $\beta = 20°$, $b = 15'$ und $k = 1°$ annähme, so fände sich nach gehöriger Rechnung $\varphi = - 21' 50''$; (das negative zeigt hier an, daß dieser Bogen φ nicht rechter Hand des Punktes A, sondern linker Hand desselben z. E. von A bis Z zu nehmen ist). Ferner findet sich $\psi = 90°$; also $\psi - \varphi = 90° - (- 21'. 50'') = 90° + 21'. 50''$; Da nun α bloß $90°$ ist, so ist $\psi - \varphi$, oder der Horizontalwinkel in diesem Falle um $21'. 50''$ größer, als derjenige, den das Werkzeug angiebt, wenn gleich das Werkzeug nur um $1°$ gegen die Horizontalfläche geneigt war, und so erhellet dann, wie nothwendig es sey, in dem Falle, da das Werkzeug mit einer Kippregel oder einem auf- und nieder beweglichen Fernrohre versehen ist, den Winkelmesser so genau als möglich, horizontal zu stellen, wenn man sich anders unter gewissen Umständen nicht sehr groben Fehlern aussetzen will.

Einige Folgerungen aus dem bisherigen.

§. 141. I. Es erhellet, daß, wenn man in obigen Formeln $k = 0$ setzte, oder das Werkzeug keine Neigung gegen den Horizont hätte, alsdann wegen $\sin k = 0$ und $\cos k = 1$, seyn würde

tang

$\tan \varphi = \tan \lambda$ und folglich $\varphi = \lambda$
$\tan \psi = \tan (\lambda + \alpha)$ mithin $\psi = \lambda + \alpha$.
Also $\psi - \varphi = \alpha$; daher $\psi - \varphi - \alpha = 0$
d. h. es würde in solchem Falle bey Ausmessung der Winkel kein Fehler entstehen, die Neigung des Fernrohrs gegen das horizontal gestellte Werkzeug, oder die Winkel b, β mögen von jeder willkührlichen Größe seyn. Allemahl bleibt der von der Alhidadenregel beschriebene Bogen α, das Maaß des wahren Horizontalwinkels $\psi - \varphi$. Dies erhellet auch schon aus dem vorhergehenden, und wird also durch gegenwärtiges noch mehr bestätigt.

II. Setzt man in obigen Formeln $b = \beta = 0$ oder nimmt man an, das Fernrohr drehe sich der Ebene des Werkzeugs parallel, so wird

$$\tan \varphi = \tan \lambda \cos k$$
$$\tan \psi = \tan (\lambda + \alpha) \cos k.$$

Diese Formeln dienen also dazu, die Fehler zu bestimmen, welche aus der geneigten Lage eines solchen Werkzeugs entstehen, dessen Fernrohr nicht wie eine Kippregel auf- und nieder beweglich, sondern in jeder Lage, der Ebene des Werkzeugs parallel ist, wie (§. 100).

III. Wenn man mit einem solchen Instrumente Horizontalwinkel messen will, so müssen die Gegenstände, nach denen man visiret, in einer

einer Horizontal-Ebene durch den Mittelpunkt des Werkzeugs, liegen. — Da aber dieses sehr selten auf dem Felde zutrifft, so neigt man das Werkzeug vorsetzlich, so, daß dessen Ebene gemeinschaftlich durch die beyden Objecte gehe, und mißt den schiefen Winkel α, den man hierauf nach den Formeln (II) in den horizontalen $= \psi - \varphi$ verwandelt, wobey man denn die Neigung des Instruments als bekannt annimmt.

IV. In den Formeln (II) müßte aber auch der Werth des Bogens λ, d. h. in (Fig. III) der Bogen AC, um welchen die Richtungslinie EC nach dem ersten Objecte, von dem gemeinschaftlichen Durchschnitte EA des Werkzeugs mit dem Horizonte, entfernt wäre, gegeben seyn. Diesen Bogen zu finden, müßte man untersuchen, was der Index der Alhidadenregel auf dem Rande des Werkzeugs wiese, wenn man das Fernrohr aus der Lage EC (Fig. III) oder HG (Fig. IV) in die Horizontal Lage HA brächte, welches vermittelst einer mit der Axe desselben parallel angebrachten Libelle (deren Einrichtung aber erst unten erklärt werden wird) sich bewerkstelligen liesse. Gesetzt, bey der Horizontallage HA des Fernrohrs (Fig. IV), wiese der Index der Alhidadenregel 20°, bey der Lage HC des Fernrohrs aber 60°. 17′, so wäre der Bogen AC oder $\lambda = 60° . 17' - 20° = 40° . 17'$

und

und so in andern Fällen. Allein, wenn des Werkzeugs Neigung gegen den Horizont gering ist, so kan man, wenn das Fernrohr in die Horizontallage H A gebracht worden ist, dasselbe wohl um mehrere Grade noch drehen, ohne daß die Luftblase der Libelle sich merklich verrückte. Daher denn der Punkt A auf dem Rande, von dem man die Bogen, wie λ, anzurechnen hat, nie mit der vollkommenen Schärfe angegeben werden kann. Da nun ausserdem auch noch die Neigung k des Werkzeugs in (II) bekannt seyn muß, um den schiefen Winkel α auf den horizontalen zu bringen, diese Neigung sich aber in einem vorgegebenen Falle auch nicht gut messen läßt, so kann man die Formeln (II) (so wie auch die §. 140. XIX.) wenn das Fernrohr wie eine Kippregel auf- und nieder beweglich ist) überhaupt nicht vortheilhaft zur Reduction der Winkel auf den Horizont brauchen. Sie können nur dienen, um zu berechnen, wie groß überhaupt bey willkührlich angenommenen Werthen von λ und k (oder in (§. 130) bey angenommenen λ, β und b) die Unterschiede zwischen den schiefen und horizontalen Winkeln ausfallen können, also, zu beurtheilen, was sich bey solchen winkelmessenden Werkzeugen für Fehler befürchten lassen, wenn man die schiefen Winkel für die horizontalen annähme. Will man aber die Reduction auf den Horizont in einem vorgegebenen Falle wirklich würklich selbst bewerkstelligen, so müssen obige Formeln (II) so eingerichtet werden, daß die Größen wie λ, k aus denselben wegfallen, und andere hineinkommen, welche sich in einem vorgegebenen Falle, unmittelbar und bequem messen lassen, z. E. etwa die Elevationswinkel der Gegenstände über dem Horizont. Da indessen aber in den Formeln (§. 140) auch noch die Winkel β und b vorkommen, welche zu messen, sich zwar eine Vorrichtung an dem Werkzeuge gedenken liesse, so bleibt doch die Anwendung dieser Formeln, gesetzt, daß man auch die Größen λ und k aus ihnen wegschaffen könnte, für die Ausübung immer so unbequem, daß ich es nicht der Mühe werth achte, mich hier weiter damit zu beschäftigen. Ich werde mich daher nur auf den Fall (II) beschränken, und zeigen, wie man durch Messung der Elevationswinkel der Objecte, sowohl der Bestimmung des Bogens λ, als auch des Neigungswinkels k überhoben seyn könne.

V. Es sey also ACG (Fig. IV) das Werkzeug, in einer gegen den Horizont AEF geneigten Lage; H dessen Mittelpunkt: HC, HG die beyden Richtungen des mit der Ebene des Werkzeugs parallelen Fernrohrs, nach den beyden Objecten, deren Horizontalwinkel man finden soll.

1. Man gedenke sich durch die Richtungen HC, HG ein paar Verticalebenen CHE, GHF,

GHF, die den Horizont in den geraden Linien HE, HF durchschneiden; so ist EHF der wahre auszumessende Horizontalwinkel; Statt dessen findet man aber, indem das Fernrohr aus der Richtung HC in die HG gedrehet wird, auf dem Rande des Werkzeugs den Winkel CHG, dessen Maaß der Bogen CG, so wie EF des Horizontalwinkels Maaß ist.

2. So viel nun die beyden Bogen CG, EF von einander unterschieden sind, so groß ist der Fehler, der daher rühret, daß man den Bogen CG auf dem schief stehenden Werkzeuge für den Bogen EF oder für das Maaß des Horizontalwinkels EHF annimmt, mithin so groß auch die Correction, welche man dem schiefen Winkel geben muß, um den horizontalen zu erhalten.

3. Statt daß ich nun den Neigungswinkel GAF des Werkzeugs gegen den Horizont, und den Bogen AC $= \lambda$ in Rechnung bringe, so will ich annehmen, es seyen der Objecte, nach denen die Richtungen HC, HG des Fernrohrs zulaufen, ihre Elevationswinkel EHC, FHG gemessen worden. Daraus wird sich nun auf eine leichte Art der Bogen EF, als das Maaß des Horizontalwinkels, durch Rechnung finden lassen.

4. Es sey also der Winkel CHE $= \varepsilon$; GHF $=$ e, der Bogen CG auf dem Werkzeuge

zeuge $= \alpha$. Das Maaß des Horizontalwinkels, oder der Bogen EF $= \varphi$.

5. CE, GF, seyen ein paar Kreisbogen, mit dem Halbmesser HC $=$ HG, in den Verticalebenen CHE, GHF beschrieben.

6. Also CE $= \varepsilon$; GF $= e$, weil sie der Winkel CHE, GHF Maaße sind.

7. Man nehme nun ECP $= 90°$ und FGP $= 90°$, so ist P des Kreises AEF Pol, weil die Ebenen CHE, GHF auf dem Horizonte AEF senkrecht stehen; und das sphärische Dreyeck CPG hat bey P einen Winkel, dessen Maaß ist der Bogen EF $= \varphi$.

8. Weil nun PC $= 90° -$ CE $= 90° - \varepsilon$; PG $= 90° -$ GE $= 90° - e$; und CG $= \alpha$, so sind die drey Seiten des sphär. Dreyecks (7) bekannt, daher kann man den Winkel CPG $= \varphi$ nach (Trig. S. LV) durch Rechnung finden, wenn man die dortigen b, c, a, hier die Bogen PC, PG, CG bedeuten läßt; so erhält man in unserer Figur

$$\cos P = \frac{\cos CG}{\sin PC \sin PG} - \cot PC \cot PG.$$

9. Nun ist aber $\cos CG = \cos \alpha$; $\cot PC = \cot (90° - \varepsilon) = \tang \varepsilon$, ferner $\cot PG = \cot (90° - e) = \tang e$; $\sin PC = \sin (90° - \varepsilon) = \cos \varepsilon$ und $\sin PG = \sin (90° - e) = \cos e$,

10.

10. Diese Werthe also substituirt, geben cos P oder

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\cos \varepsilon \cos e} - \operatorname{tang} \varepsilon \operatorname{tang} e.$$

Wo man also aus den gegebenen Stücken, α, ε, e sogleich den Horizontalwinkel φ selbst berechnen kann; dessen Vergleichung mit dem Bogen α also den Fehler geben würde, welcher aus der geneigten Lage des Werkzeugs zu befürchten ist.

Ex. Es sey $\alpha = 57^\circ\ 25'$; $\varepsilon = 2^\circ\ 25'$; $e = 4^\circ\ 58'$ so wird

$$\begin{array}{rcl} \log \cos \varepsilon & = & 9{,}9996136 - 10 \\ \log \cos e & = & \underline{9{,}9983663 - 10} \\ \text{Summe} & = & 0{,}9979799 - 1 \text{ abgezog.} \\ \text{von } \log \cos \alpha & = & \underline{9{,}7312064 - 10} \text{ läßt} \end{array}$$

$$\log \frac{\cos \alpha}{\cos e \cos \varepsilon} = 0{,}7332265 - 1$$

wozu die Zahl 0,541036 gehört.

Ferner ist

$$\begin{array}{rcl} \log \operatorname{tang} e & = & 8{,}9390321 - 10 \\ \log \operatorname{tang} \varepsilon & = & \underline{8{,}6253518 - 10} \\ \text{Summe} & = & 0{,}5643839 - 3 \end{array}$$

wozu die Zahl tang ε tang e = 0,003667 gehört.

Man

Man ziehe also von 0,541036
ab 0,003667

so hat man $\cos\varphi = 0,537369$
wo man durch Proportionaltheile findet $\varphi = 57^\circ\ 29'\ 43''$, da nun $\alpha = 57^\circ . 25'$ war, so ist $\varphi - \alpha = 4' . 43''$, so groß wäre also der Fehler, wenn man den Bogen $CG = \alpha = 57^\circ\ 25'$ für des Horizontalwinkels φ Maaß annehmen wollte. Letzterer ist eigentlich bey den angenommenen Umständen um $4'\ 43''$ größer, als der, welchen das Werkzeug angiebt.

11. Auf diese Art erhellet, wie man in jedem Falle aus den gemessenen Elevationswinkeln CHE, GHF, den schiefen Winkel CHG, den man auf dem Werkzeuge angegeben findet, in den zugehörigen horizontalen EHF, verwandeln könne.

Die Elevationswinkel ε, e selbst zu messen, wird erst unten gelehrt werden. In den meisten Fällen ist es hinreichend, sie ohngefähr innerhalb eines Viertehl Grades zu wissen.

Das (10) gegebene Ex. ist aus Hrn. H. Kästners Astron. Abhandl. I. S. pag. 39.;

Da in der Ausübung oft Werkzeuge gebraucht werden, deren Fernrohr sich nicht auf und nieder, sondern mit der Ebene des Werkzeugs parallel dreht, wie das (§. 100) an meines

meines Vaters Astrolabio, so siehet man leicht, wie nöthig die bisherigen Rechnungen sind, wenn man mit einem solchen Werkzeuge, welches man vorsetzlich neigen muß, dem ohnerachtet den wahren Horizontalwinkel finden will.

VI. Es ist in der III. Figur angenommen worden, daß das Werkzeug AG seine Neigung über der Horizontalfläche habe. — Ist es aber unterhalb des Horizontes geneigt, so muß man den Winkel k in obigen Formeln (§. 140. XIX. XX.) als negativ ansehen. Hiebey muß man nun überlegen, daß der Sinus eines negativen Winkels, negativ ist, der Cosinus desselben aber positiv bleibt, mithin hat man für diesen Fall.

$$\text{tang}\,\varphi = \text{cos}\,k\;\text{tang}\,\lambda + \frac{\text{sin}\,k\;\text{tang}\,\beta}{\text{cos}\,\lambda}$$

$$\text{tang}\,\psi = \text{cos}\,k\;\text{tang}\,(\lambda + \alpha) + \frac{\text{sin}\,k\;\text{tang}\,b}{\text{cos}\,(\lambda + \alpha)}.$$

VII. Herr Prof. Meister hat in einem Programm de erroribus, qui a situ instrumenti non librato angulorum mensuram ingrediuntur. Goett. 1764. die bisherigen Aufgaben gleichfalls untersucht, und zwey Tafeln nach seinen Formeln berechnet, deren erstere die Fehler bestimmt, die daher rühren, wenn die Ebene des Werkzeugs gegen die Horizontalfläche geneigt, das Fernrohr aber parallel mit dem Werkzeuge

zeuge ist; die andere aber sich mit den Fehlern beschäftigt, die aus der schiefen Lage eines Werkzeugs entstehen, dessen Fernrohr, wie eine Kippregel, auf und nieder beweglich ist. Diese Tafeln sind sehr bequem, wenn man nicht nach den Formeln selbst rechnen will.

Dir erste Tafel Hrn. Pr. M. ist nach Formeln berechnet, die mit der (II) übereinkommen, dabey ich aber wegen des Winkels λ die Erinnerung (IV) zu machen habe. Er hat diese Iste Tafel für $k = 1°$; $k = 2°$; $k = 3°$; $k = 4°$ berechnet, und zeigt nun die Art, wie aus dieser Tafel die nöthige Correction des schiefen Winkels für jeden angenommeneu Werth von λ zu bestimmen ist.

Dessen IIte Tafel enthält für jedes λ von 0° bis 360°, die Correctionen 1) für $k = 15'$, und $\beta = 5°$, $\beta = 10°$; $\beta = 15°$; $\beta = 20°$; 2) für $k = 1°$ und $\beta = 5°$; $\beta = 10°$; $\beta = 15°$; $\beta = 20°$.

Nur muß ich noch erinnern, daß der Bogen, den ich λ genannt habe, bey Herrn Prof. Meister $90° - \lambda = \nu$ heißt. Meine Buchstaben β, k, heißen bey ihm a, b.

Die Art des Gebrauchs seiner Tafeln ist nun in dessen Abhandlung §. XI. durch Beyspiele für alle einzelnen Fälle erläutert.

Herr

Herr Pr. M. vergleicht hierauf die Tafeln mit einander, und findet, daß ein Werkzeug mit einem parallelen Fernrohre nicht so gefährlich zu gebrauchen sey, als ein anderes mit einem Kipp-Fernrohr; daß z. E. eine Neigung von 4° bey dem Werkzeuge der erstern Gattung weniger schade, als eine Neigung von 15' bey einem Winkelmesser der zweiten Gattung, und so empfiehlt er, wie natürlich, alle nöthigen Vorsichten in der Horizontalstellung eines Winkelmessers, der mit einer Kippregel versehen ist.

Wenn man indessen die Bequemlichkeit in Betrachtung ziehet, die ein Winkelmesser, mit einem auf und nieder beweglichen Fernrohre, in Absicht eines andern hat, dessen Fernrohr sich der Ebene des Werkzeugs parallel dreht, wenn man überlegt, wie viel Mühe und Zeitverlust es kostet, ein Werkzeug der letztern Art so zu stellen, daß dessen Ebene in die Fläche des auszumessenden schiefen Winkels zu liegen komme, anderer Unbequemlichkeiten zu geschweigen, so wird man wohl immer ein Werkzeug mit einem auf- und nieder beweglichen Fernrohre vorziehen.

VIII. Vermittelst einer guten Wasserwaage läßt sich doch wohl die Ebene eines solchen Winkelmessers so genau horizontal stellen, daß die Neigung desselben gegen den Horizont, nicht leicht

leicht über 10 Minuten betragen wird. Der Fehler, der bey dieser Neigung begangen werden kann, wenn man den schiefen Winkel für den horizontalen nimmt, kann sich nur alsdann auf 4 bis 5 Minuten belaufen, wenn das nach einem Objecte gerichtete Fernrohr einen Winkel von 20 Graden mit der Ebene des Werkzeugs macht, welches doch bey Horizontalvermessungen äusserst selten vorfällt, und sich durch andere Hülfsmittel (z. E. einen Stab, den man zwischen das Werkzeug und das Object in eine gerade Linie setzt) oft vermeiden läßt. In den gewöhnlichen Fällen geht die Neigung des Fernrohrs nicht leicht über 2 bis 3 Grade, und dann ist der Fehler unmerklich, der aus der schiefen Lage des Werkzeugs zu befürchten steht, und kann sich nur in wenigen Fällen auf $\frac{1}{4}$ Minute belaufen.

Wenn man statt der gewöhnlichen Wasserwaage (§. 113) sich ein paar Libellen, deren Beschreibung unten §. 156. V. vorkömmt, zur Horizontalstellung eines Werkzeugs bedienen will, so werden die aus der schiefen Lage zu befürchtenden Fehler im Ausmessen der Winkel dadurch fast gänzlich verschwinden.

Von der Reduction der Winkel auf den Horizont handeln ausser den (V. 11. und VII) angeführten Schriftstellern auch verschiedene, welche von der Messung eines Grades auf der

Erde, geschrieben haben. Auch kann man darüber Georg Ignat. de Metzburg institut. Mathem. (Viennae 1775) Tom. III. Cap. IV. nachlesen. —

Anmerkung.

§. 142. In der Aufgabe §. 140. kömmt nichts vor, was die Ebene ABK (Fig. III) nothwendig auf die Horizontalfläche beschränkte. Sie ist in der That allgemeiner und läßt sich so abfassen:

Es ist eine willkührliche Ebene ABK gegeben, gegen die eine andere ACI geneigt ist; E ist ein Punkt in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie EA beyder Ebenen, und ED, EF ein paar Linien, deren Neigungswinkel gegen die Ebene ACI gegeben sind; auch CEG oder der Winkel, unter dem sich ein paar durch ED, EF auf die Ebene ACI senkrecht gesetzte Ebenen durchschneiden, ist bekannt, man sucht daraus den Winkel BEH, unter dem sich ein paar Ebenen durchschneiden, die man durch die Linien ED, EF, auf die zweyte Ebene ABH senkrecht setzet.

Es bliebe eben die Auflösung, wenn z. E. ABK eine Verticalfläche wäre, die Ebene ACG mit ihr einen gewissen Winkel machte, und man aus dem Winkel CEG und den übrigen Datis, den Winkel BEH, oder Bogen BH berechnen wollte.