Fortsetzung der im ersten Theile dieses Buches beygebrachten trigonometrischen Lehrsätze.

Untersuchungen, um wie viel sich die trigonometrischen Linien ändern, wenn ihre zugehörigen Bogen oder Winkel, um etwas geringes wachsen, oder abnehmen.

XXV. Es ist schon aus der gemeinen Trigonometrie bekannt, daß, wenn die Bogen oder Winkel zunehmen, auch die Sinusse, Tangenten und Secanten derselben wachsen, die Cosinusse, Cotangenten und Cosecanten aber abnehmen, so lange die Bogen unter 90° bleiben. — Wenn sie über 90° gehen, so nehmen die Sinusse derselben u. s. w. wieder ab, und die Cosinusse u. s. w. wachsen. Es ist klar, daß diese Aenderungen der Bögen und der zugehörigen trigonometrischen Linien von einander abhängen. — Da nun die Lehren hievon in dem Falle, wenn die Winkel oder Bogen sich nur um etwas weniges ändern, künftig bey Berechnung der Folgen der Fehler, wie auch bey andern Gelegenheiten großen Nutzen haben, so werde ich jetzt zeigen, wie man aus der Aenderung eines Bogens, die Zu = oder Abnahme der zugehörigen trigonometrischen Linie auf eine leichte Art finden könne.

XXVI. Es bedeute also a einen gewissen Bogen, und $a + \alpha$ einen andern Bogen, welcher von dem ersten um den kleinen Bogen α unterschieden ist; Es frägt sich, um wie viel der Sinus von $a + \alpha$, von dem Sinus des Bogens a unterschieden seyn wird.

Um dieses zu bestimmen, so überlege man, daß

$$\sin(a + \alpha) = \sin a \cos \alpha + \cos a \sin \alpha$$

ist (Trig. S. XII. 1).

Weil nun α einen sehr kleinen Bogen bedeuten soll, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, daß der Sinus desselben dem Bogen selbst, der Cosinus aber dem Sinus totus gleich sey. — Da wir also den Sinus totus $= 1$ setzen, so ist ohne großen Irrthum

$$\cos \alpha = 1, \ \sin \alpha = \alpha.$$

Sub=

Substituirt man also diese Werthe in obigen Ausdruck, so bekömmt man

$\sin (a+\alpha) = \sin a + \alpha \cos a$ Mithin

$\sin (a+\alpha) - \sin a = \alpha \cos a.$

Wenn also der Bogen a um α wächst, mithin a sich in $a + \alpha$ verwandelt, so ist der Sinus des Bogens $a + \alpha$ um den Werth $\alpha \cos a$ größer, als der Sinus des Bogens a, oder $\sin a$ wächst um $\alpha \cos a$, wenn a um α zunimmt.

In dieser Formel ist nun zu bemerken, daß man statt α nicht den Werth dieses Bogens in Minuten oder Secunden, sondern vielmehr in Decimaltheilen des Sinus totus setzen müsse. Wäre nun der Bogen α z. E. in Secunden gegeben, so wird dessen Werth in Decimaltheilen des Sinus totus $= \frac{\alpha}{206264}$ (Trig. S. IV. VII.) und diesen Ausdruck muß man eigentlich statt α brauchen. Daher ist

$$\sin (a+\alpha) - \sin \alpha = \frac{\alpha}{206264} \cos. a.$$

Ex. Um zu sehen, wie das bisherige mit der Wahrheit übereinstimmt, so wollen wir $a = 40°$ und $\alpha = 1' = 60''$ setzen, mithin untersuchen, um wie viel der Sinus von $40° 1'$ von dem Sinus von $40°$ unterschieden ist.

Nach obiger Rechnung wäre also

$$\sin 40^\circ 1' - \sin 40^\circ = \frac{60''}{206264} . \cos 40^\circ$$

welches man durch Logarithmen auf folgende Art berechnet.

$$\begin{array}{rl} \log 60 = & 1,7781513 \\ \log \cos 40^\circ = & 9,8842540 - 10 \\ \hline \text{Summe} = & 1,6624053 \\ \text{abgez. } \log 206264 = & 5,3144252 \\ \hline \text{läßt} & 3,3479801. \end{array}$$

Ich habe nehmlich die Characteristik des Logarithmen 1,6624053 in Gedanken um 7 Einheiten vermehrt, damit der Abzug des Logarithmen 5,3144252 bewerkstelliget werden konnte, und ein Logarithme übrig bliebe, den man unter der Characteristik 3 in den Tafeln aufsuchen kann. Man muß aber alsdann von der Zahl, die dem Logarithmen 3,3479801 zukömmt, wie bekannt, wieder 7 Decimalstellen abschneiden. Nun gehört dem Logvrithmen 3,3479801 die Zahl 2228 zu; Schneidet man also 7 Decimalstellen ab, so wird

$$\frac{60}{206264} \cos 40^\circ = 0,0002228.$$

D. h. der Sinus von 40° ist um 0,0002228 kleiner, als der Sinus von $40^\circ\ 1'$, oder wenn der Bogen von 40° um $1'$ wächst, so nimmt der

der Sinus dieses Bogens um 0,0002228 Theilchen des Halbmessers zu, wie man auch in der That findet, wenn man die Sinusse von 40° 1' und von 40° aus den Tafeln nimmt, und sie von einander abziehet.

XXVII. Das Wachsthum, die Abnahme, oder überhaupt die Veränderung einer Größe, wollen wir künftig mit dem Buchstaben d bezeichnen, welchen man vor diese Größe setzet. Wenn wir also z. B. andeuten wollen, daß der Bogen a um α wächst, so wollen wir statt dessen vor a den Buchstaben d setzen, und also das Wachsthum des Bogens a durch d a anzeigen, wo also d a so viel bedeutet, als das bisherige α.

Hier bedeutet also dieser Buchstabe d keinen Factor, sondern ist nur ein willkührliches Zeichen, so wie man die Logarithmen mit dem Buchstaben l, und die Wurzelgrößen mit dem Zeichen $\surd$ anzudeuten pflegt.

XXVIII. So würde 'also dieser Bezeichnung gemäs, das Wachsthum eines Sinus durch d sin a, eines Cosinus durch d cos a u. s. w. angedeutet, und es erhellet, daß diese Bezeichnungen eigentlich den Werth anzeigen, um den sich Sinus oder Cosinus eines Bogens a verändern, wenn der Bogen a um α oder d a zunimmt.

Daher wären folgende Ausdrückungen gleichgültig

$\sin(a + \alpha) - \sin a = \alpha \cos a$ oder

$d \sin a = da \, . \cos a$.

XXIX. Wenn der Winkel a stumpf ist, so wird $\cos a$ negativ, mithin auch $da \, . \cos a$ oder $d \sin a$ negativ. D. h. wenn der stumpfe Winkel a um da zunimmt, so nimmt der Sinus desselben um den Werth $da \, . \cos a$ ab, weil $d \sin a$ oder das Wachsthum des Sinus verneint wird, und ein verneintes Wachsthum ein Abnehmen bedeutet; Eben dieser Satz ist aus der gemeinen Trigonometrie, und aus einer zu dieser Absicht entworfenen Figur klar, wo man bemerken wird, daß, wenn ein Bogen über $90°$ wächst, der Sinus desselben wieder abnimmt.

XXX. Wir wollen nun auf eine ähnliche Art untersuchen, um wie viel sich ein Cosinus verändert, wenn der zugehörige Winkel um einen geringen Werth wächst. Zu dieser Absicht überlege man, daß, wenn a sich in $a + \alpha$ verwandelt, sich $\cos a$ in $\cos(a + \alpha)$ oder in $\cos a \cos \alpha - \sin a \sin \alpha$ (Trig. S. XII. 2.) verwandele; weil nun aus eben dem Grunde wie in (XXVI) $\cos \alpha = 1$ und $\sin \alpha = \alpha = da$ (XXVII) gesetzt werden kann, so erhält man

$\cos(a + da) = \cos a - da \sin a$.

Mit-

Mithin

$\cos(a + da) - \cos a = - da \sin a$ oder wie in (XXVII)

$d \cos a = - da . \sin a.$

D. h. der Cosinus des Bogens a nimmt um den Werth $da . \sin a$ ab, wenn der Bogen a um da wächst, weil eben so wie in XXIX eine negative Zunahme wie $- da \sin a$ eine Abnahme bedeutet.

XXXI. Wenn x, y ein paar Größen bedeuten, und man setzt, x wachse um dx, y um dy, so ist klar, daß die Summe $x + y$ um $dx + dy$ und der Unterschied $x - y$ um $dx - dy$ wachsen werde. Eine Größe, die man um nichts wachsen oder abnehmen läßt, deren Wachsthum ist als Null anzusehen. Man nennt solche Größen unveränderliche. — Wenn daher b eine solche Zahl bedeutet, die man als unveränderlich betrachtet, so ist $db = o$.

XXXII. Wenn man annimmt, in dem Producte xy verändere sich x in $x + dx$ und y in $y + dy$, so verwandelt sich das Product xy in $(x + dx)(y + dy)$ und wenn man von $(x + dx)(y + dy)$ abziehet xy, so findet sich, um wie viel das ganze Product xy wächst, wenn jeder Factor desselben um etwas

zu-

zunimmt. Nun ist, wenn man würklich multiplicirt

$$(x+dx)(y+dy) = xy + xdy + ydx + dydx$$

Ziehet man also davon ab xy, so findet man zum Ueberreste den Werth $xdy + ydx + dydx$, oder um so viel ändert sich das Product xy, wenn jeder Factor sich um etwas ändert. Bezeichnet man also das Wachsthum, oder die Veränderung des Products mit dem Buchstaben d, so wird

$$d(xy) = xdy + ydx + dydx.$$

XXXIII. Wenn man auf eben die Art die Veränderung des Quotienten $\frac{x}{y}$ sucht, unter der Voraussetzung, daß x um dx, und y um dy wachse, so erhält man

$\frac{x+dx}{y+dy} - \frac{x}{y}$ für die Veränderung des Quotienten. Bringt man nun diese beyden Brüche unter einerley Benennung, und ziehet sie würklich von einander ab, so erhält man diesen Unterschied, mithin das Wachsthum oder die Veränderung des Quotienten $\frac{x}{y}$; Folglich

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{(y+dy).y}.$$

XXXIV. Diese beyden Formeln (XXXII u. XXXIII) gelten, die Werthe dx, dy mögen so groß seyn, als sie wollen. Da wir nun zu unserer Absicht in der Folge annehmen, daß diese Größen dx, dy, in Vergleichung der zugehörigen x, y, sehr klein sind, so lassen sich unter dieser Voraussetzung die beyden Formeln (XXXII. XXXIII) noch etwas abkürzen. Wenn nähmlich in (XXXII) die Werthe dy, dx, sehr klein sind, z. E. Brüche von sehr großen Nennern, oder kleinern Zählern bedeuten, so kann man das Product $dy.dx$ in Vergleichung der Producte xdy, ydx als unendlich gering, und folglich als verschwindend ansehen. Gesetzt, es wäre $x = 100$, $y = 60$, $dx = 0{,}001$, $dy = 0{,}0002$ so würde

$$ydx + xdy + dy\,dx = 0{,}06 + 0{,}02 + 0{,}0000002$$

wo man offenbar den letzten Bruch, als den Werth von $dy.dx$, in Vergleichung der vorhergehenden Brüche weglassen kann.

Unter dieser Voraussetzung ist daher beynahe $d(xy) = xdy + ydx$.

Und wenn $x = y$ also $dy = dx$ wäre, so hätte man

$$d(x^2) = xdx + xdx = 2 . xdx.$$

Da drückte also $2xdx$ aus, um wie viel sich das Quadrat x^2 einer gewissen Zahl x verändert, wenn die Zahl x um dx zunimmt.

XXXV.

XXXV. Auf gleiche Weise kann man in der Formel XXXIII statt des Factors $y + dy$ im Nenner, ohne merklichen Fehler blos y setzen, das gäbe demnach

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

XXXVI. Wenn x eine Größe wäre, die man um nichts wachsen oder abnehmen liesse, für die also $dx = 0$ wäre, so erhielte man bloß

$$d(x.y) = x\,dy \text{ und } d\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x\,dy}{y^2}.$$

Im letztern Falle ist das Wachsthum des Quotienten $\frac{x}{y}$ negativ, weil der Werth $-\frac{x\,dy}{y^2}$ negativ ist, wenn die Größen x, dy, als positiv angesehen werden. Dieß zeigt also an, daß der Quotient $\frac{x}{y}$ nicht wächst, sondern abnimmt, wenn der Zähler x unveränderlich bleibt, der Nenner y aber um dy wächst. Eben dieses ist auch schon aus der gemeinen Lehre von Brüchen klar, wo bekanntermaaßen ein Bruch abnimmt, wenn der Zähler unveränderlich bleibt, und der Nenner größer wird.

Wenn man die Werthe von dx, dy negativ nimmt, d. h. wenn man in dem Producte

ducte xy, oder Quotienten $\frac{x}{y}$, die Größen x, y, um dx, dy abnehmen läßt, so wird

$$d\,(xy) = -\,x\,dy - y\,dx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = -\,\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

XXXVII. Die bisherigen Betrachtungen werden nun dazu dienen, auch für die Tangenten, Secanten u. s. w. solche Rechnungen anzustellen, wie in (XXIX. XXX.) für den Sinus und Cosinus gewiesen worden.

Man kann nehmlich ebenfalls fragen, um wie viel die Tangente oder Secante eines Bogens a wachse, oder überhaupt sich verändere, wenn man den Bogen a um da zu- oder abnehmen läßt. Um diese Untersuchung erstlich für die Tangente anzustellen, so überlege man, daß

$$\text{tang}\,a = \frac{\sin a}{\cos a}$$ mithin auch

$$d\,\text{tang}\,a = d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)$$ sey.

Weil nun $\frac{\sin a}{\cos a}$ einen Quotienten vorstellet, so läßt sich dessen Veränderung nach XXXV.

berech-

berechnen, wenn man das dortige x hier sin a und das dortige y hier cos a bedeuten läßt; Also hat man

$$d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) = \frac{\cos a \,.\, d \sin a - \sin a \,.\, d \cos a}{\cos a^2}$$

Nun ist aber aus (XXVIII, XXX)

$$d \sin a = d a \,.\, \cos a; \quad d \cos a = - d a \,.\, \sin a$$

Substituirt man also diese Werthe, so wird

$$d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) = \frac{d a\,(\cos a^2 + \sin a^2)}{\cos a^2}$$

Aber $\cos a^2 + \sin a^2 = 1$ also

$$d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) \text{ oder } d \tang a = \frac{d a}{\cos a^2}$$

Wo man also, wenn $d a$ gegeben ist, den Werth von $d \tang a$ finden kann.

XXXVIII. Weil $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$ folglich

$$d \cot a = d\left(\frac{\cos a}{\sin a}\right)$$

so sey jetzt das x in (XXXV) $= \cos a$, und $y = \sin a$ so wird nach einer ähnlichen Rechnung

$$d\left(\frac{\cos a}{\sin a}\right) = \frac{\sin a \,.\, d \cos a - \cos a \,.\, d \sin a}{\sin a^2}$$

oder

oder $d\left(\frac{\cos a}{\sin a}\right) = \frac{-da\,(\cos a^2 + \sin a^2)}{\sin a^2}$

oder $d \cot a = -\frac{da}{\sin a^2}$.

XXXIX. 1. Weil $\sec a = \frac{1}{\cos a}$ so ist

$d \sec a = d\left(\frac{1}{\cos a}\right)$

Man setze also in XXXV $x = 1$; $y = \cos a$; so ist, weil sich die 1 nicht verändert, $dx = 0$ folglich

$d\left(\frac{1}{\cos a}\right) = -\frac{d\cos a}{\cos a^2} = \frac{da\,.\sin a}{\cos a^2} =$

$da\,.\frac{\sin a.}{\cos a}\;\frac{1}{\cos a} = da \tang a \sec a$. also

$d \sec a = da\,.\tang a\,.\sec a$.

XXXIX. 2. Auf eine völlig ähnliche Art wird wegen $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$

$d \operatorname{cosec} a = -da\,.\cot a\,.\operatorname{cosec} a$.

XL. Diese Sätze sind von sehr großen Nutzen, und in der Folge werden wir bey Untersuchung der Folgen der Fehler in den Messungen, die Anwendung davon machen. Anfängern wird es es dienlich seyn, nach Anleitung des Beyspiels XXVI, sich auf eine ähnliche Art den Gebrauch der für d tang a, d sec a u. s. w. gefundenen Formeln zu erläutern, wobey dann zu bemerken ist, daß man unter d a immer das Wachsthum des Bogens a in Decimaltheilen des Halbmessers verstehen, oder daß man statt d a eigentlich $\frac{da}{206264}$ setzen müsse, wenn d a in Secunden gegeben wäre.

XLI. Jetzt wollen wir auch die Untersuchung anstellen, um wie viel sich der Logarithme einer Zahl ändert, wenn die Zahl selbst um etwas geringes zu- oder abnimmt. Um dieses zu bestimmen, müssen wir aber vorher folgendes beybringen.

XLII. Wenn c eine gegebene Zahl bedeutet, die größer ist als 1, und μ einen unendlich kleinen Bruch vorstellt, so wird der Ausdruck $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$ einen unveränderlichen Werth haben, so lange man c nicht ändert, μ mag übrigens nach Gefallen verändert werden, wenn es nur immer sehr klein bleibt.

Bew.

Bew. Es bedeutet ρ einen ganz andern kleinen Bruch als μ; Kann man nun beweisen, daß

$$\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = \frac{c^{\rho} - 1}{\rho}$$

sey, so erhellet leicht, daß dadurch zugleich dargethan seyn wird, daß sich $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$ nicht verändere, wenn man gleich statt μ den kleinen Bruch ρ setzet.

Um also zu beweisen, daß $\frac{c - 1}{\mu} = \frac{c - 1}{\rho}$ sey, so überlege man folgendes.

Weil aus der Buchstabenrechenkunst klar ist, daß $c^{0} = 1$, so erhellet, daß wenn μ oder ρ ein paar sehr kleine Brüche sind, die Ausdrückungen c^{μ}; c^{ρ} nur etwas sehr geringes größer als 1 seyn können: Man setze also $c^{\mu} = 1 + m$, $c^{\rho} = 1 + r$, so werden auch m, r ein paar sehr kleine Brüche seyn.

Nun will ich annehmen, der kleine Bruch μ sey größer als ρ, und setzen, daß μ z. E. ein vielfaches von ρ, also $\mu = \alpha . \rho$, und α eine ganze

Zahl

Zahl sey. Wäre z. E. $\mu = 3 . \varrho$ folglich $\alpha = 3$ so zeigte dieß an, daß der erstere kleine Bruch dreymal größer, als der zweyte sey u. s. w.

Folglich wäre

$$c^{\mu} = c^{\alpha . \varrho} = (c^{\varrho\alpha}) = (1+r)^{\alpha}$$

Man setze nun z. E. $\alpha = 2$, so wäre

$(1+r)^{\alpha} = (1+r)^2 = 1 + 2r + r^2$; weil aber r einen sehr kleinen Bruch bedeutet, so kann man ohne merklichen Irrthum das Quadrat desselben, als unbeträchtlich in Absicht der beyden vorhergehenden Glieder, weglassen und daher bloß setzen $(1+r)^2 = 1 + 2r$.

Für $\alpha = 3$ wäre $(1+r)^{\alpha} = (1+r)^3 = (1+r)(1+r)^2 = (1+r)(1+2r) = 1 + 3r$ weil man in dem Produkte $(1+r)(1+2r)$ gleichfalls die höhern Potenzen des kleinen Bruchs r weglassen kann.

Für $\alpha = 4$ hätte man $(1+r)^{\alpha} = (1+r)^4 = (1+r)(1+r)^3 = (1+r)(1+3r) = 1+4r$ aus eben dem Grunde.

Wenn man auf solche Art diese Schlüsse weiter fortsetzt, so siehet man leicht, daß allgemein

$$(1+r)^{\alpha} = 1 + \alpha . r$$

seyn

seyn müsse, vorausgesetzt, daß αr auch noch immer sehr klein bleibt.

Da nun $c^\mu = (1 + r)^\alpha$ so wird auch $c^\mu = 1 + \alpha . r$ seyn. Aber es ist auch $c^\mu = 1 + m$ gesetzt worden, folglich hat man $1 + m = 1 + \alpha . r$ oder $m = \alpha . r$.

Es wird also

$$\frac{c^\mu - 1}{\mu} = \frac{1 + m - 1}{\alpha . \rho} =$$

$$= \frac{1 + \alpha r - 1}{\alpha \rho} = \frac{r}{\rho}$$

Ferner auch

$$\frac{c^\rho - 1}{\rho} = \frac{1 + r - 1}{\rho} = \frac{r}{\rho}$$

Also

$$\frac{c^\mu - 1}{\mu} = \frac{c^\rho - 1}{\rho}$$

Man siehet also, daß die Größe $\frac{c^\mu - 1}{\mu}$ mit $\frac{c^\rho - 1}{\rho}$ einerley Werth hat, obgleich μ

einen ganz andern kleinen Bruch als ρ bedeutet, daß daher die Größe $\frac{c^\mu - 1}{\mu}$, für ein gegebenes c einen unveränderlichen Werth habe, man mag statt μ für einen kleinen Bruch setzen, was man für einen will. Setzt man also

$\frac{c^\mu - 1}{\mu} = A$ so ist A eine beständige Größe, welche blos von c, aber keinesweges von μ abhängt.

Aus $\frac{c^\mu - 1}{\mu} = A$; folgt auch $c^\mu = 1 + A.\mu$.

Die bisherigen Schlüsse gründen sich darauf, daß μ einen sehr kleinen Bruch bedeute; je kleiner nun derselbe ist, desto richtiger wird auch die daraus hergeleitete Folge seyn.

Weil $c^\mu = 1 + m$ gesetzt worden, so ist $\mu \log c = \log(1+m)$ also

$$\mu = \frac{\log(1+m)}{\log c} \text{ mithin}$$

$$\frac{c^\mu - 1}{\mu} \text{ oder } A = \frac{m}{\mu} = \frac{m \log c}{\log(1+m)}$$

Dieser

Dieser Ausdruck dienet also, die Größe A zu finden, wenn man m als einen sehr kleinen Bruch, willkührlich annimmt.

XLIII. Gesetzt, es sey $c = 10$; $m = 0{,}0000001$ so wird $A = \frac{0{,}0000001}{\log 1{,}0000001}$ Aber aus Gardiners großen Logarithmen-Tafeln finde ich

$$\log 1{,}0000001 = 0{,}00000043429$$

dieß gäbe demnach

$$A = \frac{0{,}0000001}{0{,}00000043429} = \frac{100000}{43429}$$

oder $A = 2{,}30258$; Daher wäre allgemein für $c = 10$ der Werth

$$\frac{10^{\mu} - 1}{\mu} = 2{,}30258.$$

XLIV. Nach diesen Vorbereitungen werden wir nun die Frage in (XLI) auf folgende Art auflösen.

Gesetzt, es sey $\log x = y$, und die Basis des logarithmischen Systems $= c$, so ist bekannt, daß $c^{y} = x$ sey. Man nehme nun an, daß y um dy wachse, wenn x um dx zunimmt, und die Werthe von dy, dx, seyen in Absicht der Größen y, x sehr klein, so verwandelt sich die Gleichung

$\log x = y$ in

$\log(x + dx) = y + dy = \log x + dy$;

Also $l(x + dx) - \log x = dy$ oder welches einerley ist $\log\left(\frac{x + dx}{x}\right) = dy$ folglich wegen $\frac{x + dx}{x} = 1 + \frac{dx}{x}$ wird,

$$\log\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = dy.$$

Wenn aber c die Basis des Logarithmischen Systems ist, so verwandelt sich diese Gleichung ferner in $c^{dy} = 1 + \frac{dx}{x}$.

Da nun $\frac{dx}{x}$ eine sehr geringe Größe ist, so wird auch dy einen sehr geringen Werth haben; läßt man daher das μ in (XLIII) hier dy bedeuten, so hat man ohne beträchtlichen Fehler $c^{dy} = 1 + A\,dy$ wo A eine unveränderliche Größe ist, die von der Basis des log. Systems abhängt (XLII); Es wird demnach

$$1 + A\,dy = 1 + \frac{dx}{x} \text{ also}$$

dy

$$dy = \frac{1}{A} \cdot \frac{dx}{x} \text{ oder}$$

$$d \log x = \frac{1}{A} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Woraus also erhellet, daß das Wachsthum des Logarithmen der Zahl x herauskömmt, wenn man das Wachsthum der Zahl x, mit der Zahl x selbst dividiret, und den Quotienten mit der unveränderlichen Größe $\frac{1}{A}$ multiplicirt.

XLV. Für die Briggischen Logarithmen ist $c = 10$ und $A = 2,30258$ (XLIII) oder $\frac{1}{A}$ $= 0,43429$, mithin wenn $d \log x$ das Wachsthum des Briggischen Logarithmen der Zahl x bedeutet, so ist

$$d \log x = 0,43429 \frac{dx}{x}.$$

Ex. Um die Wahrheit dieses Satzes mit einem Beyspiele zu erläutern, so will ich setzen $x = 8900$; und $dx = 1$, also untersuchen, um wie viel der Logarithme von 8901 von dem Logarithmen der Zahl 8900 unterschieden ist. In diesem Falle wäre also dieser Unterschied

oder

oder der Werth von $d \log x = 0,43429$. $\frac{1}{8900} = 0,0000488$, welches man auch in der That so findet, wenn man in den Tafeln die beyden Logarithmen der Zahlen 8901 und 8900 von einander abziehet.

XLVI. Da die unveränderliche Größe $\frac{1}{A}$ von der Basis des logarithmischen Systems abhängt, so läßt sich leicht ein gewisses logarithmisches System gedenken, wo $\frac{1}{A} = 1$ wird; dieses logarithmische System nennt man das natürliche. Was es mit demselben für eine Bewandniß habe, gehört in die höhere Mathematik, und es würde wider unsere Absicht seyn, hier davon weitläuftiger zu handeln, da man ohnehin in der practischen Geometrie die natürlichen Logarithmen selten gebraucht. Man sehe indessen hievon Hrn. H. Kästners An. des Un. 213 §. u. f. Wir wollen künftig den Werth $\frac{1}{A}$ der Kürze halber mit dem Buchstaben B bezeichnen, und damit hätte man $d \log x = B . \frac{dx}{x}$

XLVII. Wir können nun, vermittelst des gefundenen Ausdrucks, auch das Wachsthum der Logarithmen der trigonometrischen Linien berechnen, wenn man annimmt, daß die zugehörigen Bogen um einen sehr geringen Werth wachsen. Man setze zu dieser Absicht statt x, die Werthe sin a, cos a, tang a, cot a, sec a, cosec a, so ergeben sich daraus folgende Formeln:

1) $d \log \sin a = B . \frac{d \sin a}{\sin a}$; aber $d \sin a =$ $da \cos a$ (XXVIII) also

$$d \log \sin a = \frac{B\, da . \cos a}{\sin a} = B\, da . \cot a.$$

2) $d \log \cos a = \frac{B . d \cos a}{\cos a} = - \frac{B . da . \sin a}{\cos a}$

oder

$$d \log \cos a = - B . da . \tang a.$$

3) $d \log \tang a = \frac{B . d \tang a}{\tang a}$ aber

$d \tang a = \frac{da}{\cos a^2}$ (XXXVII) daher

$$d \log \tang a = \frac{B\, da}{\cos a^2 . \tang a} = \frac{B\, da}{\cos a . \sin a}$$

$= \frac{2 B . da}{\sin 2 a}$ (XIII. 21.)

4)

4) und eben so

$$d \log \cot a = - \frac{2B \cdot da}{\sin 2a}.$$

5) $d \log \sec a = \frac{B \cdot d \sec a}{\sec a}$ aber $d \sec a =$

$da \cdot \tang a \cdot \sec a$ daher

$$d \log \sec a = B \cdot da \cdot \tang a$$

6) und eben so

$$d \log \operatorname{cosec} a = - B \cdot da \cdot \cot a.$$

Welche Formeln durchgehends von sehr großer Brauchbarkeit sind, und dazu dienen werden, in der Folge die Berechnung der Fehler in den Messungen sehr abzukürzen.

XLVIII. Man pflegt die bisher vorgetragenen Formeln sonst auch in der Differentialrechnung abzuhandeln, und leitet sie aus der Lehre von den Gränzen der Verhältnisse her. Da ich diese Lehre hier nicht vortragen durfte, ohne zu befürchten, daß manche Leser darinn mehr Geheimnisse suchen möchten, als würklich darinnen enthalten sind, da es ferner auch zu meiner Absicht nicht nothwendig war, das bisherige den eigentlichen Begriffen der Differentialrechnung gemäß, vorzutragen, so habe ich einen Weg erwählet, der Anfängern weniger geheimnißvoll scheinen wird,

wird, wenn sie nur sonst mit einiger Aufmerksamkeit die Sätze ansehen und nachrechnen, auch übrigens in der Trigonometrie und der Lehre von Logarithmen die erforderlichen Kenntnisse haben.

Formeln aus der sphärischen Trigonometrie.

XLIX. Da es in der practischen Geometrie sehr oft vorkömmt, daß man die Lagen gewisser Ebenen gegeneinander betrachten und berechnen muß, die dahin gehörigen Rechnungen aber zur sphärischen Trigonometrie gehören, so habe ich für nöthig erachtet, hier wenigstens das allgemeine davon, und die Formeln, nach denen dergleichen Rechnungen anzustellen sind, kürzlich beyzubringen.

1. Man stelle sich also (Fig. I.) vor, RSEF, STFD seyen ein paar Ebenen, die unter einem gewissen Winkel gegeneinander geneigt sind. SF sey derselben gemeinschaftliche Durchschnittslinie.

Man nehme auf SF einen willkührlichen Punkt F an, und gedenke sich durch denselben eine dritte Ebene IK, gelegt, welche die beyden erstern in FE und FD durchschnitte.

Diese Durchschnittslinien FE, FD der Ebene IK mit den Ebenen RSEF, STFD, werden nun gemeinschaftlich durch den Punkt F gehen,

gehen, weil die schneidende Ebene IK durch diesen Punkt gelegt ist. Man wird demnach aus (1. 2) um den Punkt F herum, drey ebene Winkel SFE, SFD, EED erhalten, welche bey F eine sogenannte körperliche Ecke begränzen werden.

3. Ausser diesen drey ebenen Winkeln, welche hier die Ecke bilden, kommen nun noch drey andere Winkel in Betrachtung, nemlich die Neigungswinkel der Ebenen gegeneinander, oder die sogenannten Flächen-Winkel, oder auch sphärische Winkel.

4. Um solche zu bestimmen, so seyen in der II. Figur die Linien SF, FE, FD, eben dieselben, welche sich durch die Durchschnitte der Ebenen in der ersten Figur ergeben haben, dergestalt, daß also in der II. Figur die drey ebenen Winkel, SFE, SFD, EFD, bey F die Ecke der Isten Figur bilden.

5. Man nehme nun, um den Neigungswinkel der beyden Ebenen, SFE, SFD, zu bestimmen, in ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie SF, einen willkührlichen Punkt k an, und errichte durch ihn auf SF, ein paar Perpendiculärlinien ki, kl, davon kl in der Ebene SFD, und ki in der SFE liege, so ist bekanntermaaßen der Winkel ikl, den diese beyden Linien ki, kl, mit einander machen, der Neigungswinkel der beyden Ebenen

SFE,

SFE, SFD gegeneinander. Auf eben die Art würden die beyden Perpendiculärlinien mn, no, davon mn in der Ebene SFE, und no in der Ebene EFD läge, den Neigugswinkel dieser beyden Ebenen, und der Winkel qrp, den die beyden durch r auf FD senkrecht gezogenen Linien qr, rp, mit einander machen, den Neigungswinkel der beyden Ebenen SFD, EFD bestimmen.

6. Es kommen also solchergestalt bey einer Ecke, die durch drey Ebenen gebildet wird, sechs Stücke in Betrachtung, nemlich: 1) die drey ebenen Winkel SFE, SFD, EFD, die die Ecke bilden, und 2) die drey Neigungswinkel mno, ikl, prq, unter welchen die Ebenen der Winkel SFE, SFD, EFD gegen einander geneigt sind.

7. Man nehme einen willkührlichen Halbmesser an, uud beschreibe aus der Ecke F, mit demselben, in den Ebenen SFE, SFD, EFD, die drey Kreisbogen AB, AC, BC, so sind die Bogen AB, AC, BC, der drey Winkel SFE, SFD, EFD, Maaße. Wenn man sich mit dem Halbmesser FA eine Kugel um den Mittelpunkt F beschrieben vorstellet, so würden die uur erwähnten Bogen AB, AC, BC, Bogen von größten Kreisen auf der Kugelfläche seyn, und gleichsam auf der Kugelfläche, ein Dreyeck ABC, das von drey

Bogen

Bogen größter Kreise eingeschlossen wäre, abbilden. Dieses Dreyeck gehörte also am Mittelpunkte F, der körperlichen Ecke F zu, und wird ein sphärisches Dreyeck genannt. Die Bogen AB, AC, BC, als Maaße derjenigen Winkel, welche die dem Dreyecke zugehörige Ecke bilden, heissen Seiten des sphärischen Dreyecks.

8. Man stelle sich bey A, ein paar Tangenten $A\mu$, $A\lambda$ vor, davon $A\mu$, den Bogen AB im Punkte A, und $A\lambda$ den Bogen AC im Punkte A berühret, so stehen diese beyden Tangenten auf dem gemeinschaftlichen Halbmesser AF senkrecht; da nun auch ik, kl auf AF senkrecht stehen, so ist ik parallel mit $A\mu$ und kl parallel mit $A\lambda$, daher der Winkel $\mu A \lambda = ikl$ (Kästn. Geom. 46. S. 2. Zus.) Also der Winkel beyder Tangenten, dem Neigungswinkel der beyden Ebenen gleich, in denen diese Tangenten oder die Bogen AB, AC, oder die zugehörigen Winkel AFB, AFC, liegen. Da nun die Tangenten $A\mu$, $A\lambda$, die Richtungen ihrer Bogen bey A vorstellen (Kästn. Geom. 41. S. 6. Z.) so sagt man, die Kreise AB, AC, machen bey A, einen Winkel BAC, oder $\mu A \lambda$, welcher dem Neigungswinkel ikl der beyden Ebenen AFB, AFC, gleich ist.

Eigentlich muß man sich bey A ein paar Elemente, oder unendlich kleine Stückchen der bey-

beyden Kreise AB, AC, vorstellen. Der Winkel dieser beyden Elemente ist mit dem Winkel der Tangenten, oder mit $\mu A \lambda$ einerley, weil die verlängerten Richtungen dieser Elemente, mit den Tangenten $A\mu$, $A\lambda$ zusammenfallen.

Auf gleiche Weise, und in eben der Bedeutung stellen also auch die Winkel, welche die Kreisbogen AC, BC bey C, und AB, BC, bey B mit einander machen, die beyden Neigungswinkel prq, mno, vor.

9. Das sphärische Dreyeck hängt also mit der körperlichen Ecke bey F, so zusammen, daß die Seiten desselben die Maaße der ebenen Winkel sind, die die körperliche Ecke bey F bilden, und die sphärischen Winkel BAC, ACB, ABC, den Neigungswinkeln der Ebenen gleich sind, welche die körperliche Ecke einschließen.

10. Es ist also klar, daß, wenn man die Seiten oder Winkel des sphärischen Dreyecks weiß, auch die Größe der ebenen Winkel, welche die körperliche Ecke bilden, und die Neigungswinkel der drey Ebenen der körperlichen Ecke bekannt seyn werden.

11. So wie nun in der ebenen Trigonometrie gewiesen wird, daß drey Stücke eines Dreyecks die übrigen drey bestimmen, so läßt sich gleichfalls in der sphärischen Trigonometrie dar-

darthun, daß aus drey gegebenen Stücken eines sphärischen Dreyecks, und folglich auch einer körperlichen Ecke, die übrigen drey durch Rechnung gefunden werden können.

12. Was in der ebenen Trigonometrie die Seiten eines Dreyecks sind, das sind in der sphärischen Trig. die Bogen AB, AC, BC, welche das sphärische Dreyeck bilden, oder vielmehr die ebenen Winkel, AFB, AFC, BFC, welche die körperliche Ecke einschließen; und was in der ebenen Trigonometrie die Winkel des Dreyecks sind, das sind in der sphärischen Trigonometrie die Winkel BAC, ACB, ABC des sphärischen Dreyecks, oder die Neigungswinkel der Ebenen gegeneinander, die die körperliche Ecke begränzen.

13. Nur muß man bey dem sphärischen Dreyecke bemerken, daß die Seiten desselben, oder die Bogen AB, AC, BC, nicht wie in der ebenen Trigonometrie, durch Fußmaaße gegeben werden, sondern daß man ihre Größe durch Grade, Minuten u. s. w. angiebt, und daher ist klar, daß, wenn man den Sinus, die Tangente, oder sonst eine trigonometrische Linie für eine Seite des sphärischen Dreyecks durch Rechnung gefunden hat, man aus den Sinustafeln auch sogleich die Größe dieser Seite in Graden, Minuten u. s. w. finden wird.

14. Es würde nun viel zu weitläuftig seyn, hier die Beweise für die Vorschriften zu geben, nach denen sich in einem sphärischen Dreyecke, aus drey Stücken desselben, die übrigen durch Rechnung bestimmen lassen. — Ich verweise daher meine Leser auf Hrn. H. Kästners astronom. Abh. I. Samml. II. Abh. oder auf andere Schriften, z. E. Karstens Mathematik II. Theil u. s. w. und begnüge mich hier blos mit den Formeln ohne Beweis, wornach Anfänger die Auflösung eines sphärischen Dreyecks bewerkstelligen können, wenn sie nur aus demjenigen, was ich bisher allgemein beygebracht habe, wissen, was sie eigentlich zu suchen haben, und nicht vergessen, daß dasjenige, was in einem sphärischen Dreyecke durch Rechnung gefunden wird, auch allemahl auf die zugehörige körperliche Ecke sich deziehe.

L. Ich werde nun ein für allemal in einem sphärischen Dreyecke, die drey Winkel desselben mit den großen Buchstaben A, B, C, bezeichnen, und die gegenüberstehenden Seiten desselben, mit den kleinen a, b, c.

Regeln zur Auflösung sphärischer Dreyecke.

LI. Man kann hier eigentlich 5 Aufgaben in Erwägung ziehen. Die erste: Aus drey Stücken eines Dreyecks die übrigen zu finden, wenn

wenn sich unter den gegebenen Stücken ein Winkel und eine gegenüberstehende Seite befinden. Die zweyte: Aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, das übrige zu finden, die dritte, aus einer Seite und zwey anliegenden Winkeln, und ferner die vierte aus allen drey Seiten, und endlich die fünfte aus allen drey Winkeln das übrige zu finden. Die Formeln für die Auflösung dieser 5 Fälle sind nun folgende.

LII. Für den ersten Fall hat man die Regel, daß sich die Sinusse der Seiten, wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel verhalten. Heißen also die gegebenen Winkel A, B, und die gegenüberstehenden Seiten a, b, so hat man $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$, also

$$\sin A \cdot \sin b = \sin B \cdot \sin a.$$

Durch welche Formel also aus zwey Seiten und einem Winkel, der andere Winkel, oder aus zwey Winkeln, und einer Seite, die andere Seite gefunden werden kann.

LIII. Für den zweiten Fall heiße A der gegebene Winkel, und c, b, die beyden Seiten, die ihn einschliessen, so kann man entweder einen von den beyden übrigen Winkeln B, C, die den Seiten b, c, gegenüber stehen, oder die dritte Seite a, die dem gegebenen Winkel A gegenüber stehet, durch Rechnung finden.

finden. — Man hat für diese beyden Auflösungen folgende Formeln.

$$1)\ \mathrm{tang}\,B = \frac{\sin A \,.\, \mathrm{tang}\, b}{\sin c - \mathrm{tang}\, b \,.\, \cos c \,.\, \cos A}$$

oder wegen $\frac{1}{\mathrm{tang}\,B} = \cot B$

$$\cot B = \frac{\sin c}{\sin A \,.\, \mathrm{tang}\, b} - \cos c \,.\, \cot A$$

wodurch man den Winkel B findet, welcher der Seite b gegenüber stehet. Verlangt man den Winkel C, so würde man ihn durch eben die Formel finden, wenn man nur C, b, c, statt B, c, b, setzte.

$$2)\ \cos a = \cos A \,.\, \sin b \,.\, \sin c + \cos b \,.\, \cos c$$

ist die Formel, wodurch aus den beyden Seiten c, b, und dem eingeschlossenen Winkel A, die dritte Seite a bestimmt wird.

LIV. Für den dritten Fall seyen A, B, die beyden gegebenen Winkel, und c die Seite an der sie anliegen, so ist für den dritten der Seite c gegenüber stehenden Winkel.

$$1)\ \cos C = \cos c \,.\, \sin A \,.\, \sin B - \cos A \,.\, \cos B.$$

Für eine der beyden Seiten aber

$$2)\ \mathrm{tang}\, b = \frac{\sin c\ \mathrm{tang}\, B}{\cos c\ \cos A\ \mathrm{tang}\, B + \sin A}$$

 oder

oder

$$\cot b = \frac{\sin A \cot B}{\sin c} + \cos A \cot c$$

wo b die Seite bedeutet, die dem Winkel B gegenüber stehet.

Es ist klar, daß man auch die Seite b berechnen könnte, wenn man vorher nach (1) den Winkel C gesucht hätte — denn alsdann wäre nach der Regel LIII

$\sin C : \sin c = \sin B : \sin b$ oder

$$\sin b = \frac{\sin c \sin B}{\sin C}$$

LV. Die Auflösung des vierten Falles ergiebt sich sogleich aus der Formel (LIV. 2.) denn aus ihr folgt umgekehrt

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \text{ oder}$$

$$\cos A = \frac{\cos a}{\sin b \sin c} - \cot b \cot c$$

wo also A der Winkel ist, den die beyden Seiten c, b, einschliessen.

LVI. Wenn endlich für den fünften Fall die drey Winkel A, B, C, heißen, und man will die Seite a haben, welche dem Winkel A gegen-

gegenüber stehet, so hat man für dieselbe nachstehende Gleichung

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \cot B \cot C.$$

LVII. Alle diese Formeln sind für den Sinus totus = 1 eingerichtet, daher man auch unter dieser Voraussetzung nach (Trig. S. I.) die Rechnung führen muß. Man bedient sich also der trigonometrischen Linien nicht so, wie sie für den Sinus totus = 10000000 gewöhnlich in den Tafeln angegeben sind, sondern dividirt vorher jede in den Tafeln, mit der Zahl 10000000, ehe man sie zur Berechnung unserer Formeln braucht, und wenn umgekehrt nach der Berechnung eine gewisse trigonometrische Linie für den Halbmesser 1 herausgekommen ist, so multiplicirt man sie vorher mit der Zahl 10000000, ehe man sie in den Tafeln aufsuchet, und den ihr zugehörigen Winkel bestimmt.

Die meisten dieser Formeln sind so beschaffen, daß sie aus zwey Theilen bestehen, davon jeder besonders ausgerechnet werden muß, welches für die Rechnung mit Logarithmen nicht ganz bequem ist. So z. E. bestehet in LVI die Formel, wodurch man cos a findet, aus zwey Theilen $\frac{\cos A}{\sin B \sin C}$ und $\cot B \cot C$, davon jeder besonders ausgerechnet werden muß. Ob nun wohl zwar jeder Theil für sich durch Logarithmen ausgerechnet werden kann, so wäre es doch besser, die Formel wäre so eingerichtet, daß man nicht erst ein paar Theile zusammen addiren müßte, um den Cos a zu finden, sondern geradezu statt des Cosinus selbst, den Logarithmen desselben erhielte. Dieß würde offenbar geschehen, wenn die Formel für Cos a nicht durch eine Summe, sondern durch ein einziges Product, oder einen Quotienten gegeben wäre. Formeln, wodurch man diese Absicht einer leichtern Berechnung erreichen kann, findet man gleichfalls in oberwähnten Astron. Abhandl. Hrn. Hofr. Kästners, allein da ich sie zu meinem Zweck in der Folge eben nicht gebrauchen werde, so habe ich sie weggelassen, und bin der Meynung, daß, wenn man auch nur die von mir angegebenen Formeln braucht, die Rechnung doch eben so gar weitläuftig nicht ausfällt.

LVIII. Um die Berechnungsart wenigstens durch ein Beyspiel hier zu erläutern, und die beym Gebrauche vorkommenden Erinnerungen desto besser ins Licht zu setzen, will ich z. E. die Formel (LVI) nemlich

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B \ \sin C} + \cot B \ \cot C$$

dazu

dazu gebrauchen, wo ich den ersten Theil $\frac{\cos A}{\sin B \sin C}$ $= x$ und den zweyten $\cot B \cot C = y$ nennen will. Es sey also z. E. $A = 135°$; $B = 70°$; $C = 60°$; so ist $\cos A = \cos 135° = \cos(90° + 45°) = - \sin 45°$.

Mithin

$$\cos a = - \frac{\sin 45°}{\sin 70° \sin 60°} + \cot 70° \cot 60°$$

Nun ist

$$\begin{array}{rcl} \log \sin 45° & = & 9{,}8494850 - 10 \\ \hline \log \sin 70° & = & 9{,}9729858 - 10 \\ \log \sin 60° & = & 9{,}9375306 - 10 \\ \hline \text{Summe dies. beyd. Log.} & = & 9{,}9105164 - 10 \end{array}$$

abgez. von l sin 45° läßt $3{,}9389686 = \log x$.

Ich habe nemlich die Characteristik des Logarithmen von 45° in Gedanken um 4 Einheiten vermehrt, damit ich einen Logarithmen 13,8494850 — 10 bekäme, von dem der Abzug des Logarithmen 9,9105164 — 10 geschehen könnte, und zum Reste ein Logarithme übrig bliebe, den man alsdann unter der Charakteristik 3 in den Tafeln aufsuchen könnte. — Man muß aber hierauf von der Zahl, welche dem Logarithmen 3,9389686 zugehöret, wieder so viel Decimalstellen mehr abschneiden, um so viel Einheiten oberwähnte Characteracteristik vermehret worden ist; Nun gehört dem Logarithmen 3,9389686 die Zahl 8689 zu, daher 4 Decimalstellen abgeschnitten,

$$x = 0,8689.$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{Ferner ist} & \log \cot 70^\circ & = 9,5610659 - 10 \\
 & \log \cot 60^\circ & = 9,7614394 - 10 \\
\hline
 & \text{Summe} & = 19,3225053 - 20
\end{array}
$$

Hier vermehre ich gleichfalls die Characteristik 19 um 4 Einheiten; dann wird

$$23,3225053 - 20 = 3,3225053,$$

von der Zahl aber die nun diesem Logarithmen zukömmt, schneide ich auch 4 Decimalstellen ab, oder dividire sie mit 10000, und finde sodann

$$y = 0,21013.$$

Es ist also $\cos a = -x + y = -0,86890 + 0,21013 = -0,65878$; Dieß wäre also cos a für den Sinus totus = 1, daher für den Sinus totus = 10000000, wird

$$\cos a = -6587800.$$

Da aber dieser Cosinus negativ ist, so zeigt dieses an, daß der Winkel a stumpf seyn müsse.

Man suche also in den Tafeln einen spitzigen Winkel, dessen Sinus die gefundene Zahl 6587800 ist, addire dazu 90°, so hat man den Winkel oder Bogen $a = 41^\circ\ 12' + 90^\circ = 131^\circ\ 12'$; Eigent-

Eigentlich fällt a zwischen 131° 12' und 131° 13' und man könnte die Secunden, wenn es nöthig wäre, durch Proportionaltheile suchen.

Wenn man die bey diesem Beyspiele vorkommenden Erinnerungen sich wohl bekannt gemacht hat, so wird es keine Schwürigkeit haben, auf eine ähnliche Art auch mit den übrigen Formeln gehörig zu rechnen.

Anmerkung. Die meisten von den angeführten Formeln sind so beschaffen, daß sie in jedem Falle anzeigen, ob der gesuchte Bogen oder Winkel spitz oder stumpf ist. Das entscheidet sich in solchen Fällen, wo die gesuchte Größe durch einen Cosinus oder eine Tangente gefunden wird; denn wenn diese trigonometrischen Linien bejaht oder verneint werden, so gehören sie zu spitzen oder stumpfen Winkeln.

In den Fällen, wo ein Winkel durch einen Sinus gefunden wird, findet eine Zweydeutigkeit statt, weil einerley Sinus sowohl zu einem spitzen, als stumpfen Winkel, (wo letzterer die Ergänzung des spitzen zu 180° ist) gehören kann. Von der Beschaffenheit ist die Formel (LII) $\sin A : \sin a = \sin B : \sin b$. In dieser

ser bleibt es unentschieden, ob man den aus ihr gefundenen Bogen oder Winkel, spitz oder stumpf nehmen müsse. Die Umstände einer Aufgabe, worauf diese Formel angewandt wird, werden indessen gewöhnlich diese Zweydeutigkeit entscheiden.

In der Astronomie kommen auch Fälle vor, wo die gegebenen oder auch gefundenen Bogen uud Winkel über 180° halten. Wenn man weis wie in solchen Fällen die trigonometrischen Linien positiv oder negativ zu nehmen sind, so können diese Fälle dem Berechner weiter keine Schwürigkeit machen. In der praktischen Geometrie kommen sie eben nicht vor.