IX. Kapitel.

Noch einige Methoden, Winkel aufs Papier abzutragen, und zu verzeichnen.

§. 139. Ich habe schon §. 106. die Einrichtung des geradlinigten Transporteurs erklärt, und gezeigt, wie man vermittelst desselben auf dem Papiere sowohl einen Winkel verzeichnen, als auch messen könne.

Diesem Verfahren kann man nun noch folgende Methoden beyfügen.

I. Jeder tausendtheiligte Maaßstab ist zugleich ein geradlinigter Transporteur.

Denn man kann vermittelst desselben, wenn man nur Sinustafeln bey der Hand hat, ebenfalls die Größe eines vorgegebenen Winkels auf dem Papiere sowohl verzeichnen, als messen.

Erstlich. Einen Winkel zu verzeichnen.

Gesetzt, man solle Fig. LII. an den Punkt g und an die Linie glP einen Winkel igl von 66° 30′ verzeichnen.

Aufl. Man fasse mit einem Handzirkel auf dem tausendtheiligten Maaßstabe, genau die Weite von 1000 Theilen, oder nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche der Feldmesser, eine Weite von 10° 0′ 0″; setze die eine Zirkelspitze in g ein, beschreibe mit der andern einen Kreisbogen lni, und suche nun für den Halbmesser 1000, aus den Sinustafeln den Sinus von $\frac{66° . 30'}{2}$ oder von 33° 15′. (§. 106. 4.) dieser findet sich = 548, 2932; das doppelte hievon giebt für den Halbmesser 1000 die Chorde von 66° 30′. Also ist

Chord. 66° 30′ = 1096, 5864,

oder die Decimalbrüche weggelassen

Chord. 66° 30′ = 1096,

d. i. die Chorde von 66° 30′ hält 1096 Theile des tausendtheiligten Maaßstabes; man fasse also von dem Maaßstabe eine Weite von 10° 9″ 6″, setze sie als Chorde von l nach i, und ziehe hierauf gi, so wird der Winkel lgi = 66° 30′ seyn.

Zwey=

Zweytens. Den auf dem Papiere vorgegebenen Winkel lgi zu messen.

Aufl. Man beschreibe wieder mit dem Halbmesser 1000, dessen Größe man von dem Maaßstabe abnimmt, den Bogen lni zwischen die Schenkel des vorgegebenen Winkels, fasse hierauf mit dem Zirkel die Chorde li und trage sie auf den tausendtheiligten Maaßstab; gesetzt, man fände li = 3° 4′ 6″ oder li = 346 Tausendtheilchen des Maaßstabes; die Hälfte hievon 173 ist der Sinus des halben Winkels lgi, für den Halbmesser oder Sinustotus = 1000. Man multiplicire also 173 mit 10000, so hat man den Sinus des halben Winkels lgi für den Sinus totus = 10000000, d. h. für den Halbmesser der Sinustafeln. Also ist

$$\sin \tfrac{1}{2}\, lgi = 1730000$$

daher aus den Sinustafeln

$\tfrac{1}{2}\, lgi = 9°\ 57' +$ Mithin der Winkel
$lgi = 19°.\ 54' +.$

Anmerk. Ist der Winkel lgi stumpf, so kann man seinen Nebenwinkel messen, und solchen von 180° abziehen, um lgi zu erhalten.

Man könnte auch so verfahren:

Zwi-

Zwischen den Schenkeln des stumpfen Winkels beschreibe man mit dem Halbmesser = 1000, einen Kreisbogen, und trage den Halbmesser, als Sehne von 60°, so oft auf diesen Bogen, als es angehet, bis ein Bogen, den ich a nennen will, übrig bleibt, der kleiner als 60° ist. Man messe die Chorde dieses Bogens, und bestimme daraus dessen Größe. Hierauf addire man zu dem gefundenen Bogen a so oft 60°, als man den Halbmesser auf den Bogen, der dem stumpfen Winkel zugehört, getragen hat, so hat man die Größe des auszumessenden stumpfen Winkels. Gesetzt, in Fig. LXXXII. sey der stumpfe Winkel cgc' zu messen. Mit dem Halbmesser $gc = 1000$ sey also der Kreisbogen clc' beschrieben; der Halbmesser gc passe z. E. nur einmahl auf den Bogen clc', nämlich von c nach l; und es bleibe der Bogen $c'l < 60°$ übrig. Man fasse die Chorde $c'l$, trage sie auf den tausendtheiligten Maaßstab, und bestimme daraus, wie gewiesen worden, den Bogen $c'l$ oder den zugehörigen Winkel lgc'; Ich will setzen, man habe $lgc' = 49° \, 54'$, gefunden; hierzu addire man den Winkel $cgl = 60°$, so hat man $cgc' = 109° . 54'$.

II. Noch eine andere Methode, die Winkel zu messen, und zu verzeichnen.

In einem rechtwinklichten Dreyecke ACG Fig. XIV. Tab. I. ist AC die Tangente des Winkels CGA, wenn man CG für den Halbmesser annimmt. Nimmt man hingegen die Hypothenuse AG für den Halbmesser an, so ist AC der Sinus des Winkels AGC, CG aber der Kosinus desselben.

Dieses giebt folgende Methode, zu finden, wie viel Grade und Minuten ein auf dem Papiere vorgegebener Winkel CGA enthält.

Nemlich von einem tausendtheilichten Maaßstaabe nehme man 1000 Theile ab, und trage sie von G nach A, auf den einen Schenkel des vorgezeichneten Winkels. Von A fälle man auf den andern Schenkel CG das Perpendickel AC herab, und untersuche, wie viel Tausendtheile eben desselben Maaßstabes das Perpendickel AC hält. Dann suche man in den Sinustafeln einen Sinus auf, dessen erste Ziffern, nach Abschneidung der vier letztern, mit der gefundenen Größe des Perpendickels AC übereinkommen, so hat man den Winkel CGA, der dem Sinus AC zugehört.

Ex. Gesetzt, man habe auf dem tausendtheilichten Maaßstabe gefunden AC = 173

Thei-

Theilen. Wenn man nun in den Sinustafeln den Sinus von 9° 58′ aufsucht, so findet man, daß nach Weglassung der letztern 4 Ziffern, dessen erste drey Ziffern, mit der für das Perpendickel AC gefundenen Zahl 173 übereinkommen; daher wird der Winkel G = 9° 58′ seyn.

Wollte man umgekehrt an den Punkt G einen Winkel von 60° 55′ verzeichnen, so ziehe man durch G eine gerade Linie GC, und mache solche so viel Theilen des tausendtheilichten Maaßstabes gleich, so viel die Zahl angiebt, welche man nach Weglassung der letzten 4 Ziffern für den Kosinus von 60° 55′ erhält. Nun ist den Tafeln Cos 60° 55′ = 4860812, hievon die letztern 4 Ziffern weggelassen, giebt die Zahl 486. So viel Tausendtheilchen des Maaßstabes trage man also von G nach C. Durch C errichte man hierauf ein Perpendickel CA, und trage auf CA so viel Theile des Maaßstabes, als die Zahl andeutet, welche man erhält, wenn man von dem Sinus von 60° 55′ die letztern vier Ziffern wegläßet. Nun ist Sin 60° 55′ = 8739136 daher nehme man CA = 873 oder (wegen der Zahl 9, welche auf die 3 folgt) beynahe 874 Theilen des Maaßstabes gleich, und ziehe demnächst die Linie AG, so wird der Winkel G = 60° 55′ seyn.

Man könnte auch GC = 1000 Theilen des Maaßstabes nehmen, und dann auf das Perpendickel CA so viel Theile setzen, als nach Weglassung der letzten 4 Ziffern für die Tangente von 60° 55′ stehen bleiben, so würde ebenfalls CGA = 60° 55′.

Diese letztere Methode, wobey man sich der Tangente bedient, ist aber nicht zu gebrauchen, wenn der zu verzeichnende Winkel nahe an 90° kömmt, weil alsdann die Tangente desselben gar zu groß wird.

Solchergestalt findet man vermittelst des bisher beschriebenen Verfahrens den Winkel CGA zwar nicht völlig genau in einzeln Minuten, aber doch wenigstens bis auf 4 oder 5 Minuten genau, so lange der Winkel CGA nicht über 50° ist. Die Ursache liegt darinnen, weil für größere Winkel die ersten drey Ziffern eines jeden Sinus, einerley sind, wenn die zugehörigen Winkel auch gleich um 5 und mehrere Minuten von einander unterschieden wären. So sind z. E. die ersten drey Ziffern der Sinusse von 65° und von 65° 5′ = 906. Ja, wenn die Winkel nahe an 90° kommen, so können sie sich wohl um einen ganzen Grad ändern, ohne daß die erstern drey Ziffern ihrer Sinusse von einander unterschieden wären. Z. E. Sin 88° = 9993907; Sin 89° = 9998477, wo also die ersten drey Ziffern der Si-

Sinusse = 999 sind, obgleich die Winkel um einen ganzen Grad von einander unterschieden sind.

Wollte man nemlich die Winkel genauer verzeichnen, so müßte man dem bisherigen Halbmesser GC mehr als 1000 Theile geben. Dann würde er aber wegen seiner Größe für den Gebrauch auf dem Papiere zu unbequem werden.

In Lamberts Beyträgen zur Mathematik II. Theil p. 170 befindet sich ein Werkzeug beschrieben, welches ebenfalls sowohl zur Verzeichnung, als zur Ausmessung der Winkel auf dem Papiere dienet. Die Einrichtung desselben beruhet auf der Methode, die Winkel durch ihre Tangenten zu bestimmen, und bestehet bloß in einem gleichschenklichten rechtwinklichten Dreyecke von Holz, Elfenbein oder Metall, auf dessen Katheten die Tangenten der Winkel von 0° bis 45° nach einem tausendtheiligten Maaßstabe verzeichnet sind; so daß jeder Kathete (als Tangente von 45°) 1000 Theile des Maaßstabes enthält; das weitere hievon kann man a. a. O. selbst nachlesen.

III) Man kann sich auch des Verfahrens §. 83. 1. zur Ausmessung eines Winkels auf dem Papiere bedienen. Es wird nemlich das

dor-

dortige Verfahren nur auf Kreisbogen angewandt, die dem auszumessenden Winkel zugehören. Gesetzt also, es sey Fig. LXXXII. der Winkel cgl auszumessen; um nun dieses nach der §. 83. 1. gegebenen Methode zu leisten, beschreibe man mit einem willkührlichen Halbmesser einen Halbkreis $cl\lambda$, so ist der Bogen $cl\lambda$ ein bekannter Bogen $= 180^\circ$. Weiß man nun das Verhältniß der beyden Bogen lc, $cl\lambda$, so hat man auch die Größe des Bogens lc, folglich des zugehörigen Winkels lgc. Man trage also nach §. 83. den Bogen lc auf den Halbkreis $cl\lambda$ so oft es angehet; Ich will setzen $lc = a$ passe auf $cl\lambda = 180^\circ$, m mahl, und es bleibe noch ein Stückgen $= \alpha$ übrig, so hat man die erste Gleichung.

$$\text{I)}\ ma + \alpha = 180^\circ.$$

Ferner trage man das übergebliebene Stückgen α auf den Bogen a so oft es angehet. Z. E. n mahl, und es bleibe das Stückgen β übrig, so ist

$$\text{II)}\ n.\alpha + \beta = a;$$

passete eben so das übergebliebene Stückgen β auf α, r mahl, und es bliebe nun das Stückgen γ übrig, so ist

$$\text{III)}\ r.\beta + \gamma = \alpha.$$

Auf

Auf diese Art setze man die Arbeit so lange fort, bis man endlich auf einen so kleinen Bogen kommt, der sich mit dem nächstvorhergehenden bequem nach dem Augenmaaße vergleichen läßt. Ich will setzen, γ sey dieser kleine Bogen, der sich mit dem nächstvorhergehenden bequem nach dem Augenmaaße vergleichen ließe; Es sey also endlich

$$\text{IV)}\ \gamma = \frac{\varphi}{\psi} \cdot \beta,$$

so kann man aus den gefundenen Vergleichungen, es mögen ihrer so viele seyn, wie man will, die Größe des Bogens $lc = a$ berechnen. Hier würde nun z. E. (aus der Gleichung IV. den Werth von γ in die III gesetzt,) sich erstlich ergeben,

$$r . \beta + \frac{\varphi}{\psi} \beta = \alpha$$

also $\beta = \dfrac{\alpha\psi}{r\psi + \varphi}$; dieß in II gesetzt gäbe

$$n\alpha + \frac{\psi}{r\psi + \varphi} \alpha = a, \text{ also}$$

$$\alpha = \frac{r\psi + \varphi}{(r\psi + \varphi) n + \psi} . a,$$

und dies endlich in I gesetzt gäbe

$$m . a + \frac{(r\psi + \varphi) a}{(r\psi + \varphi) n + \psi} = 180^\circ \text{ Mithin}$$

$$\frac{(r\psi + \varphi) n + \psi}{((r\psi + \varphi) n + \psi) m + r\psi + \varphi} . 180^\circ$$

$= a = cl.$

Ex.

Ex. Für $m = 2$, $n = 1$; $r = 1$, $\varphi = 2$, $\psi = 3$; würde der Bogen lc oder

$a = \frac{8}{21} \cdot 180° = 68° \cdot 34'$, also so groß auch der Winkel lgc.

IV) Der Gebrauch des gewöhnlichen Transporteurs zum Austragen der Winkel in der praktischen Geometrie ist sehr unsicher, und ich wollte nie rathen, sich desselben zu bedienen, wo einige Genauigkeit verlangt wird.

Ende des ersten Theils.