VI. Kapitel.

Vom Abtragen gerader Linien aufs Papier, nebst verschiedenen Methoden, sie in gegebenen Verhältnissen zu theilen.

§. 62. Wenn auf dem Felde eine gerade Linie der jedesmahligen Absicht gemäß, ausgemessen worden, so muß man sie auch mit der gehörigen Schärfe aufs Papier abtragen können.

Da wir nicht im Stande sind, auf dem Papiere, vermittelst der bekannten Werkzeuge. das Bild einer vollkommen mathematischen Linie zu entwerfen, so müssen wir uns doch bemühen, demselben, so viel sich thun läßt, nahe zu kommen. Dieses ist eine Hauptregel, die ich in der Folge immer zum voraussetze, wenn ich von Ziehung gerader Linien rede. Geschieht dieses nicht, so unterwerfen wir uns der Gefahr, auf dem Papiere, nach Verhältniß, weit beträchtlichere Fehler zu begehen, als bey der unmittelbaren Messung auf dem Felde.

2. Das heißt: Man muß auf dem Papiere die Punkte und Linien so

zart

zart und rein verzeichnen, als es nur immer, vermittelst der besten Werkzeuge geschehen kann.

3. Die Werkzeuge, gerade Linien und Punkte zu zeichnen, sind so bekannt, daß ich es für sehr überflüssig halte, hier eine umständliche Beschreibung derselben mitzutheilen. Man findet sie in den so genannten Reißzeugen oder mathematischen Bestecken. Nur muß ich von den nöthigsten Vollkommenheiten gedachter Werkzeuge kürzlich einiges beybringen.

4. Die Güte eines Handzirkels bestehet darinnen: Erstlich, daß die Spitzen desselben von gehärteten Stahl und sehr scharf sind. Zweitens, daß sich die Schenkel des Zirkels, im sogenannten Kopfe desselben, um ein stählernes Gewinde herumdrehen. Drittens, daß dieses Gewinde so beschaffen sey, daß sich zwar die Schenkel sehr sanft und gleichförmig öffnen lassen, aber doch auch aus der Lage, worin sie einmal gebracht sind, sich nicht leicht wieder verrücken. Man pflegt daher sich auch eines Schlüsselchens zu bedienen, das Gewinde mehr oder weniger anzuziehen, wenn es darum zu thun ist, die Schenkel in einem beliebigen Winkel fest zu erhalten. Viertens, wenn man die Schenkel zusammen legt, so müssen die Spitzen des Zirkels ge-

genau in einen gemeinschaftlichen sehr feinen Punkt zusammen treffen.

5. Es ist bey practischen Arbeiten vortheilhaft, verschiedene Gattungen von Handzirkeln zu besitzen. Einige davon müssen so eingerichtet seyn, daß sich der eine Fuß herausnehmen, und statt dessen ein Einsatz zum Bleystift, oder eine mit einem Gelenk versehene Reisfeder hineinfügen läßt.

6. Man braucht die Zirkel überhaupt, sowohl Figuren abzutragen und zu verzeichnen, als auch Linien einzutheilen. Zu letzterer Absicht sind die sogenannten Federzirkel sehr vortheilhaft. Die Gestalt eines solchen Federzirkels ist ohngefähr aus Fig. XXX zu ersehen.

Daselbst ist statt eines gewöhnlichen Zirkelgewindes, das Stück ABCDHG von gehärteten Stahl; nämlich der obere Theil CDE, ist ein breites in einen Bogen gekrümmtes elastisches Stück, eine Feder, an welcher auf beyden Seiten die Schenkel CA, GE heruntergehen, in die, wie gewöhnlich, die Füße des Zirkels AL, GM eingesenket werden. BF ist ein mit feinen Schraubengängen versehener Zirkelbogen, der an dem einen Schenkel CA, bey B befestiget ist, an dem andern Schenkel EG aber durch eine ihm gemäße Oefnung gehet. H ist eine Schraubenmutter. Je nachdem

man

man nun diese rechts oder links herumdreht, treibt sie die Schenkel CL, EM näher zusammen, oder weiter von einander, und die elastische Kraft des in den Bogen gespannten Stücks CDE, welche beständig die Schenkel CL, EM auseinander zu treiben strebt, trägt vieles dazu bey, daß auch durch die geringste Umdrehung der Schraubenmutter H, die Entfernung der beyden Spitzen L, M, verändert wird, und man also die Endpunkte einer abzutragenden Linie sehr genau zwischen die beyden Spitzen L, M fassen kann. Wenn man einen solchen Federzirkel besitzt, so wird derselbe zur Eintheilung gerader Linien vortrefliche Dienste leisten.

7. Man gebraucht auch die sogenannten Haarzirkel, zu dieser Absicht. Man findet die Beschreibung davon in Leupolds Theatr. Mach. Geom. §. 287. Ich halte indessen den (6) beschriebenen Federzirkel für richtiger und zuverlässiger, als den Haarzirkel, welcher sehr leicht wandelbar wird.

8. Die Güte einer Reisfeder bestehet darinn, daß ihre gegeneinander über stehenden Plättchen, oder Backen, von gleicher Länge, nicht stumpf, aber dabey auch nicht zu scharf seyn müssen. Die Backen lassen sich vermittelst eines Schräubchens einander mehr oder weniger nähern, bis sie den gehörigen Abstand haben, um eine Linie von der erforderlichen

Stärke zu ziehen. Die Erfahrung muß entscheiden, ob eine Reisfeder taugt; je eine zärtere und reinere Linie man damit ziehen kann, desto vollkommener ist sie. Man kann ihr mit einer zarten englischen Feile, und einem Oelsteine, worauf man sie schleifet, nachhelfen, bis sie die gehörige Vollkommenheit hat. Beym Gebrauche taucht man die Spitze der Reisfeder in eine mit reinem Wasser abgeriebene gute indianische Tusche, und zieht hierauf längs eines Linials gerade Linien damit auf dem Papiere her. Man muß aber allemal die Backe der Reisfeder, welche längs der Schärfe des Linials fort bewegt wird, vorher abwischen, damit keine Flecken auf das Papier kommen. Die Uebung wird hiebey die beste Lehrmeisterin seyn.

Einige Reisfedern haben die Einrichtung, daß eine von den Backen derselben um ein Charnier beweglich ist, damit die Spitzen von einander getrennt werden können, um sie auf diese Art besser zu reinigen.

9. Die Vollkommenheit eines Linials besteht darinnen, daß dessen Schärfen genau in eine gerade Linie gebracht sind. Man verfertigt sie von guten trockenen Linden-, Buxbaum- oder Ebenholze, wie auch von Messing, Elfenbein u. s. w.; die von Metall beschmutzen

das

das Papier. Am besten sind die von Ebenholze, weil sich solche nicht leicht werfen.

10. Um die Schärfe, oder diejenige schmale Seitenfläche des Linials, längst welcher nähmlich die geraden Linien hergezogen werden, vollkommen eben und gerade zu machen, habe ich folgendes Mittel für gut befunden. Ich besitze ein ziemlich langes Stück von einem zerbrochenen Spiegel: auf dieses streue ich etwas feinen Schmergel oder Uhrsand, benetze ihn mit Wasser, und schleife nun die schmale Seitenfläche des Linials auf dieser Platte ab. Man muß aber während des Schleifens immer nach einerley Richtung hin- und herfahren, und soviel als möglich, gleich stark und senkrecht aufdrücken, damit nähmlich die abzuschleifende Fläche von dem Sande an allen Stellen gleich stark angegriffen werde. — Man könnte auch, um das hiebey schädliche Wanken, oder den ungleichen Zug zu verhüten, mehrere Liniale auf einmal abschleifen. Man legt ihre breiten Seitenflächen an einander, so daß die schmalen insgesammt in eine Ebene fallen, und so auf der Platte hin- und hergeführt und abgeschliffen werden; oder man liesse sich viereckigte prismatische glatt gehobelte Stäbchen verfertigen, legte sie an die breitern Seitnflächen des Linials, und führe so zugleich auf der Platte mit ihnen her. Auf diese Art ist die abzuschleifende Fläche größer, nnd ein Ungeübter setzt sich

nicht

nicht so leicht der Gefahr aus, während des Schleifens von einer Seite auf die andere zu wanken.

Wenn nun das Schleifen der Liniale einige Zeit fortgesetzt worden, und man bemerkt, daß der Sand ziemlich fein geschliffen, auch solcher die abgeschliffenen Flächen der Liniale an allen Stellen gleich stark angegriffen hat, so trockne man die Liniale ab, reinige sie von dem anhängenden Sande, und fahre alsdann mit einem Stückchen Tuch an der abgeschliffenen Fläche so lange hin und her, bis sie durch das Reiben vollkommen trocken geworden, und einen Glanz bekommen hat.

Auf diese Art erhalte ich die schmale Seitenfläche eines Linials vollkommen eben und gerade, so daß, wenn ich dergleichen abgeschliffene Flächen zweyer Liniale auf einander lege, und sie gegen das Licht halte, sie sich vollkommen decken, und nicht den geringsten leeren Raum zwischen sich lassen.

Wer ein solches Spiegelglas nicht besitzt, der lasse sich ein paar etwa 18 Zoll lange, 4 Zoll breite, und 3 Zoll dicke Platten von Eichenholz verfertigen, und sie glatt abhobeln. Hierauf schleife man sie mit trockenen Uhrsand auf einander ab, bis sie vollkommen eben geworden, und dieser hölzernen Platten bediene

man

man sich alsdann, statt einer Spiegelplatte, um die Liniale darauf zu schleifen.

11. Die gewöhnliche Methode, sich von der Richtigkeit eines Linials zu versichern, bestehet darinnen, daß man auf dem Papiere längst des Linials, eine Linie ziehet, wie z. E. in Fig. XXXI längst des Linials MNOP die Linie rns; hierauf das Linial MNOP umkehret, so daß N nach N′, M nach M′, O nach O′ und P nach P′, zu liegen komme, und dann längst eben der Schärfe, neben der zuerst gezogenen Linie rns, wieder eine Linie rms ziehet. Wenn nun diese beyden Linien rms, rns, in eins zusammenfallen, und keine Höhlungen, wie hier z. E. bey m und n geschiehet, zwischen sich lassen, so wird die Seite oder Schärfe des Linials, bey der man diesen Versuch angestellt hat, zum Gebrauche gut seyn. Im entgegengesetzten Falle aber ist das Linial nicht zu gebrauchen, und muß also vorher (nach 10) abgeschliffen werden.

Es ist sehr gut, wenn man mit einem messingenen vollkommen geraden Liniale versehen ist, und andere darnach zu prüfen.

12. Die hölzernen rechtwinklichten Dreyecke, und Winkelhaken, so wie man sie gewöhnlich auch in Reiszeugen antrift, dienen zu Ziehung paralleler und senkrechter Linien. Die nothwendigste Erforderniß guter Winkelha-

haken oder Dreyecke, wenn man sie zu Ziehung der Perpendikulärlinien gebrauchen will, besteht darinnen, daß der rechte Winkel an diesen Werkzeugen, alle nöthige Genauigkeit habe. Es giebt unterschiedene Methoden, sich von der Richtigkeit eines Winkelhakens zu versichern.

Folgende Methode scheint mir die richtigste und bequemste zu seyn. Man lege den einen Schenkel des Winkelhakens oder des rechtwinklichten Dreyecks hbc (Fig. XXXIII) genau an die Schärfe ik eines wohlgeprüften Linials; drücke das Linial mit dem Daumen fest ans Papier, und ziehe darauf mit aller möglichen Sorgfalt genau längst des andern Schenkels hb, eine feine Linie auf das Papier. Nun lasse man das Linial in unverrückter Lage, und kehre den Winkelhaken um, so daß der Schenkel bc nach der Richtung bγ zu liegen komme. Wenn nun bey der jetzigen Lage des Winkelhakens hbγ, der Schenkel hb, wieder genau mit der vorhin auf dem Papiere gezogenen Linie hb zusammentrift, oder mit ihr parallel läuft; so ist der Winkelhaken richtig, und der Winkel, den beyde Schenkel hb, bc mit einander machen, genau ein rechter. Geschiehet dieses aber nicht, so bedarf der Winkelhaken einer Verbesserung. Es wird sich auch leicht aus dem Grunde dieses Verfahrens beurtheilen lassen, ob der Winkel hbc stumpf oder

spitzig

spitzig ist. Von andern Methoden s. m. Helfenzrieders Geodäsie. §. 193. ꝛc.

Ein anderes sehr brauchbares Verfahren ist auch: daß man auf einer ebenen Fläche, z. E. einem Reisbrette, oder noch besser auf einer ebenen Kupferplatte, nach den bekannten geometrischen Methoden, genau einen rechten Winkel verzeichnet, alsdann beyde Schärfen des Winkelhakens an die Schenkel des rechten Winkels anlegt, und prüfet, ob sie damit zusammentreffen, und wenn dieses nicht geschiehet, alsdann durch Abschaben oder Schleifen, die Schenkel des Winkelhakens verbessert, bis sie den gehörigen rechten Winkel mit einander machen.

13. Das gewöhnliche Parallel-Linial, welches aus zwey beweglichen, und mit gleich langen Gelenken verbundenen Linialen besteht, ist von sehr eingeschränkten und wandelbaren Gebrauche. Am besten und zuverlässigsten geschieht die Ziehung paralleler Linien, vermittelst eines guten Linials und Dreyecks, wie ich hernach zeigen werde.

14. Man hat einige zusammengesetztere Gattungen von Parallellinialen, bey welchen man zugleich die Absicht erreichen will, Parallellinien sogleich in beliebigen Weiten von einander zu ziehen, ohne diese Weiten erst mit einem

nem Zirkel von einem Maaßstabe abfassen zu dürfen. Man findet einige Beschreibungen und Abrisse davon in Leupolds *Theatro Mach. Geom.* §. 312. 321. 322.

15. Die meisten dieser Vorrichtungen sind unnütz und erreichen den Endzweck (14) nicht aufs bequemste und richtigste.

16. Folgende Einrichtung scheint mir zur Ausübung bequem und einfach zu seyn. S. die XXXII Fig. Daselbst sind ABC, DEF ein paar rechtwinklichte hölzerne Dreyecke von gleicher Größe und Dicke. Ihre längern Seiten BC, EF sind etwa einen Fuß, die kürzern AB, DE aber 4 bis 6 Zoll lang; dann haben diese Dreyecke, eine ansehnliche Größe, wie erfordert wird.

Die Schenkel AB, BC, DE, EF kann man mit messingenen Platten überlegen lassen, und Abtheilungen auf ihnen verzeichnen, wie die Figur ausweist.

Auf die längern Schenkel oder Seiten BC, EF kann man nach Gefallen eine gewisse Anzahl gleicher Theile absetzen: z. E. Zehntheile eines Zolles.

Damit sich aber noch kleinere Abtheilungen erhalten lassen, als unmittelbar auf BC, EF

EF verzeichnet sind, so dienet jeder kürzere Schenkel DE, AB, denen größern BC, EF zum Nonius oder Vernier. Die Art dieser Vorrichtung soll unten (§. 76.) erklärt werden, und hier erinnere ich nur noch dieses. Wenn die Seitenfläche DE, längst BC genau angelegt und fortgeschoben wird, so lassen sich längst EF Parallellinien ziehen, die entweder gleich weit, oder je nachdem auf BC von dem Nonius DE, die Abtheilungen abgeschnitten werden, in jeder beliebigen Entfernung von einander abstehen. Und eben so kann man auch längst BC Parallellinien in beliebigen Weiten von einander ziehen, wenn die lange Seite EF des Dreyecks DEF, an die kürzere AB gelegt, und alsdann das Dreyeck ABC längst EF herunter geschoben wird.

17. Durch diese Verbindung zweyer rechtwinklichten Dreyecke erreicht man also bequem die Absicht (14). Auch kann dieses Werkzeug, wie ich in der Folge zeigen werde, noch zu verschiedenen andern Arbeiten und Endzwecken nützlich seyn.

18. Auch der geschickte und scharfsinnige Mechanikus Brander in Augspurg verfertigte ehemals Parallelliniale von großer Vollkommenheit. Sie sind gleichfalls so eingerichtet, daß sich sogleich Parallellinien in beliebigen Weiten ziehen lassen. Br. erinnert aber, daß diese

Werk=

Werkzeuge mit großer Genauigkeit und Sorgfalt verfertiget werden müssen, wenn sie den erwünschten Endzweck erreichen sollten. Er erwähnet dieser Parallellineale in seiner Beschreibung eines Systems von Maaßstäben am Ende pag. 30. Ich habe aber nie ein solches Parallellinial gesehen, auch befindet sich am a. O. keine nähere Beschreibung und Abriß davon.

Von den in Engelland häufig üblichen Roll-Parallellinialen sehe man Adams oben §. 61 angeführtes Buch S. 29. Man kann sie füglich entbehren. Auch das. von einigen anderen Einrichtungen solcher Werkzeuge.

19. Da die Ziehung paralleler und senkrechter Linien in der Ausübung oft vorkömmt, so sollen folgende zwey Aufgaben kürzlich den Gebrauch der rechtwinklichten Dreyecke zu dieser Absicht erläutern.

Es giebt zwar in der theoretischen Geometrie sehr viele Methoden, bloß durch Zirkel und Linial, parallele und senkrechte Linien zu ziehen; allein, so richtig auch die reinen geometrischen Auflösungen sind, so kann man sie dennoch in der Ausübung nicht mit Vortheil da gebrauchen, wo man geschwind zu Werke gehen will.

Aufgabe.

Aufgabe.

§. 63. Auf eine vorgegebene Linie vermittelst des Dreyecks oder Winkelhakens (§. 62. 12) eine Perpendikulärlinie aufzurichten.

Aufl. Man lege den einen Schenkel des rechten Winkels an die vorgegebene Linie genau an, und ziehe längst des andern auf dem Papiere eine gerade Linie herunter, so wird diese auf der erstern senkrecht stehen.

Aufgabe.

§. 64. Mit einer gegebenen Linie ACG, Fig. XXXIII. durch einen gegebenen Punkt F, eine parallele zu ziehen.

Aufl. Man lege die Hypothenuse HC des Dreyecks HBC genau an die Linie AG an.

Dann nehme man ein Linial ik, lege dessen Schärfe an den Katheten BC an, drücke es fest ans Papier, damit es sich nicht verrücke, und schiebe nun das Dreyeck HBC an dem Liniale fort, daß solches in die Lage hbc komme, wo die Hypothenuse hc durch den gegebenen Punkt F gehet. Hierauf ziehe man längst hc eine Linie, so wird diese mit AG gleichlaufend seyn. Denn es ist der Winkel HCB = hcb.

Es geschiehet oft, daß das Linial nicht lang genug ist, und man also das Dreyeck nicht ganz bis an den Punkt hinschieben kann, wie wenn durch O eine Parallele gezogen werden sollte.

In diesem Falle schiebe man erstlich das Dreyeck so weit fort, als es angeht. Z. E. bis in die Lage h b c. Hierauf drücke man das Dreyeck ans Papier, und schiebe das Linial längst des Katheten b c weiter herauf. So erhellet, daß man alsdann im Stande seyn wird, längst des Linials das Dreyeck weiter fortzuschieben, bis an den Punkt O.

Es kann sich zutragen, daß das Dreyeck nicht ausreicht, wie wenn man durch L die parallele ziehen wollte. In diesem Falle, wenn das Dreyeck bis in die Lage h b c fortgeschoben worden, nehme man das Linial ik, lege es an den andern Katheten h b, und schiebe alsdann das Dreyeck längst des Linials fort, so wird man bis an den Punkt L hinkommen können. So lassen sich die Aufgaben, Parallellinien zu ziehen, bequem, vermittelst eines Dreyecks und Linials, oder auch zweyer Dreyecke, wo das eine als Linial dienet, auflösen.

Des ehemaligen hiesigen Oberbaukommiss. Müllers Dissertatio de recta Normae applicatione. Goett. 1752. zeigt, wie man sich der

Drey-

Dreyecke noch zu vielen andern Absichten sehr vortheilhaft bey geodätischen Zeichnungen bedienen könne.

Aufgabe.

§. 65. Einen verjüngten Maaßstab zu verfertigen, vermittelst dessen man, die auf dem Felde gemessenen Linien ins kleine aufs Papier tragen, und überhaupt Linien in gegebenen Verhältnissen theilen kann.

Aufl. I) Ehe ich die Zeichnung dieses Maaßstabes erkläre, erinnere man sich aus der Geometrie folgenden Satz. Wenn Fig. XXXIV mon ein Dreyeck ist, dessen Seitenlinie on in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt worden, und man ziehet durch die Theilpunkte die Linien a1, b2, c3 u. s. w. mit mn gleichlaufend, so ist

$$oa : on = a1 : mn$$
$$ob : on = b2 : mn$$

II) Wäre daher z. E. on in 10 gleiche Theile getheilt, und z. E. mn = 1 Fuß, so würde

$$oa : on = 1 : 10 = a1 : mn$$ alſo
$$a1 = \frac{1}{10} mn = \frac{1}{10}$$ Fuß = 1 Zoll
$$ob : on = 2 : 10 = b2 : mn$$ alſo
$$b2 = \frac{2}{10} mn = \frac{2}{10}$$ Fuß = 2 Zoll.
und eben ſo
$$c3 = \frac{3}{10} mn = \frac{3}{10}$$ F. = 3 Zoll u. ſ. w.

Und ſo erhielte man ſehr bequem, Theile der vorgegebenen Länge mn.

III) Nun ſey (Fig. XXXV. A) a II eine gerade Linie auf dem Papiere. Man ſetze auf ſie eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile a O = OI = I. II u. ſ. w. und laſſe einen ſolchen Theil auf dem Papiere eine Ruthe bedeuten.

IV) Man theile die äusserſte Ruthe aO in 10 gleiche Theile, welches man durch Verſuche bewerkſtelligen kann, ſo iſt $Ob = \frac{1}{10}$ Ruth. = 1 Fuß, $Oc = \frac{2}{10}$ R. = 2 Fuß u. ſ. w.

V) Da nun meiſtens auf dem Papiere die Theile auf aO ſchon ſehr klein ausfallen, ſo würde es Schwierigkeit haben, dieſe Theile wieder unmittelbar noch weiter in Zolle einzutheilen; man bedienet ſich daher des Satzes (I) mit Vortheil auf folgende Art.

VI) Durch a errichte man auf a II eine Perpendiculärlinie aα (§. 63) ſetze auf ſie 10 willkührliche gleiche Theile von a nach 1, von 1 nach

nach 2 u. s. w. Ziehe durch 1, 2, 3, u. s. w. wie die Figur ausweiset, parallelen mit der Grundlinie a II (§. 64) und durch O, I, II, u. s. w. auch mit a α Parallelen.

VII) Von α nach dem nächsten Theilpunkte bey a, nähmlich nach k, ziehe man eine schiefe Linie αk herunter, und mit αk durch die übrigen Theilpunkte auf aO, die Parallelen βi; γh u. s. w. unter welchen Om die letzte ist.

VIII) So erhält man am Ende ein schmales Dreyeck Omn, wie in Fig. XXXIV, in welchem mn = $\frac{1}{10}$ αn = $\frac{1}{10}$ aO = 1 Fuß ist. Weil nun On vermittelst der mit a II parallel gezogenen Linien in 10 gleiche Theile getheilet wird, so ergeben sich in dem schmalen Dreyecke Omn, von mn nach O herunter, solche Transversalstückchen, wie in Fig. XXXIV, die also Zehntheilchen der Linie mn oder eines Fußes, mithin Zolle vorstellen werden. (II)

IX) So hat man also auf dem Papiere einen Maaßstab A, der auf eben die Art, Ruthen, Fuße und Zolle im kleinen enthält, wie das Maaß, dessen man sich auf dem Felde bedient, dergleichen im großen hat.

X) Es erhellet, wenn OI, I. II. u. s. w. Fuße vorstellen, so bedeuten die Theile auf aO Zolle, und die Querstückchen in dem Dreyecke Omn, Linien.

XI)

XI) Hätte man von O gegen die rechte Hand zu, 10 Ruthen oder Theile abgesetzt, so bekäme man eine Länge, von der sind die Theile Ol, u. s. w. Zehntheilchen, die Stücken auf aO Hunderttheilchen, und die Querstückchen in dem Dreyecke Omn, Tausendtheilchen: So zeigt also dieses Verfahren überhaupt, eine Linie in 1000 Theile zu theilen, und ein solchergestalt eingerichteter Maaßstab heißt ein tausendtheiligter Maaßstab, dessen Gebrauch von häufiger Anwendung ist.

XII) Wollte man einen Maaßstab für die 12theiligte Eintheilung verfertigen, so darf man nur überall, wo bisher 10 Theile hingesetzt worden, zwölf dergleichen hinsetzen.

XIII) Bey B, C, D finden sich noch einige andere Gattungen von verjüngten Maaßstäben, die aus der Zeichnung hinlänglich zu verstehen seyn werden. Bey B, sind aO, OI, I. II. Ruthen, und die Querstückchen in dem Dreyecke PMO, nach der Ordnung von O nach PM heraufgerechnet, die einzeln Fuße. Bey C ist oben Bm bey 5 halbirt, und es sind a5, O5 gezogen; also ist $m5 = \frac{1}{2} mB = \frac{1}{2} aO = \frac{1}{2}$ Ruthe = 5 Fuß, und folglich weil auf aB, 5 gleiche Theile abgesetzt worden,

$$d1 = \tfrac{1}{5}\, m5 = \tfrac{1}{5} \cdot 5 \text{ Fuß} = 1 \text{ Fuß}$$
$$c2 = \tfrac{2}{5}\, m5 = \tfrac{2}{5} \cdot 5 \text{ Fuß} = 2 \text{ Fuß}$$

Eben

Eben so ist auch $\alpha 6 = a 4 = 4$ Fuß. Mithin $a 6 = a\alpha - \alpha 6 = 10$ Fuß $- 4$ Fuß $= 6$ Fuß. Und eben so wegen $\beta 7 = 3$ Fuß; $\gamma 8 = 2$ Fuß; $\delta 9 = 1$ Fuß, wird nach der Ordnung $b 7 = 7$ Fuß; $c 8 = 8$ Fuß; $d 9 = 9$ Fuß. Diese Einrichtung des Maaßstabes C ist sehr bequem.

Anmerkung.

§. 66. 1. Wenn man die bisher beschriebenen Maaßstäbe auf dem Papiere verfertigt, so muß man Sorge tragen, die Theilpunkte mit den Zirkelspitzen, so zart als möglich, anzugeben; auch muß man, wenn mit dem Zirkel die Maaße abgenommen werden, niemals die Spitzen desselben tief ins Papier einstechen, weil sonst der Maaßstab gar bald unbrauchbar und unrichtig würde.

2. Aus dieser Ursache bedient man sich auch wohl solcher Maaßstäbe, die auf Elfenbein, Birnbaumholz oder Messing verzeichnet sind. Man findet sie ebenfslls in den mathematischen Bestecken.

3. Man kann auch mit leichter Mühe, auf einer wohlpolirten messingenen oder kupfernen Platte, dergleichen Maaßstäbe von verschiedener Größe, selbst einreissen, und solche zum Gebrauche verwahren. Man darf sich nur ein wenig in dergleichen Arbeit üben, so wird man es

es gar bald darin zu einer Fertigkeit bringen. Um die Linien ins Metall einzureissen, bediene ich mich eines guten englischen Federmessers, dessen Spitze von Stahl, und scharf abgeschliffen ist, oder auch eines sehr geschärften konischen stählernen Punzens. Nachdem die Linien eingerissen sind, schleift und polirt man das Rauhe von der Platte, vermittelst sehr feinen Schmergels oder Trippels ab, und überziehet sie mit einer Druckerschwärze, nach deren Wegwischung alsdann sehr zarte Linien auf der Platte stehen bleiben.

4. In Marinoni's Werke *de re ichnographica* (*Viennae* 1751) pag. 46 findet sich ein sehr bequemes und einfaches Werkzeug, Linien in sehr nahen Entfernungen, mit einander parallel, und sehr zart, ins Metall einzuschneiden.

Auch in Helfenzrieders Geodäsie (Ingolstadt und Augspurg 1775) p. 81 ist ein zu dieser Absicht angegebenes Instrument.

Ferner gehört hieher das Werkzeug, dessen sich der berühmte englische Künstler Ramsden bedient, gerade Linien einzutheilen. Es findet sich in einem Anhange zu einer Schrift, welche ich unten (§. 89) anführe. Das Werkzeug ist aber sehr zusammengesetzt, und die Genauigkeit desselben hängt mit von einer Schraube ohne Ende ab, welche längst der Schärfe eines Linials in Gänge eingreift,

wodurch

wodurch das Linial sanft in Nuthen hin und her geschoben, und um einen beliebigen Abstand fortbewegt werden kann. Dieses Werkzeug würde demnach ebenfalls zur Eintheilung und Verfertigung verjüngter Maaßstäbe dienen, zumahl wenn eine sehr große Genauigkeit erforderlich wäre.

5. Man hält den Tycho de Brahe für den Erfinder des verjüngten Maaßstabes, eigentlich ist es aber wohl Joh. Hommel, ehemaliger Prof. der Mathematik zu Leipzig, aus dessen Unterrichte Tycho de Brahe ums Jahr 1553 zuerst diese Abtheilung gerader Linien gelernt hat.

Aufgabe.

§. 67. Den Gebrauch des verjüngten Maaßstabes zu erklären.

Aufl. I) Gesetzt man wolle von dem verjüngten Maaßstabe **A** (Fig. XXXV.) eine Länge z. B. von 2° 8′ 6″ mit dem Zirkel fassen, und aufs Papier tragen.

Um dieses zu leisten, so zähle man von O nach II, erstlich 2° ab: hierauf setze man die eine Zirkelspitze in den Punkt y, nähmlich in den Durchschnittspunkt des Perpendikels II. M, mit derjenigen Parallellinie y6, welche

auf

auf $a\alpha$, durch den Theilpunkt 6 gehet, so findet sich auf dieser Parallele in dem Dreyecke mnO das Querstückchen $l\eta = 6''$. Nun lasse man die Zirkelspitze in y unverrückt, und öffne den Zirkel so weit, bis dessen andere Spitze, auf der vorerwähnten Parallele bis an den Durchschnitt t hinreicht; dieser Punkt t ist nähmlich der Durchschnitt der obgedachten Parallele 6y, mit der schiefen Linie βi, die auf aO, die Weite Oi = 8 Fuß abschneidet.

So wird die Weite $ty = 2° \; 8' \; 6''$ seyn. Denn es ist $ty = y\eta + \eta l + lt = \text{O II} + l\eta + \text{O}i = 2° + 6'' + 8'$, oder $2° \; 8' \; 6''$.

Diese abgefaßte Weite zwischen beyden Zirkelspitzen, kann man nun aufs Papier tragen.

II) Umgekehrt, wäre auf dem Papiere eine Linie vorgegeben, deren Größe man nach dem verjüngten Maaßstabe bestimmen wollte, so fasse man solche mit dem Zirkel, behalte den Zirkel in unveränderter Oeffnung, und suche nun ein solches Perpendikel z. E. II. M auf, daß, wenn die eine Zirkelspitze in einen gewissen Theilpunkt, z. E. in y eingesetzt wird, die andere Spitze innerhalb des Raumes $a\alpha$On in einen Durchschnittspunkt, wie t, hinfalle, der mit y in einer geraden Linie ty liegt, die mit der Grundlinie a II parallel geht. Alsdann

kann

kann man die Weite ty auf dem verjüngten Maaßstabe in Ruthen, Fußen und Zollen bestimmen.

Zusatz.

§. 68. Wäre der Maaßstab A ein tausendtheiligter (§. 65. XI.), so würden die 2° 8′ 6″ (§. 67. I.) auch so viel bedeuten, als 286 Tausendtheilchen derjenigen Länge, die von O gegen die rechte Hand zu abgesetzt, und = 10. OI oder 10° genommen worden ist.

Aufgabe.

§. 69. Vermittelst des verjüngten Maaßstabes, Linien von gegebenen Verhältnissen aufs Papier abzutragen, oder sie auch in gegebenen Verhältnissen zu theilen.

Aufl. I) Diese Aufgaben kommen in der Ausübung häufig vor, und aus dieser Ursache muß ich ihrer hier erwähnen.

Gesetzt, man solle ein paar Linien aufs Papier hintragen, die sich wie 512 : 618 verhielten. Um dieses zu leisten, nimmt man von dem tausendtheilichten Maaßstabe 512 Theile, oder nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche 5° 1′ 2″ ab, und setzt sie aufs Papier; eben

so

so fasset man die Weite $6^\circ\ 1'\ 8''$ und setzt sie ab, so hat man auf dem Papiere ein paar Linien, die sich wie 512 : 618 verhalten.

II) Wäre das Verhältniß der abzutragenden Linien durch so große Zahlen gegeben, (z. E. wenn das Verhältniß wie 5102 : 6733 wäre) daß man solche von dem tausendtheilichten Maaßstabe nicht bequem abtragen könnte, so muß man entweder versuchen, nach den gewöhnlichen Regeln, das vorgegebene Verhältniß durch kleinere Zahlen auszudrücken, oder wenn dieses nicht angehet, beyde Glieder des Verhältnisses mit einer dritten Zahl gemeinschaftlich dividiren, damit man wenigstens ein paar andere ganze Zahlen bekomme, die beynahe das vorgegebene Verhältniß unter sich haben, und sich von dem Maaßstabe abtragen lassen.

Z. E. Man dividire beyde Glieder des Verhältnisses 5102 : 6733 mit 10, so ist das vorgegebene Verhältniß wie 510, 2 : 673, 3 also beynahe wie 510 : 673, welches letztere man also von dem Maaßstabe abtragen kann.

Es erhellet nähmlich, daß man ein vorgegebenes Verhältniß, von einem tausendtheilichten Maaßstabe auch nur höchstens bis auf tausendtheilchen genau abtragen kann, vorausgesetzt, daß der Maaßstab die gehörige Vollkommenheit

heit habe, und man alle nöthige Vorsichten im Einsetzen der Zirkelspitzen beobachte.

III) Soll eine Linie AD (Fig. XXXVI.) in so viel Theile, als man will, getheilt werden, die gegebene Verhältnisse, z. E. wie 13 : 14 : 20 unter einander haben, so trägt man auf eine durch A nach Gefallen gezogene gerade Linie Dd, von A nach b, 13 Theile, von A nach c, 13 + 14 oder 27 Theile, von A nach d, 13 + 14 + 20 oder 47 Theile, von dem Maaßstabe ab; ziehet durch D, d, eine gerade Linie, und mit ihr durch c, b, die Parallelen Cc, Bb, (§. 64.) so werden die Stücke AC, BC, CD sich verhalten, wie Ab : bc : cd oder wie 13 : 14 : 20.

IV) Wer die Ziehung paralleler Linien vermeiden will, kann auch AD bloß durch Rechnung, oder arithmetisch theilen. Man fasse die Weite AD mit dem Zirkel und trage sie auf den Maaßstab. Gesetzt man fände $AD = 5^{\circ}\ 0'\ 4''$ oder 504 Theile. Diese Zahl theile man in drey Theile, die sich verhalten wie 13 : 14 : 20. Dieß geschieht nach der gewöhnlichen Regel auf folgende Art:

Man addire die vorgegebenen Verhältnißzahlen 13, 14, 20 zusammen, suche zu ihrer Summe 47, zur Zahl 504 und zu jeder einzeln Zahl 13, 14, 20, nach der Ordnung die 4te Proportionalzahl;

$$47 : 504 = 13 : 139\tfrac{10}{47}$$
$$47 : 504 = 14 : 150\tfrac{6}{47}$$
$$47 : 504 = 20 : 214\tfrac{22}{47}$$

so ist $139\frac{10}{47} + 150\frac{6}{47} + 214\frac{22}{47} = 504$, und die drey Stücke, in welche 504 zerlegt worden, verhalten sich wie 13 : 14 : 20.

Man trage also auf AD von A nach B $139\frac{10}{47}$ Theilchen des verjüngten Maaßstabes; weil sich aber die $\frac{10}{47}$ nicht gut abnehmen lassen, so setzt man blos von A nach B 139 Theile, oder $1^\circ 3' 9''$ und von B nach C 150 Theile, oder $1^\circ 5' 0''$ so wird AD so genau in dem Verhältniß 13 : 14 : 20 getheilet seyn, als man es in der Ausübung verlangen kann.

V) Ich wollte rathen, allemahl lieber nach (III) die Linie AD einzutheilen, weil man da nicht nöthig hat, solche kleine Brüche, wie in (IV) wegzulassen.

Indessen würde dabey noch folgendes zu erinnern seyn:

1) Es ist nicht nothwendig, daß man von dem verjüngten Maaßstabe gerade die Zahlen 13, 14, 20 (III) selbst annimmt; man könnte auch andere Zahlen oder Theile abnehmen, die sich nur verhalten müssen, wie die 13, 14, 20. Z. E. man könnte jede von den Zahlen 13, 14, 20 mit einer gewissen dritten Zahl erst multiplici-

ren,

ren, z. E. mit 10, von dem Maaßstabe alsdann von A nach b, 130 Theile, von A nach c, 140 Theile, und von A nach d, 200 Theile absetzen, und hierauf mit Dd die Parallelen ziehen.

Dieß dient dazu, daß, wenn die gegebenen Zahlen gar zu klein sind, und sich folglich nicht bequem mit dem Zirkel auf dem Maaßstabe fassen lassen, man statt ihrer, größere Zahlen bekömmt, die in eben dem Verhältnisse stehen, sich aber bequemer abtragen lassen, und eine genauere Ziehung der Parallellinien verstatten.

2. Muß man den Winkel DAd nicht gar zu klein annehmen, weil sich sonst bey A die Linien AD, Ad, zu sehr an einander fortschleifen, und daher Unrichtigkeiten zu besorgen sind.

VI) Sollte eine Linie, wie AG (Fig. XXXVII.) in lauter gleiche Theile, z. B. in 6 eingetheilt werden, so fasse man ihre Weite AG, und trage sie auf den Maaßstab. Gesetzt, man fände für sie 864 Theile. Hievon ist der 6te Theil = 144 Th. Man nehme also von dem Maaßstabe 144 Theile, oder 1° 4′ 4″, und trage sie nach der Ordnung von A bis B, von B bis C u. s. w. so wird AG in 6 gleiche Stücke getheilt seyn.

VII)

VII) Hätte man die 144 Theile nicht sehr genau von dem Maaßstabe abgenommen, und man trüge sie nach der Ordnung von A nach B, von B nach C u. s. w. mit beständiger Umwendung des Zirkels, so würde bey jeder Umwendung desselben, oder bey jedem Theile AB, BC u. s. w. ein kleiner Fehler begangen, alle diese Fehler würden sich häufen, und am Ende eine große Unrichtigkeit verursachen, so daß sich der letzte Theil selten bey G endigen würde, wo die ganze Linie zu Ende ist. Um also dies zu verhüten, verfährt man richtiger auf folgende Art: Man trägt von A bis B erst 144 Theile, dann von A bis C, 2. 144 oder 288 Theile, von A bis D, 3. 144 oder 432 Theile u. s. w. so kommen endlich von A bis G, 6. 144, oder 864 Theile, und indem solchergestalt, immer aus einem Punkt A aufgetragen wird, so können sich die Fehler nicht häufen, und die Linie AG wird auf diese Art weit richtiger getheilt werden. Eben dieses ist die Ursache, warum in (III) die Theile 13, 14, 20 nicht nach der Ordnung von A bis b, von b bis c, von c bis d aufgetragen, sondern von A bis b erst 13, dann von A bis c, 27, und endlich von A bis d, 47 Theile abgesetzt wurden.

VIII) Die Methode (VII) eine Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, ist in der Ausübung weit bequemer, als die gewöhnliche Euclidische Methode, die in der Ele-

Elementargeometrie vorkömmt (*). Auch ist sie nicht leicht den Fehlern unterworfen, die bey Ausübung der Euclidischen Methode vorfallen können, wenn man die dabey erforderlichen Parallellinien nicht sehr genau zieht. Indessen ist aber auch die letztere oft von großen Nutzen, wenn man z. E. keinen verjüngten Maasstab bey der Hand hat, oder auch eine Linie nicht in sehr viele Theile eintheilen soll.

IX) Die practischen Feldmesser theilen besonders kleine Linien, auch oft nur blos durchs Augenmaaß oder durch Versuche. Dieses geht besonders dann desto bequemer von statten, wenn die Anzahl der Theile sich in Factoren zerfällen läßt. Soll z. B. eine Linie in 15 gleiche Theile getheilt werden, so theilt man sie erst in 3, und dann jedes Drittel in 5 Theile.

Um hierbey nicht nöthig zu haben, diese kleinen Theile selbst zwischen die Zirkelspitzen zu fassen, und der Ordnung nach abzusetzen, so kann man noch besser auch so verfahren.

Gesetzt man solle AB (Fig. LXXXV. Tab. VII.) in $15 = 3 . 5$ Theile abtheilen, so theile man durch Versuche AB in e und k erstlich in 3 gleiche Theile $Bk = ke = eA$. Hierauf nicht

(*) S. Kästners Anf. d. Geom. u. Arith. Gött. 1774. das. Geom. 29. Satz.

nicht einen solchen Theil wie vorhin in 5 kleinere, sondern vielmehr die ganze Länge AB in 5 gleiche Theile Bm = mi = if = fc = cA. Mit dieser Oefnung des Zirkels lassen sich nun aus den bereits bestimmten Punkten k uud e, wieder die erhaltenen Fünftel von AB aus k in n, aus k in g, dann aus e in h und aus e in b, hierauf ferner aus h in l, und aus g in d, aus d in a und endlich aus l in o abtragen, so hat man alle einzelnen 15 Theilpunkte von AB, ohne kleinere Theile zwischen den Zirkelspitzen gehabt zu haben, als die Drittel und Fünftel von AB.

Man sieht leicht wie eben diese Methode auf andere Zahlen, die sich in Factoren zerfällen lassen, angewandt werden kann.

Der Vortheil dieser Eintheilungsmethode ist, daß man erstlich der Unbequemlichkeit ausweicht die einzeln kleinen Theile Bo, on, om ꝛc. selbst zwischen die Zirkelspitzen zu fassen, und durch Versuche zu bestimmen, und dann zweitens die Fehler vermeidet, welche durch das unmittelbare Absetzen so kleiner Theile selbst, begangen werden können.

Bey Eintheilung der Kreisbogen z. B. §. 89. X. kann dieselbe Methode mit Vortheil angewandt werden.

X) Wenn

X) Wenn man vermittelst des tausendtheilichten Maaßstabes ein paar Linien aufs Papier absetzen wollte, deren Verhältniß irrational wäre, z. E. wie $\sqrt{7} : \sqrt{5}$, so muß man das vorgegebene Verhältniß erstlich beynahe durch ein rationales ausdrücken. Dieß geschieht, wenn man die Wurzeln würklich auszieht, und dann das Verhältniß der herauskommenden Werthe in ganzen Zahlen, von dem Maaßstabe abträgt.

Z. E. $\sqrt{7} = 2,64$ beynahe
$\sqrt{5} = 2,23$ beynahe

also beynahe $\sqrt{7} : \sqrt{5} = 2,64 : 2,23 = 264 : 223$.

Man nimmt also nur das Verhältniß der ganzen Zahlen 264 : 223 von dem Maaßstabe ab, so wird man ein paar Linien erhalten, die beynahe das irrationale Verhältniß $\sqrt{7} : \sqrt{5}$ unter einander haben.

XI) Wegen der Ausziehung der Wurzeln, die man vorher bewerkstelligen muß, ist dieses Verfahren etwas unbequem. Lassen sich aber die Zahlen unter dem Wurzelzeichen in Factoren zerfällen, so läßt sich die Aufgabe bequemer durch folgende geometrische Methode auflösen.

Gesetzt: das Irrationalverhältniß sey folgendes:

$\sqrt{68575} : \sqrt{14124}$

Hier ist nun,

$68575 = 325 \cdot 211$

$14124 = 428 \cdot 33.$

 Man

Man trage also (Fig. XXXVIII) auf eine gerade Linie von A bis C, 325 Theile des tausendtheilichten Maaßstabes, von A bis B, 325 + 211 oder 536 Theile, so wird CB = 211 Theilen. Man halbire AB in P, und beschreibe über AB einen Halbkreis ADB; durch C errichte man ein Perpendikel CD, so ist CD = $\sqrt{68575}$.

Bew. Denn CD ist die mittlere Proportionallinie zwischen AC und CB, folglich

$$
\begin{aligned}
AC : CD &= CD : CB \text{ oder} \\
325 : CD &= CD : 211 \text{ mithin} \\
325 \cdot 211 &= CD^2 \text{ also} \\
CD &= \sqrt{325 \cdot 211} = \sqrt{68575}.
\end{aligned}
$$

Völlig auf eben die Art findet man $\sqrt{14124}$, wenn man Ac = 428, Ab = 428 + 33 = 461 Theilen nimmt, über Ab einen Halbkreis Adb beschreibt, und durch c das Perpendikel cd setzt: dann wird wie vorhin cd = $\sqrt{14124}$; So sind also die Perpendikel CD, cd, die Linien, die das Irrationalverhältniß $\sqrt{68575} : \sqrt{14124}$ unter einander haben.

XII) Um dergleichen Zahlen unter dem Wurzelzeichen in ihre Factores zu zerfällen, kann man sich mit Vortheil solcher Tafeln bedienen, aus denen man sogleich, ohne weitere Rechnung, die Factores herausnehmen kann. Eine solche Tafel, nebst ihrem Gebrauche, findet man in Lamberts Beyträgen zur Ma-

the-

thematik II. Th. S. 52 bis auf die Zahl 10200, in Poetii Anleitung zur arithmetischen Wissenschaft, bis auf 10000, und in den logarithmischen, trigonometrischen und andern zum Gebrauche der Mathematik eingerichteten Tafeln von Georg Vega (Wien 1797) bis auf die Zahl 10500.

XIII) Endlich, wenn die Linien, die von dem verjüngten Maaßstabe, in den bisherigen Aufgaben abgetragen, oder auf ihm gemessen werden sollen, größer sind, als der Maaßstab, so muß man sie in Theile zerlegen, und die Größe eines jeden einzeln Theiles abtragen.

Aufgabe.

§. 70. Die krumme Linie auf dem Felde (Fig XXII) für die man in (§. 55. 20) die Abmessungen hat, aufs Papier zu tragen, und daselbst eine zu verzeichnen, die ihr, so viel als möglich, ähnlich sey.

Aufl. I) Man zieht auf dem Papiere willkührlich eine gerade Linie; auf diese trage man nach dem verjüngten Maaßstabe, die in §. 55. 20 gefundenen Maaße für die Abscissen.

II) Diese Maaßen werden aber alle von einem Punkte angerechnet, welcher auf dem

Pa=

Papiere eben so, wie auf dem Felde, der Anfangspunkt der Abscissen ist.

III) Hat man nun solchergestalt, nach der Ordnung, aus dem Manuale alle Abscissen aufgetragen, so richtet man durch alle Endpunkte der Abscissen, Perpendiculärlinien auf. §. 63.

IV) Auf diese setzt man die jeder Abscisse zugehörige Ordinate und je nachdem die Zeichen + — angegeben sind, werden die Maaße der Ordinaten rechter oder linker Hand der Abscissenlinie, auf die Perpendikel getragen.

V) Ist man hiemit fertig, so zieht man durch die Endpunkte der aufgetragenen Ordinaten, aus freyer Hand eine zusammenhängende krumme Linie. Diese wird nun der auf dem Felde beynahe ähnlich seyn; besonders wenn man auch zu gleicher Zeit während der Verzeichnung darauf siehet, wo nach Angabe des Manuals, die krumme Linie hohl oder erhaben gegen die Abscissenlinie ist. Aus §. 54. [12]. und §. 55. [19].

Anmerkung.

§. 71. Die Abscissenlinie und Ordinaten kann man erst mit Bleystift, die krumme Linie selbst aber mit einer fein geschnittenen, in Tusche eingesenkten Rabenfeder ausziehen, und alsdann, die mit dem Bleystift gezogenen Linien,

mit

mit weissem Brod oder elastischem Harz wieder wegreiben.

Branders System von Maaßstäben.

§. 72. 1. Die schickliche Größe eines verjüngten Maaßstabes zu irgend einem Entwurfe oder Grundrisse in der practischen Geometrie, richtet sich überhaupt nach diesen oder jenen Absichten, die man durch den Grundriß der Figur erreichen will; Sollen auch sehr kleine Theile einer Figur noch unterschieden werden können, so muß man einen Maaßstab annehmen, der eine zu diesem Zweck erforderliche Größe hat.

Ist ferner der Raum oder die Größe des Papiers gegeben, worauf man eine Figur, aus ihren Messungen auf dem Felde entwerfen will, und soll solche, so viel als möglich, den Raum des Papiers einnehmen, so hat es oft Schwierigkeit, die eigentlich hierzu erforderliche Größe der Theile auf dem verjüngten Maaßstabe zu bestimmen. Denn nähme man den Maaßstab, oder die Theile auf ihm, zu groß an, so würde die abzutragende Figur, vielleicht gar nicht auf die vorgegebene Größe des Papiers passen. Nähme man sie zu klein an, so würden Theile der Figur undeutlich ausfallen, die man doch noch gern unterscheiden will.

2. Um nun mit der Bestimmung der in jedem Falle erforderlichen Größe des Maaßstabes keine Zeit zu verderben, so werden in der Branderischen (nunmehr Höschelischen) Officin in Augspurg, besonders hierzu eingerichtete Systeme von Maaßstäben verfertiget, unter welchen man sogleich denjenigen auswählen kann, der zu einer gewissen Absicht am schicklichsten ist.

3. Bey der Einrichtung eines solchen Systems hat Brander folgendes zum Grunde gelegt:

Erstlich sollen die Maaßstäbe, oder vielmehr ähnliche Theile auf ihnen, in einer geometrischen Progression fortgehen, aber so, daß ein Theil, z. E. eine Ruthe auf dem eilften Maaßstabe, nur erst ohngefähr 10 mahl größer werde, als ein ähnlicher Theil auf dem ersten Maaßstabe. — Also muß der 11te Maaßstab 10 mahl so groß seyn, als der erste.

Zweytens, werden alle diese Maaßstäbe auf eine ähnliche Art eingetheilt, damit die Theile auf ihnen stuffenweise immer grösser werden, doch so, daß

Drittens, ähnliche Theile auf zwey nächst aufeinander folgenden Maaßstäben nicht zu sehr verschieden ausfallen.

4. Es

4. Es sey also die Länge des ersten Maaßstabes $= a$, des eilften $= l$: So werden zwischen a und l, 9 mittlere geometrische Proportionallinien b, c, d, e, f, g, h, i, k, gesucht, auf die nachher die Abtheilungen verzeichnet werden. Dieses geschiehet so:

5. Weil a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l in einer geometrischen Progression stehen sollen, so ist das Verhältniß $l:a$ zehnmahl so groß, als das Verhältniß $b:a$, mithin nach den Regeln der Zusammensetzung der Verhältnisse. (Kästn. Arith. VI Kap. 4. Zus.)

$$l : a = b^{10} : a^{10}$$

daher $b^{10} = \frac{a^{10} \cdot l}{a} = a^9 \cdot l$

Nun soll aber $l = 10 \cdot a$ seyn (3) also wird $b^{10} = 10 \cdot a^{10}$. Mithin $b = a \cdot \sqrt[10]{10}$, und $\log b = \log a + \frac{1}{10} \log 10 = \log a + 0{,}1000000$

6. Ferner ist $a:b = b:c$; $b:c = c:d$ u. s. w. folglich $c = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 \sqrt[10]{100}}{a} = a \sqrt[10]{100}$; daher $\log c = \log a + \frac{1}{10} \log 100 = \log a + 0{,}2000000$;

$d = \frac{c^2}{b} = a \sqrt[10]{1000}$ daher $\log d = \log a + \frac{1}{10} \cdot \log 1000 = \log a + 0{,}3000000$ u. s. w.

7. Nun macht Hr. Br. den kleinsten Maaßstab a = 100 Pariserlinien, und theilt jede Linie wieder in 10 Theile. Also ist in solchen Theilen a = 1000; und log a = 3.

8. Daher werden die Logarithmen von a, b, c, d u. s. w. nebst den zugehörigen Werthen von a, b, c, d u. s. w. folgende

log a = 3,000000;	folglich	a =	1000,000
log b = 3,100000;	—	b =	1257,925
log c = 3,200000;	—	c =	1584,893
log d = 3,300000;	—	d =	1995,262
log e = 3,400000;	—	e =	2511,886
log f = 3,500000;	—	f =	3162,278
log g = 3,600000;	—	g =	3980,072
log h = 3,700000;	—	h =	5011,872
log i = 3,800000;	—	i =	6309,574
log k = 3,900000;	—	k =	7943,284
log l = 4,000000;	—	l =	10000,000

9. So zeigen also die für b, c, d u. s. w. gefundenen Werthe, wie viel von denen Theilen, deren a, 1000 hält (7) zu der Länge eines jeden nächstfolgenden Maaßstabes genommen werden müssen.

10. Jede solche Länge wird nun für sich in 1000 Theile getheilt, und so erhält Hr. Br. 1000theiligte Maaßstäbe a, b, c u. s. w. deren ganze Längen sowohl, als auch ähnliche Theile

auf

auf ihnen, sich wie die für a, b, c u. s. w. gefundenen Werthe (8) verhalten.

11. Da nun z. E. a : b = 1000 : 1257, 925 = 31 : 39 ist, so erhellet, daß die Länge eines gewissen Maaßstabes sich verhält zu der Länge des nächstfolgenden, wie 31 : 39; und eben so verhalten sich überhaupt ähnliche Theile, die z. E. auf beyden nächstaufeinander folgenden Maaßstäben, Ruthen bedeuten, gegeneinander.

Es wachsen also die Maaßstäbe und ähnliche Theile auf ihnen, nicht sehr schnell: Wenn daher ein gewisser Maaßstab, zu einer Figur, die man auf dem Papiere entwerfen wollte, etwas zu groß wäre, so könnte man stuffenweise einen von den nächst kleinern nehmen, ohne sich der Gefahr auszusetzen, einen auszuwählen, wodurch die aufzutragende Figur plötzlich zu klein ausfiele.

12. Die Art, wie nun der zu einer Figur schickliche Maaßstab gefunden wird, ist diese:

Gesetzt, es sey auf dem Felde ein Dreyeck gemessen worden, dessen längste Seite $= 5^{\circ}\,3'\,4''$ sey. Damit nun diese längste Seite, und folglich auch das ganze Dreyeck verjüngt, z. E. auf ein vorgegebenes Quartblatt Papier, aufgetragen werden könne, und daselbst eine schickliche Größe bekomme, so nehme man auf dem Papiere

piere eine gewisse Länge an, so groß man nämlich die längste Seite des Dreyecks haben will; diese Weite fasse man mit dem Zirkel, und untersuche, auf welchem der Maaßstäbe a, b, c u. s. w. diese Weite 534 Theile, oder nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche, 5° 3′ 4″ beträgt, oder dieser Größe am nächsten kömmt, so hat man den Maaßstab gefunden, nach welchem die Figur aufgetragen werden muß. Man nehme alsdann die 534 Theile von dem gefundenen Maaßstabe völlig genau ab, setze diese Weite aufs Papier, und beschreibe über ihr das vorgegebene Dreyeck.

13. Mehrere Beyspiele findet man in Branders Abhandlung selbst. Man s. dessen Beschreibung eines Systems von Maaßstäben Augsb. 1772. §. 12. u. s. w.

14. Eine solche Reihe von Maaßstäben kann demnach in der ausübenden Mathematik von sehr großen Nutzen seyn, indem man dadurch viele Mühe erspart, die man sonst auf die Auswahl eines geschickten Maaßstabes und dessen Zeichnung verwenden müßte. Wer sich nicht selbst die Mühe geben will, nach der bisherigen Anleitung, eine solche Reihe von Maaßstäben zu verfertigen, kann solche in obgedachter Officin auf Meßing oder Glas in sehr großer Vollkommenheit erhalten.

Uebri-

Uebrigens erhellet, daß man sich zu dem Zwecke (1) auch sonst eine Reihe von Maaßstäben zeichnen könnte, wenn sie auch gleich eben nicht genau nach einer geometrischen Progression fortgehen. Es kömmt nur darauf an, daß die Unterschiede jeder zwey auseinander folgenden nicht zu groß ausfalle.

Der Nonius oder Vernier.

§. 73. Es sey (Fig. XXXIX. Tab. III.) AR eine gerade Linie, auf der sich lauter gleiche Theile, z. E. in beystehender Figur, 14 gleiche Stücke befinden.

II) Nun nehme man eine gewisse Anzahl von diesen Theilen, z. E. die Weite mc, welche 9 von diesen Theilen hält, trage solche auf eine andere gerade Linie von M nach D; dergestalt daß $MD = mc$ sey; und theile nun diese Länge MD in 8 gleiche Stücke $ML = LK = KI$ u. s. w. nämlich in einen Theil weniger, als vorher auf mc; so erhellet, daß die Theile auf MD größer seyn werden, als die auf mc. Es ist nämlich $ML = \frac{1}{8} MD = \frac{1}{8} mc$; aber ml ist $= \frac{1}{9} mc$, mithin $ML > ml$.

III) Man nenne einen Theil auf $MD = a$; einen Theil auf mc oder AR, $= b$, und die angenommene Größe mc oder

$$MD = L: \text{ So ist } ML = a = \tfrac{1}{8} L'$$
$$ml = b = \tfrac{1}{9} L$$

Mit-

Mithin der Unterschied $ML - ml = a - b = \frac{1}{8}L - \frac{1}{9}L = \frac{1}{72}L$ oder weil auch $8a = 9b$, und folglich $a = \frac{9}{8}b$ ist, so wird auch $a - b = \frac{9}{8}b - b = \frac{1}{8}b$.

IV) Es ist also ein Theil ML der eingetheilten Linie MD, um den 72ten Theil der ganzen Länge MD größer, als ein Theil ml auf der zuerst eingetheilten Größe mc: oder es ist auch das Stück ML größer als ml, um den 8ten Theil von ml.

V) Nähme man also z. E. ML, und trüge sie von m nach r, so wäre das Stückchen rl der 72te Theil von mc, oder der 8te Theil von ml oder kl.

VI) Ferner ist

$$MK - mk = 2a - 2b = 2(a - b) = \tfrac{2}{8}b \ (III)$$
$$MI - mi = 3a - 3b = 3(a - b) = \tfrac{3}{8}b$$
$$MH - mh = 4a - 4b = 4(a - b) = \tfrac{4}{8}b$$

u. s. w.

VII) Man stelle sich also vor, die Linie MD werde auf mc gelegt, so daß M auf m, und folglich D auf c zu liegen komme, so wird der Theilpunkt L linker Hand l, auf r fallen, und L wird von l um $\frac{1}{8}$ b abstehen. Ferner wird der Theilstrich K linker Hand k zu liegen kommen, und beyde Theilstriche K, k werden um $\frac{2}{8}$ b von einander abstehen. I wird von i um $\frac{3}{8}$ b entfernt seyn u. s. w.

VIII)

VIII) Ich werde nun, um die eingetheilten Linien AR, DM von einander zu unterscheiden, künftig AR einen eingetheilten Rand, MD aber einen Vernier oder Nonius nennen. Die Ursache dieser Benennungen soll unten erklärt werden.

Den Punkt oder Strich M, wo sich auf dem Vernier die Theile anfangen, werde ich in der Folge den Inder oder den Anfangsstrich nennen. Die Theilsteiche L, K, I u. s. w. die auf dem Vernier den ersten, zweyten, dritten u. s. Theil endigen, sollen nach der Ordnung der erste, zweyte, dritte u. s. Theilstrich heißen.

Dieses zum vorausgesetzt nehme man an, man könnte den Vernier MD längs des eingetheilten Randes AR fortschieben, so aber, daß beyde Linien MD, AR immer genau an einander lägen (wie wenn z. B. die Abtheilungen ML, KL u. s. w. sich auf dem Rande eines dünnen Linials MD befänden, welches man an die Linie AR anlegte, und längs ihr fortbewegte) so wird aus dem bisherigen folgendes erhellen. Wenn man den Vernier MD so an den eingetheilten Rand AR anlegt, daß dessen Inder M genau an einen gewissen Theilstrich m des Randes RA passet, (wie in VII) so liegen bey dieser ersten Lage des Vernier überhaupt die Theilstriche desselben, L, K, I u.

s. w. insgesammt linker Hand derjenigen Theilstriche der eingetheilten Größe mc, die mit denen des Vernier einerley Zahl haben, das heißt: L wird von l um $\frac{1}{8}$ b, K von k um $\frac{2}{8}$ b u. s. w. abstehen.

Schiebt man also den V. DM von der linken Hand gegen die rechte, längs AR fort, bis der erste Theilstrich L des V. an den ersten Theilstrich l der angenommenen Größe mc zu liegen kömmt, so rückt der Index M vorwärts nach R zu, und entfernt sich von m um $\frac{1}{8}$ b. Und so rückt derselbe nach der Ordnung um $\frac{2}{8}$ b, $\frac{3}{8}$ b u. s. w. vorwärts, so wie nach und nach bey dem Fortschieben des V. die Theilstriche, K, I, H u. s. w. an die ähnlichen Theilstriche, k, i, h u. s. w. der eingetheilten Größe m c, zu liegen kommen.

IX) Dieses giebt ein Mittel, zu erfahren, um wie viel ein Punkt μ, der z. E. zwischen zwey Theilstrichen m und n angenommen wird, von dem nächsten Theilstriche m linker Hand, absteht. Man schiebe den V. fort, bis dessen Index M genau an μ zu liegen kömmt; Dann untersuche man, welcher Theilstrich des V. mit einem gewissen Theilstriche der eingetheilten Größe m c zusammentrifft; gesetzt, der 5te Theilstrich G, passe alsdann genau an den eben so vielten Theilstrich g, der eingetheilten Größe mc, so wird nach VIII der Index M oder der

Punkt

Punkt μ, genau um $\frac{5}{8}$ b von m abstehen, oder es wird das Stückchen $m\mu = \frac{5}{8}$ b seyn müssen; und die Weite $A\mu$ würde hier auf dem eingetheilten Rande $= 11\,b + \frac{5}{8}\,b$ seyn.

X) Es kann aber geschehen, wie Fig. XL ausweiset, daß kein Theilstrich des V. mit einem Theilstriche des Randes zusammenpaßt. Es erhellet, wenn der dritte Theilstrich I des V. MD, mit dem eben so vielten Theilstrich i der Länge mc, zusammen passete, daß alsdann völlig genau das Stück $m\mu = \frac{3}{8}$ b seyn müßte. Nun stehet aber I etwas rechter Hand über i hinaus, also muß offenbar $m\mu$ etwas größer als $\frac{3}{8}$ b seyn. Es kann aber nicht $= \frac{4}{8}$ b seyn, weil sonst die Theilstriche H, h, zusammen passen müßten, welches nicht angenommen wird. Es ist also $m\mu > \frac{3}{8}$ b aber $< \frac{4}{8}$ b, und daher zwischen zweyen Gränzen enthalten, die nur um $\frac{1}{8}$ b, von einander unterschieden sind. Das Stückchen Ii, auf dem Rande, ist aber eigentlich der Werth, um wie viel $m\mu$ größer als $\frac{3}{8}$ b ist. Um also Ii zu finden, überlege man folgendes.

Weil $HI - hi = \frac{1}{8}$ b, und die Summe der beyden Stückchen $Ii + Hh$, dem nur genannten Unterschiede $HI - hi$, gleich ist, so wird $Ii + Hh$, $= \frac{1}{8}$ b. Man schätze nun nach dem Augenmaaße, was die beyden benachbarten Stückchen Ii, Hh für ein Verhältniß gegen einander haben; Gesetzt, man habe gefunden $Ii : Hh = n : m$, also $Hh = \frac{m}{n} Ii$; so wird $Ii + \frac{m}{n} Ii$ oder $\frac{n+m}{n} Ii = \frac{1}{8} b$

mithin $Ii = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{1}{8} b.$

je genauer man also sich auf das Augenmaaß verlassen kann, desto zuverlässiger wird man dem wahren Werthe von Ii nahe kommen.

Ex. Ich will annehmen, man habe Hh etwa $= \frac{1}{3} Ii$ geschätzt, so wäre $m = 1$, $n = 3$, also $Ii = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} b = \frac{3}{32} b$, folglich das Stück $m\mu = \frac{3}{8} b + \frac{3}{32} b$, und die Weite $A\mu$ auf dem Rande $= 11 b + \frac{3}{8} b + \frac{3}{32} b$.

XI) Ich habe bisher bloß der Deutlichkeit wegen angenommen, daß die Länge des Vernier 9 Theilen des Randes gleich sey, und diese Länge des V. in 8 gleiche Stücke zertheilet worden. Hierdurch wurde jeder Theil des Vernier um $\frac{1}{8} b$ größer, als jeder Theil des Randes (III) und wir fanden dadurch sehr bequem Achttheilchen von den gleichen Stücken auf dem Rande (VI). Man kann aber die bisherigen Betrachtungen leicht allgemein machen. Man darf sich nur statt der bisherigen Zahl 9 jede andere vorstellen. Gesetzt, es fasse überhaupt der Vernier r Theile des Randes, oder die Länge des V. sey $= r.b$, und diese werde in $r - 1$ Theile getheilet, so wird ein Theil des

V.

V. um $\frac{1}{r-1}$ b größer seyn, als ein Theil des Randes, wo also r überhaupt dasjenige bedeutet, was in den bisherigen Schlüssen (I — X) die Zahl 9 war.

Ferner seyen auf dem Rande von A bis m überhaupt x Theile, jeder $= b$, und für das Stückchen $m\mu$, welches kleiner als ein b ist, treffe der yte Theilstrich des angelegten Vernier DM, an einen Theilstrich des Randes, so wird überhaupt die Weite

$$A\mu = xb + \frac{y}{r-1} . b$$

So war z. E. für (X) $x = 11$; $y = 3$.

Passet endlich kein Theilstrich des V. genau an einen Theilstrich des Randes, so wird

$$A\mu = xb + \frac{y}{r-1} . b + \frac{n}{m+n} . \frac{1}{r-1} b$$

wo m, n, wieder die Zahlen bedeuten, die in solchem Falle, nach der gegebenen Anleitung (X) von dem Augenmaaße abhängen.

Anmerkung.

§. 74. Die bisherige Methode, kleine Theile einer Linie anzugeben, wird gewöhnlich dem **Peter Runnez**, oder **Nonius**, wie man ihn zu nennen pflegt, zugeeignet. Man nennet daher die längs dem eingetheilten Rande bewegliche Linie DM auch einen Nonium. Nunnez war ein Portugiese, und Prof. der Mathematik zu Koimbra. (geb. 1492. zu Alcazar del Sal.)

Hr Hofr. Kästner eignet in seinen vortrefflichen astronom. Abhandl. (zweite Samml. 5te Abhandl. p. 180.) diese Erfindung vielmehr einem Deutschen, Namens P. Vernier, oder Werner zu, und dieses giebt die Ursache der Benennung §. 73. VIII. Man kann in der angeführten Schrift die Geschichte dieser Erfindnng weiter nachlesen, auf welche ich also meine Leser verweise. Noch mehr literärische Nachrichten vom Nonius oder Vernier s. m. auch in Kästners geometrischen Abhandlungen (II. Sammlung, Göttingen 1791. 38te Abh.

Anwendung des Bisherigen.

§. 75. Gesetzt, auf dem Rande AR habe man von A nach R Zolle abgetragen, und jeder Zoll ,sey in 10 Linien getheilt, dergestalt, daß also das bisherige $b = \frac{1}{10}$ Zoll $= 1$ Linie sey. Nun mache man einen Vernier DM, dessen Länge $= 101 . b$ sey, und diesen Vernier theile man in 100 gleiche Theile, so ist ein Theil auf dem Vernier $= \frac{101}{100} . b = b + \frac{1}{100} b$, mit-

mithin um $\frac{1}{100}$ b oder um $\frac{1}{1000}$ Zoll größer, als ein Theil des Randes; und so kann man vermittelst dieses V. sehr bequem den Zoll in 1000 Theile, folglich den Fuß in 10000 Theile eintheilen.

Anmerkung (zu §. 62. 16).

§. 76. 1. Gesetzt, in Fig. XXXII sey auf dem längern Schenkel BC eine gewisse Anzahl von Zollen abgetragen, und jeder Zoll sey in 10 Linien getheilt, dergestalt, daß also die gleichen Theile auf dem Rande BC, Linien bedeuten. Auf dem Schenkel DE des längs BC beweglichen Dreyecks DEF, sey ein Vernier, gezeichnet, dessen Länge = 11 Linien in 10 gleiche Theile getheilet sey, so wird ein Theil auf dem Vernier $= \frac{11}{10}$ b $=$ b $+ \frac{1}{10}$ b also hier um $\frac{1}{10}$ b, oder (wegen b = 1 Linie) um 1 Scrupel größer, als ein Theil des Randes BC. Mithin wird man leicht begreifen, wie sich durch diese Vorrichtung längs EF Parallellinien ziehen lassen, die in einer beliebigen Weite von einander abstehen.

2. Nähmlich die Zahlen, die sich auf die Theile des Vernier beziehen, werden nach entgegengesetzter Richtung auf den Vernier von E gegen D hingesetzt; bey x befinde sich der Index des Vernier.

3. Gesetzt nun, man sollte ein paar Parallellinien ziehen, die z. E. um 8 Linien 4 Scrupel, mithin nach der bisherigen Bezeichnung um $8\,b + \frac{4}{10}\,b$ von einander abständen.

4. So lege man den Schenkel DE so an BC, daß der Index des Vernier genau an einen gewissen Theilstrich des Randes BC passet, und ziehe längs EF eine gerade Linie: Nun schiebe man das Dreyeck DEF von der linken Hand gegen die rechte fort, bis an dem Rande BC, der Index x des Vernier, genau um die in (3) angegebene Größe $8\,b + \frac{4}{10}\,b$ vorwärts gerückt ist, und sich also um so viel, von seiner ersten Stelle entfernt hat, so kann man längs EF wieder eine Linie ziehen, welche denn mit ersterer in der gegebenen Weite parallel seyn wird.

5. Auf eben die Art dienet auch der Schenkel AB dem EF als Nonius oder Vernier.

Wie ein Vernier zur Eintheilung der Kreisbögen und Winkel gebraucht wird.

§. 77. Da dieses mit dem bisherigen sehr genau zusammen hängt, so ist hier der bequemste Ort davon zu handeln.

I) Es sey Fig. XLI, AR ein aus dem Mittelpunkte C gezogener Kreisbogen, der in

lauter

lauter kleine aber gleich große Theile, z. E. in gewöhnliche Grade getheilt sey. AR bedeute hier also einen eingetheilten Rand.

II) Nun halte der Bogen oV auf dem Rande überhaupt r solcher gleicher Theile $o\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ u. s. w. oder es sey $oV = r \cdot o\alpha$, und der diesem Bogen oV zugehörige Winkel VCo am Mittelpunkte heiße α: so wird, wenn man sich durch die Theilpunkte α, β, γ u. s. w. Linien nach dem Mittelpunkte C gezogen vorstellt, dadurch der Winkel $oCV = \alpha$ in r gleiche Theile getheilt.

III) DM sey ein anderer Kreisbogen, aus eben dem Mittelpunkte C, mit einem Halbmesser CM beschrieben, der hier etwas kleiner ist, als der Halbmesser Co des Randes: So ist der Bogen DM mit dem eingetheilten Rande concentrisch, und gehört hier eben dem Winkel VCo am Mittelpunkte, zu.

IV) Auch die nach C zulaufenden Theilstriche des Randes, $\alpha 1$, $\beta 2$, $\gamma 3$ u. s. w. würden den Bogen DM in r gleiche Theile theilen.

V) Nun theile man aber den Bogen DM, bey a, b, c, d u. s. w. in $r - 1$ gleiche Theile, und stelle sich durch die Theilpunkte a, b, c etc. gleichfalls Theilstriche vor, die nach dem Mittelpunkte C zulaufen.

So

So erhellet folgendes:

Einem Theile, wie oα auf dem Rande, gehört am Mittelpunkte C ein kleiner Winkel αCo zu, welcher der rte Theil des Winkels oCV, also $= \frac{\alpha}{r}$ ist (II).

Aber einem Theile, wie Ma auf dem Bogen MD, gehört am Mittelpunkte C ein Winkel MCa zu, der der r — 1te Theil des Winkels MCD oder oCV also $= \frac{\alpha}{r-1}$ ist.

Der Unterschied der beyden Winkel MCa und oCα ist

$$MCa - oC\alpha = \frac{\alpha}{r-1} - \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{r(r-1)} =$$

dem kleinen Winkel aC1, den beyde Theilstriche α1 und a, am Mittelpunkte C mit einander machen würden.

Eben so ist der Winkel oC$\beta = \frac{2}{r} \cdot \alpha$; der Winkel MCb $= \frac{2}{r-1} \cdot \alpha$; daher MCb — oC$\beta$ $= \frac{2}{r(r-1)} \cdot \alpha =$ dem kleinen Winkel 2Cb, um den die beyden Theilstriche β2 und b von einander abstehen, u. s. w.

VI)

VI) Man nenne den Winkel $oC\alpha$, der einem Theile $o\alpha$ auf dem Rande zugehört $= b$, so ist $b = \frac{\alpha}{r}$ (V).

Also der kleine Winkel aC 1, den die ersten beyden Theilstriche α 1 und a mit einander machen $= \frac{b}{r-1}$, der Winkel 2Cb der nächstfolgenden beyden Theilstriche $= 2 \cdot \frac{b}{r-1}$ u. s. w.

VII) Man siehet hieraus, daß die Theilstriche a, b, c u. s. w. des Bogens MD, linker Hand der eben so vielten oder gleichnahmigten Theilstriche α, β, γ des Randes, nach der Ordnung um folgende kleine Winkel

$$\frac{b}{r-1}, \frac{2b}{r-1}, \frac{3b}{r-1}, \frac{4b}{r-1} \text{ u. s. w.}$$

abstehen werden.

VIII) So würde also hier der Bogen MD in Absicht des eingetheilten Randes AR eben das seyn, was Fig. XXXIX die gerade Linie MD in Absicht der AR war. D. h. es würde hier der Bogen MD ein Vernier seyn, und man muß sich hier, eben so wie in §. 73. VIII, einbilden, der Bogen MD könne längs den Abtheilungen des Randes fortgeschoben werden, so so aber, daß MD beständig mit AR concentrisch bliebe.

So wird begreiflich seyn, wie sich vermittelst dieser Einrichtung viel kleinere Winkel angeben lassen, als diejenigen sind, die den Theilen des Randes selbst, am Mittelpunkte C zugehören.

IX) Hätte man daher auf dem Rande z. E. den kleinen Bogen ow, oder den zugehörigen kleinen Winkel wCo am Mittelpunkte, und wollte dessen Größe erfahren, so schiebe man den V. MD von der linken Hand gegen die rechte fort, bis der Index des Vernier, oder der Strich M genau in den Halbmesser Cw zu liegen kömmt, und untersuche hierauf, welcher Theilstrich des Vernier hier linker Hand des Index, mit einem gewissen Theilstriche des Randes in eine gerade Linie fällt, so hat man den kleinen Winkel wCo, um den der Index des V. rechter Hand vom nächsten Theilstriche o des Randes abstehet.

X) Ex. Gesetzt, man habe den Rand in einzelne Grade abgetheilt, oder jeder Theil auf dem Rande gehöre am Mittelpunkte einem Grade zu; so ist $b = 1^\circ$. Der Bogen MD des Vernier gehöre am Mittelpunkt C einem Winkel $MCD = \alpha = 31$ Graden zu, so ist $r = 31$.

Folglich $\frac{b}{r-1} = \frac{1^\circ}{30} = \frac{60'}{30} = 2'$.

D. h. jedem Theile auf dem V. gehöret am Mittelpunkte C ein Winkel zu, der um 2′ größer ist, als der, welcher einem Theile des R. zugehört: Mithin würde bey dieser Einrichtung des Vernier, ein Winkel von 2 zu 2 Min. gemessen. Träfe daher in (IX) der 12te Theilstrich des V. mit einem Theilstriche des Randes zusammen, so würde der kleine Winkel oCw, um den der Index des V. von dem Theilstriche o abstehet $= 12 . 2' = 24'$ seyn. Hätte man demnach auf dem Rande von A bis o, 13 Grade, so wäre der Bogen Aow, oder der zugehörige Winkel am Mittelpunkte $= 13^\circ\ 24'$.

XI) Träfe übrigens kein Theilstrich des Vernier mit einem Theilstriche des Randes genau zusammen, so wird man doch aus §. 73. XI schon zu beurtheilen wissen, wie in solchen Fällen das Augenmaaß zu gebrauchen ist.

XII) Zweites Ex. Gesetzt, der Rand AR sey von 5 zu 5 Minuten getheilt, es sey also $b = 5' = 300''$. Es frägt sich, wie viel Theile des Randes muß der Vernier fassen (*), wenn ein Theil auf dem Vernier um 15″

(*) Wenn ich mich in der Folge des Ausdrucks bediene, der Vernier fasse so viel Theile des Randes, 15″ größer seyn soll, als ein Theil des Randes. Hier wird also r gesucht.

Es soll also (l) die Größe $\frac{b}{r-1}$ oder hier $\frac{300''}{r-1} = 15''$ seyn: Mithin wird $\frac{300}{r-1} = 15$ oder $\frac{20}{r-1} = 1$ folglich $r = 21$. Man muß also den Bogen des V. 21 Theilen des Randes gleich setzen, und solchen alsdann in 20 Theile theilen, so wird man das gesuchte erhalten.

Anmerkung.

§. 78. Da sowohl die Theile des Randes, als auch die des V. gewissen Winkeln am Mittelpunkte zugehören, so erhellet, wie die bisherigen Betrachtungen, bey winkelmessenden Werkzeugen, ihre Anwendung finden. In der Folge werde ich übrigens zeigen, wie man an solchen Werkzeugen die Einrichtung macht, daß man den V. an dem eingetheilten unbeweglichen Rande bequem fortschieben kann. Sonst habe ich hier weiter nichts zu bemerken, als daß die

des, oder sey so viel Theilen des Randes gleich, so verstehe ich darunter die Anzahl der Theile des Randes, welche dem Winkel DCM zukommen, zwischen dessen Schenkeln CD, CM der Vernierbogen enthalten ist.

die Theilstriche des V. sowohl, als die des Randes, genau nach dem Mittelpunkte C zulaufen müssen, wenn man anders bey der Untersuchung, ob zwey Theilstriche zusammen passen, keine Fehler begehen will.

Noch eine andere Einrichtung des Vernier.

§. 79. Man setze, der V. fasse r Theile des Randes, oder dessen Länge sey $= r \cdot b$; Man theile diese Länge in $r + 1$ Theile, so werden hier die Theile des V. kleiner ausfallen, als die des Randes. Es ist nähmlich alsdann ein Theil des V. $= \frac{rb}{r+1}$ und folglich $b - \frac{rb}{r+1} = \frac{b}{r+1}$; oder um die Größe $\frac{b}{r+1}$ übertrifft itzo ein Theil des Randes, einen des Vernier.

Diese zweyte Art von Eintheilung, bey der die Theile des Vernier kleiner ausfallen, als die des Randes, wird auch unterweilen bey Winkelmessern gebraucht, deswegen habe ich hier etwas davon sagen müssen. Den fernern Gebrauch hievon wird man aber leicht verstehen können, da mit einer kleinen Veränderung die Betrachtungen des 73. §. hier ebenfalls ihre Anwendung finden.

Eine

Eine Anwendung der Constructionsart des verjüngten Maaßstabes, kleine Theile eines Kreisbogens anzugeben.

§. 80. Da wir hier gerade mit Eintheilung der Kreisbogen beschäftigt sind, so darf das Verfahren, dessen man sich ehemals häufig bediente, Kreisbogen nach Art des verjüngten Maaßstabes (§. 65) abzutheilen, hier um so weniger ganz übergangen werden, als man noch öfters Winkelmesser vorfindet, worauf diese Art der Eintheilung angebracht ist. Denen also zu Gefallen, die ein solches Werkzeug besitzen, und es auch wohl in Ermangelung eines bessern noch zu Vermessungen anwenden, mögen folgende Betrachtungen dienlich seyn:

I) Es sey CFD Fig. XLII ein gegebener Winkel $= \alpha$, und AB, CD ein paar concentrische Kreisbogen, die aus F mit den Halbmessern $FC = R$; $FA = r$ beschrieben worden, so ist der Abstand AC, der Parallelkreise CD, AB, nähmlich $AC = R - r$, welche Größe ich a nennen will.

Nun ziehe man von C nach B die schiefe Linie CB; Ferner sey der Winkel CFN ein Theil von CFD, oder man nehme $CFN = \frac{m}{n} . \alpha$. Man sucht den Punkt K, wo der Halbmesser

FN

FN die schiefe Linie CB durchschneidet; oder wenn der Winkel CFN $= \frac{m}{n}\alpha$ seyn soll, was ist alsdann CK für ein Stück von CB?

II) Um dieses zu finden, fälle man auf FN, von C, B, die Perpendikel CL, BM herab, so ist in den rechtwinklichten Dreyecken CFL, BFM; für den Sinus totus = 1.

$$1 : \sin CFN = CF : CL \text{ oder}$$

$$1 : \sin \frac{m}{n}\alpha = R : CL$$

also $CL = R . \sin \frac{m}{n}\alpha = (r + a) \sin \frac{m}{n}\alpha.$

III) Nun ist ferner der Winkel NFD $= \alpha - \frac{m}{n}\alpha = \frac{n-m}{n}\alpha$; und daher eben wie in II

$$BM = BF . \sin MFB = r . \sin \frac{n-m}{n}\alpha.$$

IV) In den beyden ähnlichen Dreyecken CKL, MKB ist CL : BM = CK : KB oder auch CL + BM : CL = CK + KB : CK also endlich (weil CK + KB = CB)

$$CK = \frac{CL}{CL + BM} . CB. \text{ oder aus (II. III)}$$

CK

$$CK = \frac{(r+a)\sin\frac{m}{n}\alpha}{(r+a)\sin\frac{m}{n}\alpha + r\sin\frac{n-m}{n}\alpha} \cdot CB.$$

V) So wäre demnach CK ein solches Stück von CB, als der Bruch andeutet, womit CB multiplicirt ist: Man kann also für jeden Winkel CFN $= \frac{m}{n}\alpha$; das zugehörige Stück CK der schiefen Linie CB berechnen.

VI) Um die in IV gefundene Formel durch ein Beyspiel zu erläutern, so wollen wir setzen, der Winkel CFD $= \alpha$ sey sehr klein. Z. E. nur $\alpha = 1^\circ$, und man wolle also vermittelst des Stücks CK, den Winkel CFN, oder den $\frac{m}{n}$ Theil eines Grades angeben.

VII) Bey dieser Voraussetzung (VI) kann man nun ohne merklichen Fehler $\sin\frac{m}{n}\alpha = \frac{m}{n}\alpha$; und $\sin\frac{n-m}{n}\alpha = \frac{n-m}{n}\alpha$, oder die Sinus für die Bogen selbst annehmen (Trig. S. VII). Dann wird

CK

$$CK = \frac{(r+a)\,\frac{m}{n}\,\alpha\,.\,CB}{(r+a)\,\frac{m}{n}\,\alpha + r\,\frac{(n-m)}{n}\,\alpha}$$

$$= \frac{(r.m + a.m)}{rn + am}\,.\,CB = \frac{m + \frac{a}{r}.m}{n + \frac{a}{r}.m}\,.\,CB.$$

VIII) Wenn nun zugleich a in Vergleichung mit r sehr klein, folglich auch der Bruch $\frac{a}{r}$ sehr klein ist, so kann man im Zähler und Nenner des Werthes von CK (VII) die Glieder $\frac{a}{r}.m$, weglassen, und dann wird ohne großen Fehler $CK = \frac{m}{n}\,CB$; Folglich $CK : CB = CFN : CFD$.

IX) Hierauf gründet sich nun das ehemals so häufig angewandte Verfahren von den Gradabtheilungen auf dem Rande eines Winkelmessers noch kleinere Theile zu erhalten. Man gedenke sich Fig. XLIII die parallelen Kreisbogen gf, io, mit ein paar Halbmessern beschrieben, deren Unterschied nicht zu groß gegen einen solchen Halbmesser selbst sey. Die Bögen gd = de = eh u. s. w. mögen hier Grade bedeuten, so werden, wenn man sich die Halbmesser Fgi, Fdk, Fem, Ffo u. s. w. gezogen gedenkt auch die Bogen ik, km, ml, lo auf dem größern Kreise, Grade bezeichnen und die Maaße der Winkel iFk, kFm u. s. w. am Mittelpunkte seyn. Man ziehe die schiefen Linien id, ke, mh, lf u. s. w. theile id, in so viel gleiche Theile, in so viel man den Grad iFk eintheilen will, und beschreibe durch die Theilpunkte a, b, c mit den Halbmessern Fa, Fb, Fc, eine Reihe concentrischer Kreise, wie die Figur ausweiset, so wird man von jedem Grade wie iFk, kFm u. s. w. kleinere Theile nach Maasgabe der Abtheilungen auf den schiefen Linien id, ke, mh, lf u s. w. auf folgende Art erhalten. In beystehender Figur ist die schiefe Linie id in 4 gleiche Theile getheilet worden, und wegen der gezogenen Parallelkreise wird jede andere schiefe Linie ke, lf, eben so viel gleiche Theile bekommen. Wenn man sich daher z. E. von F nach a eine gerade Linie gezogen vorstellt, so wird der Winkel iFa = $\frac{1}{4}$ iFd; weil ia = $\frac{1}{4}$ id ist; folglich iFa = 15′. Eben so iFb = $\frac{2}{4}$ iFd = 30′ u. s. w.; Man würde also auf diese Art hier jeden Grad von 15 zu 15 Minuten eingetheilt erhalten.

Hätte man daher z. E. den Winkel iFr, wo Fr durch den 3ten Theilpunkt der schiefen Linie

Linie lf durchgehet, so würde dieser Winkel hier $= 3^\circ + 3 \cdot 15' = 3^\circ + 45'$ seyn.

X) Dies ist nun die zu Anfange dieses §es erwähnte Theilungsmethode. Sie gründet sich auf die Voraussetzung, daß die Stückchen auf den schiefen Linien id, ke u. s. w. sich wie die zugehörigen Winkel am Mittelpunkte verhalten; dieses findet aber offenbar nur in dem Falle statt, wenn in der Formel für CK (VI) der Bruch $\frac{a}{r}$ sehr klein, folglich die Breite des Randes ig $=$ a mit dem Halbmesser Fg $=$ r verglichen, sehr gering ist. Im entgegengesetzten Falle dürfen die Theile auf den Querlinien id, ke etc. nicht einander gleich seyn, wenn die Winkel iFk, kFe in gleiche Theile getheilet werden sollen.

Es sey also z. B. $\frac{a}{r} = \frac{1}{6}$ oder $a : r = 1 : 6$ also a eben nicht sehr klein in Vergleichung mit r, und man wollte den Grad iFd in 8 gleiche Theile theilen; so ist in der Formel (VII) $n = 8$, und für den ersten Theil iFa $= \frac{1}{8}$ iFd, wird in (VII) $\frac{m}{n} = \frac{1}{8}$; Mithin CK, oder in Fig. XLIII; $ia = \frac{1 + \frac{1}{6}}{8 + \frac{1}{6}} \cdot id = \frac{7}{49} \cdot id = \frac{1}{7} \cdot id.$

Soll also der Winkel iFa, in diesem Exempel, der 8te Theil von iFd seyn, so darf man nach (VIII. IX) nicht $ia = \frac{1}{8}\,id$ nehmen, sondern es muß hier $ia = \frac{1}{7}\,id$ genommen werden. Soll ferner $iFb = \frac{2}{8}\,iFd$ seyn, so wird, weil jetzt $m = 2$; $n = 8$ ist.

$$ib = \frac{2 + \frac{2}{6}}{8 + \frac{2}{6}} \cdot id = \frac{14}{50}\,id = \frac{7}{25}\,id.$$

also keinesweges $ib = \frac{2}{8}\,id$.

Und so wird denn erhellen, daß hier schon die Theile auf id ziemlich ungleich ausfallen, wenn zu ihnen gleich große Winkel am Mittelpunkte gehören sollen.

XI) Da in Fig. XLII. überhaupt $CK =$

$$\frac{m + \frac{a}{r} \cdot m}{n + \frac{a}{r} \cdot m} \cdot CB$$

ist, so kann man ein für allemal aus den beyden Seiten $CF = a + r$; $BF = r$; und dem eingeschlossenen Winkel $CFB = \alpha$; die schiefe Linie CB berechnen, und sie folglich in dem Maaße finden, womit man FB ausgemessen hat; daher alsdann auch CK in diesem Maaße bekannt wird.

Ex. Man setze $a = 2$ Zoll, $r = 48$ Zoll; $\alpha = 1°$, so findet sich durch eine leichte Rechnung

CB

CB = 2, 176 Zoll. Sollte man nun für CFK $= \frac{1}{2}$ Gr. das Stück CK der schiefen Linie CB berechnen, so setze man in die Formel, statt $\frac{m}{n}$ den Bruch $\frac{1}{2}$, oder $m = 1$, $n = 2$, ferner $\frac{a}{r} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$; dies gäbe dann

$$CK = \frac{1 + \frac{1}{24}}{2 + \frac{1}{24}} \cdot 2{,}176 \text{ Zoll} = 1{,}108 \text{ Zoll}.$$

Dieß Ex. befindet sich in Kästners astron. Abh. 2ten Theil pag. 168. Hr. K. findet CL = 1, 109 Zoll.

XII) Wollte man also einen Winkelmesser noch auf die bisher beschriebene Art eintheilen, so würde man weit besser thun, die ungleichen Theile auf einer der schiefen Linien wie BC nach der wahren Formel (XI) zu berechnen, als schlechtweg nach der gewöhnlichen Methode lauter gleiche Theile auf CB zu nehmen, und durch sie die parallelen Kreisbogen zu reissen.

XIII) Man hält den Tycho de Brahe für den ersten, der diese Art, Winkel einzutheilen, gelehrt hat; er hat in der That hier die Construction des verjüngten Maaßstabes nachahmen wollen; wie aus Vergleichung der Figuren XLIII. und XXXV. (B), deutlich zu ersehen ist. Tycho und andere theilen nicht die

schiefe

schiefe Linie id, sondern die Breite des Randes ig, in gleiche Theile; aber auch auf ig. dürfen die Theile nicht gleich groß seyn, wie sich leicht zeigen liesse.

Es wäre indessen immer vortheilhafter, die Theilung auf id, als auf ig zu bewerkstelligen, wenn man von dieser Theilungsart noch Gebrauch machen wollte, weil doch immer id > ig ist, und sich folglich die Theile genauer auf id auftragen lassen.

XIV) Eigentlich müßte die Linie id ein Kreisbogen seyn, wenn auf ihr auch bey einem großen Verhältniß a : r, lauter gleiche Theile (IX), statt finden sollten, und dann hätte diese Theilung des Winkels iFd ihre völlig geometrische Richtigkeit. M. s. Kästners Astr. Abh. II. Th. pag. 171.; dieser Kreisbogen id hat aber seinen Mittelpunkt nicht bey F.

Da es aber ziemlich mühsam ist, dieses Kreises id Mittelpunkt zu finden, um ihn gehörig zu ziehen, so ist dieses die Ursache, warum man für id lieber eine gerade Linie nimmt, und die den Winkeln am Mittelpunkte F zugehörigen Stücke auf id, nach VII, berechnet.

XV) Mehreres hievon lehrt Leupolds Theatrum Machin. Geometr. Cap. 26. §. 410. Er giebt aber nur das practische Ver-

Verfahren an, die Transversallinien zu ziehen, und lehrt noch andere Eintheilungsmethoden, die aber in der Ausübung eben keinen großen Nutzen versprechen.

Der Proportionalzirkel.

§. 81. Dieses Werkzeug dienet gleichfalls, Linien in gegebenen Verhältnissen zu theilen, besonders in solchen Fällen, wo nicht die größte Schärfe nöthig ist.

1. Die Einrichtung dieses Instruments, läßt sich aus der XLIV. Fig. beurtheilen.

Daselbst stellen ABCD, CEGF zwey messingene Lineale vor, welche bey C um ein Gewinde beweglich sind, beynahe auf eben die Art, wie die Schenkel eines gewöhnlichen Handzirkels, dergestalt, daß man die innern Seitenlinien BC, EC, der nurgenannten Liniale, in einen beliebigen Winkel öffnen kann. Das Gewinde muß so gearbeitet seyn, daß bey jeder Oeffnung des Instruments, die beyden Linien BC, EC, sich immer genau in einem und demselben Punkte C durchschneiden. Dieser Punkt C ist der Mittelpunkt einer runden Platte, auf welcher sich in dem Gewinde die Liniale herumdrehen.

Wenn man das Instrument zusammenlegt, so müssen die Oberflächen der Liniale genau in eine

eine einzige Ebene fallen: und wenn man beyde Schenkel BC, EC, in einen gewissen Winkel stellet, so muß sich dieser nicht so leicht wieder verrücken.

Beyde Liniale werden übrigens gleich lang gemacht. Die Diagonallinien CA, CF, oder auch ein paar andere von C ausgehende Linien, theilt man in eine gewisse Anzahl kleiner gleich großer Theile. Hier in der Figur mögen AC, CF, jede etwa in 100 gleiche Theile getheilt seyn. Neben die Theilpunkte werden, wie hier, von 10 zu 10 Theilen, Zahlen beygestochen. Die Theilpunkte, bey denen auf beyden Schenkeln, einerley Zahlen zu stehen kommen, müssen von dem Punkte C gleiche Entfernungen haben.

Diese eingetheilten Diagonallinien nennt man auf dem bisher beschriebenen Proportionalzirkel, die arithmetischen Linien; (Lineae partium aequalium).

2. Zu allerley Absichten befinden sich aber ausserdem gewöhnlich noch verschiedene andere abgetheilte Linien auf diesem Instrumente, wovon man den Gebrauch, so wie überhaupt, die nähere Einrichtung des Proportionalzirkels, weitläuftig in Leupolds Theatro Mach. Geom. Kap. XVI ersehen kann. Auch findet sich daselbst Kap. XXIII ein umständliches

Ver-

Verzeichniß von Schriftstellern, die von dem Proportionalzirkel gehandelt haben.

3. Von der Art, wie obgedachte arithmetische Linien dieses Instruments gebraucht werden, soll folgendes kürzlich einigen Unterricht ertheilen.

Gebrauch des Proportionalzirkels.

I) Eine gerade Linie LM Fig. XLIV in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, z. E. in 9 gleiche Theile einzutheilen, verfahre man so:

Man fasse die vorgegebene Weite LM mit einem Handzirkel und suche auf dem Schenkel CF des Proportionalzirkels, einen solchen Theilpunkt auf, dessen beygeschriebene Zahl sich mit derjenigen genau dividiren läßt, welche die Menge der Theile ausdrückt, in die man LM theilen soll. Hier wähle man also z. E. den Theilpunkt 90, welche Zahl sich mit 9 genau dividiren läßt, setze in diesen Punkt die Zirkelspitze, und eröfne das Instrument so weit, bis die andere Spitze, auf den eben so vielten Theilpunkt 90 des Schenkels CA hinfällt, dergestalt, daß die Weite zwischen beyden gegen einander überstehenden Theilpunkten 90, 90, genau der vorgegebenen Länge LM gleich sey. In dieser Oefnung lasse man nun das Instrument

ment unverrückt, und fasse mit dem Zirkel die Weite zwischen beyden gegenüberstehenden Theilpunkten, 10, 10, (welche Zahlen den 9ten Theil von 90 ausdrücken) so wird diese Weite von 10 nach 10, dem neunten Theil der zwischen den Theilpunkten 90, 90, enthaltenen Länge LM gleich seyn. Die Weite zwischen den Theilpunkten 20, 20, wird $= \frac{2}{9}$ LM seyn u. s. w.

Der Beweis dieses Verfahrens ist aus der Einrichtung des Instruments offenbar. Denn da gleichnahmigte Theilpunkte, d. h. bey denen auf beyden Schenkeln einerley Zahlen stehen, gleiche Entfernungen von C haben, so sind alle Weiten, z. E. von 10 nach 10, oder 20 nach 20 u. s. w. mit einander parallel, und verhalten sich wie der Theilpunkte 10, 20, u. s. w. Weiten von C. Weil also hier die Weite C 10 der 9te Theil von C 90 ist, so wird auch die Weite von 10 nach 10, der 9te Theil der Weite LM seyn, die zwischen den Theilpunkten 90, 90, enthalten ist, und mit der die Weite 10, 10, parallel läuft.

Eben so, weil C 20 $= \frac{2}{9}$ C 90, so ist auch die Weite von 20 nach 20, $= \frac{2}{9}$ LM u. s. w.

II) Die Linie LM in einem gegebenen Verhältnisse, z. E. wie 25 : 40 zu theilen.

Man addire beyde Zahlen 25 und 40 zusammen, dieß giebt die Zahl 65. Man fasse LM mit dem Zirkel, und trage sie auf das Proportionalinstrument, öfne es so weit, bis die Weite zwischen den Theilpunkten 65, 65, der vorgegebenen Länge LM gleich ist. Dann fasse man, bey unverrückter Oefnung des Instruments, die parallelen Weiten, zwischen den Theilpunkten 25, 25 und 40, 40, trage sie auf LM, so wird LM in dem vorgegebenen Verhältniß 25 : 40 getheilet seyn, wie ebenfalls aus der Natur des Werkzeugs erhellet.

III) Zu drey vorgegebenen Linien, die ich a, b, c nennen will, die 4te Proportionallinie d zu finden.

Um dieses zu leisten, fasse man die Weite a, und trage sie auf den Schenkel CA des Proportionalzirkels, z. E. von C nach 20; Ferner trage man auch die Weite b auf eben den Schenkel CA, z. E. von C nach 50; Hierauf nehme man die Weite c, setze die eine Zirkelspitze in den Theilpunkt 20, wo sich die erste Weite a endigte, und öfne die Liniale CA, CF so weit, bis der Abstand zwischen beyden gegenüberstehenden Theilpunkten 20, 20, genau der Weite c gleich ist; dann wird die Weite zwischen den Theilpunkten 50, 50, die gesuchte 4te Proportionallinie seyn. Denn es verhält sich, nach (I), C 20 zu C 50, wie die Weite

von

von 20 nach 20; zu der Weite von 50 nach 50. D. h. a : b = c : d.

IV) Es erhellet aus dem bisherigen, wie sich durch Hülfe des Proportionalzirkels noch viel andere Aufgaben auflösen liessen; ich übergehe sie aber hier, weil sich viele davon sicherer nach §. 69 bewerkstelligen lassen. Meine Absicht war nur, die vornehmsten Begriffe von einem Werkzeuge beyzubringen, welches ehemals bey den Feldmessern in so großem Ansehen stand.

V) Gegenwärtig bedient man sich desselben nicht mehr so häufig, weil dessen Gebrauch sehr oft durch die geringe Größe desselben eingeschränkt wird, welche nicht die gehörige Genauigkeit verstattet, sobald die abzutragenden Verhältnisse durch sehr große Zahlen gegeben, oder gar irrational sind. Im Gegentheil lassen sich doch manche Irrationalverhältnisse durch eine leichte geometrische Zeichnung darstellen, wie z. E. in dem obigen Beyspiele §. 69. XI. Ist dann ferner eine Linie, die man eintheilen will, größer, als die Summe der beyden Schenkel CA und CF des Proportionalzirkels, so fällt der Gebrauch desselben ohnehin weg. Wollte man hingegen das Werkzeug sehr groß, z. E. 12 bis 15 Zoll lang machen, (das wäre insbesondere auch nöthig, wenn Verhältnisse sich in sehr kleinen Theilen sollten abtragen lassen) so würden doch die beträchtlichen Kosten, durch den Gebrauch desselben nicht ersetzt. Auch müßte man in diesem Falle mit einem Stangenzirkel versehen seyn, um die Linien auf- und abzutragen, weil ein Handzirkel von gewöhnlicher Größe nicht mehr hinreichen, und die gehörige Genauigkeit verstatten würde. Diese und mehrere Ursachen, und zumahl der weit bequemere Gebrauch des tausendtheilichten Maaßstabes zum Abtragen und Eintheilen der Linien in gegebenen Verhältnissen, sind schuld daß wenigstens zu diesen Aufgaben, der Proportionalzirkel eben nicht mehr gebraucht wird.

Anmerkung.

§. 82. I. Die bisher beschriebene Einrichtung des Proportionalzirkels, mit zweyen um ein Gewinde beweglichen Linialen, hat der berühmte Galiläus, ohngefähr um das Jahr 1610, zuerst bekannt gemacht.

II. Es hat zwar schon vor dem Jahre 1600 Jug. Byrgius ein Werkzeug angegeben, welches ebenfalls zu der Absicht, Linien in gegebenen Verhältnissen zu verzeichnen und abzutheilen, dienen sollte: Allein sein Werkzeug ist darinn von dem Galiläischen verschieden, daß der Kopf oder Zapfen, um den sich die beyden Liniale mit ihren Abtheilungen drehen, veränderlich ist, und sich in Nuthen, längs den Linialen, verschieben läßt, so daß der eine von

den

den Vertikal-Winkeln, welche die beyden Liniale machen, längere Schenkel, als der andere bekömmt. Diese Einrichtung macht den Gebrauch dieses Instruments sehr wandelbar und unsicher, und das mag wohl mit Ursache seyn, daß es von Galiläi Proportionalzirkel sehr bald verdrängt worden ist. Beschreibungen und Abbildungen davon findet man in Leupolds Theatr. Machin. geom. §. 265. Bions mathem. Werkschule III. B. 1. Kap. S. 82. Galgemeyers Tractat vom Proportionalschregmaaß und Zirkel (Ulm 1615) und Lebrecht Hulsii Tractat von mechanischen Instrumenten (Frankfurt am Mayn, 1600.)

Die besten Schriftsteller, die den mannichfaltigen Gebrauch des Proportionalzirkels lehren, sind MALLET *Geometrie Practique.* DE CHALES *Geom. Pract. L.* 4. Michael Scheffelts Unterricht vom Proportionalzirkel, vorzüglich die neue 1781 zu Breslau herausgekommene und vom Hrn. Prof. Scheibel umgearbeitete Ausgabe davon. NIC. GOLDMANN *tract. de usu proportionarii* (*Lugd. Bat.* 1656) *in fol.*

Auch in der Branderischen nunmehr Höschelischen Officin in Augspurg, verfertigt man Proportionalzirkel, zum geometrischen Gebrauche; man hat davon Lamberts Abhandhandlung: Kurzgefaßte Regeln zu perspektivischen Zeichnungen, vermittelest eines zu deren Ausübung, so wie auch zu geometrischen Zeichnungen eingerichteten Proportionalzirkels. Augsburg, 1768.

III) Statt des Proportionalzirkels mit zwey eingetheilteu Schenkeln, ein einziges Linial zu gebrauchen, hat Adrian Metius gewiesen. *Praxis nova geometr. per usum Circini et regulae proportionalis. Franek.* 1623.

IV) Wenn die arithmetischen Linien des Proportionalzirkels nicht, wie in der XLIV Fig. längs den Diagonalen der Liniale, sondern längs den Schärfen derselben CB, CE, selbst, verzeichnet wären, so daß diese arithmetischen Linien, beym Zusammenlegen der Liniale, völlig in eine einzige zusammenfielen, so könnte man durch die Querstückchen von einem Theilpunkte auf CE zum gegenüberstehenden auf CB, bey einer geringen Oefnung beyder Liniale, auch Theilchen von sehr kleinen Größen angeben. Gesetzt, CB, CE seyen in 100 Theile getheilt, und die Liniale so weit geöffnet, daß der Abstand von B nach E nur 1 pariser Linie betrüge, so würde nun z. E. das Querstückchen von 23 nach 23 $= \frac{23}{100}$ einer paser Linie seyn. Gewöhnlich sind aber auf dem Proportionalzirkel die arithmetischen Linien nicht

längs

längs CB, CE selbst gezeichnet, lassen sich also nicht nahe genug zusammenbringen, daß ihre Endpunkte um jeden ganz geringen Abstand einander genähert, und also auch Theilchen von einer sehr geringen Größe angegeben werden könnten.

V. Je länger übrigens CB und CE sind, und je kleinere Theile sich auf CB und CE selbst schon tragen oder schätzen lassen, desto kleinere Theilchen werden sich auch von derjenigen Größe angeben lassen, welche zwischen B und E enthalten ist.

VI. In Nürnberg bedienen sich die Dratzieher und Instrumentenmacher eines Verfahrens, beynahe wie des bisherigen (IV), um die genaue Dicke, oder die sogenannte Nummer einer Dratsaite zu bestimmen. CB, CE, (Fig. XLVIII*) sind die Schärfen zweyer unter einem sehr kleinen Winkel BCE unter einander fest verbundener, sehr gerader messingener Liniale. Längs diesen Schärfen ist z. E. bey o und o die Stelle bemerkt, wo eine Dratseite von Nro. o, zwischen beyde Schenkel BC, CE, gebracht, genau hinein passen würde. Wäre nun der Raum Co z. E. in 24 gleiche Theile getheilt, so würde eine Saite, welche z. E. genau zwischen die Theilpunkte 3 und 3 passete, wenn man sie in den Winkel BCE hineinbrächte, von Nro. 3. seyn, und so in andern

dern Fällen. Auf eine ähnliche Art werden durch Unterabtheilungen, Nro. $3\frac{1}{2}$, Nro. $3\frac{1}{4}$ u. s. w. angegeben.

Auf eben dieser Idee beruht Wedgewoods Verfahren, um die Aenderung zu bestimmen, welche Thonwürfel durch die Hitze erfahren. *Phil. Trans.* Vol. 72. for 1788. P. II. art. 19. und des von Lichtenberg und Forster herausgegebenen Götting. Mag. 1782. II. Stück. Man sehe über das bisherige auch Kästners geometrische Abh. I. Sammlung, 38. und 39. Aufsatz.

Ein Verfahren, das Verhältniß zweyer Linien gegen einander zu finden, wenn man keinen verjüngten Maaßstab, oder andere Mittel bey der Hand hat.

§. 83. 1. Gesetzt, man solle Fig. XLV. Tab. III., das Verhältniß der geraden Linien AB : AE finden.

Man trage also die kleinere Linie AB, auf die größere AE so oft es angehet, von A nach B, von B nach C, von C nach D. Dieses gehet hier 3 mahl an, und es bleibt das Stück DE übrig, daher ist hier.

I) $AE = 3 . AB + DE.$

2. Nun fasse man die Weite DE, und trage sie auf AB, so oft es angehet, von A nach b, von b nach c, von c nach d; hier bleibt nun das Stückchen Bd übrig, und es ist

II) $AB = 3 . ED + Bd$.

3. Eben so trägt man das übergebliebene Stück dB auf Ab, so oft man kann, so findet sich Ab oder (2)

III) $ED = 2 . Bd + \gamma b$.

4. und endlich nach eben dem Verfahren, Aβ oder

IV) $Bd = 2\, b\gamma + y\beta$.

5. Hier ist das übergebliebene Stückchen yβ schon so klein, daß man es bequem nach dem Augenmaaße mit dem in (3) übergebliebenen Stückchen bγ vergleichen kann. Hier würde ohngefähr

V) $y\beta = \frac{3}{4} \gamma b$ seyn.

6) Aus den Gleichungen I, II, III, IV, V, die man solchergestalt in (1, 2, 3, 4, 5) erhalten hat, kann man nun durch eine sehr leichte Rechnung, das Verhältniß AB : AE finden. Denn

7) Aus der Gleichung V, den Werth von yβ in die IV substituirt, wird

$Bd = \frac{11}{4} . b\gamma$. also $b\gamma = \frac{4}{11} . Bd$ dieß in III substituirt, giebt

ED

$ED = \frac{26}{11} . Bd$ also $Bd = \frac{11}{26} ED$; dieß in II substituirt, giebt $AB = \frac{89}{26} ED$ also $ED = \frac{26}{89} AB$, dieß in I gesetzt, giebt $AE = \frac{293}{89} . AB$. Daher das gesuchte Verhältniß

$$AE : AB = 293 : 89.$$

8. Man siehet aus dem bisherigen Beyspiel leicht das allgemeine dieser Methode. Man sucht nähmlich diese Näherung so weit zu treiben, bis man endlich auf ein so kleines Stückchen, wie $y\beta$, kömmt, welches sich bequem, mit dem nächst vorhergehenden Stückchen γb, nach dem Augenmaaße vergleichen läßt.

9. Die Richtigkeit dieses Verfahrens hängt offenbar von der Sorgfalt ab, mit der man, vermittelst des Zirkels, die Theile auf AE nach einander hinsetzt, und von der Schärfe des Augenmaaßes, bey Schätzung des zuletzt übergebliebenen Stücks.

10. Man kann dieses Verfahren auch zur Ausmessung der Winkel oder Kreisbogen gebrauchen. Gesetzt, die bisherigen Linien AE, AB, seyen ein paar Kreisbogen, die mit einerley Halbmesser beschrieben worden. Der Bogen AE gehöre zu 60°, so wird AB zu $\frac{89}{293} . 60°$ oder zu $18° \, 23' \, 30''$ gehören, oder so groß würde der Winkel seyn, der diesem Bogen zugehörte. Auf die Secunden, die man in dem Werthe für AB erhält, wird man sich

aber bey diesem Verfahren wohl schwerlich verlassen können; besonders wenn der Halbmesser dieser Bogen klein ist.

11. Ich habe nicht für undienlich erachtet, hier auch diese Methode beyzubringen: Denn man muß in der Ausübung immer mehrere Auflösungen einer Aufgabe in Bereitschaft haben; und die bisherige kann, in Ermangelung anderer Mittel, gar wohl gebraucht werden.

Hogrevens Vorschlag, Maaßstäbe auf ein dreyeckigtes Prisma zu verzeichnen.

§. 84. Da die Abtragung gerader Linien von dem verjüngten Maaßstabe, immer einige Zeit erfordert, besonders wenn man genau verfahren will, und man sehr leicht auf messingenen Maaßstäben die Zirkelspitzen verdirbt, so räth Hogreve (pract. Anweis. z. topogr. Vermess. eines Landes, §. 26) man solle auf die Seitenflächen eines dreyeckigten Prisma von Holz oder Elfenbein ꝛc. Maaßstäbe verzeichnen, beym Gebrauche die scharfe Kante, auf der die Abtheilungen eingerissen sind, an die vorgegebene gerade Linie anlegen, und so auf ihr, bloß vermittelst einer scharf zugespitzten Nadel, die abzusetzenden Maaße bemerken.

Man kann auf die drey Seitenflächen des Prisma 6 Maaßstäbe von verschiedener Größe ver-

verzeichnen; Innerhalb des dreyeckigten Prisma wird ein Theil mit Bley ausgefüllt, damit das Prisma auf dem Papiere fest liege.

Hogreve versichert, daß dieses Verfahren, Maaße abzutragen, sehr geschwind von statten gehe, und auch die Fehler vermieden würden, die sonst beym Einsetzen der Zirkelspitzen begangen werden könnten.

Einige Anmerkungen über die Zuverlässigkeit beym Abtragen gerader Linien.

§. 85. 1. In der theoretischen Mathematik pflegt man sich den Punkt als die Gränze aller Ausdehnung zu gedenken, und mathematische Punkte haben weder Länge, Breite, noch Dicke. Eine Linie ist bloß die äusserste Gränze einer Fläche, und sie bestehet also bloß in einer Länge, ohne Breite und Dicke. Allein, eine ganz andere Bewandniß hat es mit solchen Punkten und Linien, die in der praktischen Mathematik vorkommen. Die praktischen Punkte, wenn sie in die Sinne fallen sollen, sind selbst kleine Theilchen einer Fläche; und eben so verhält sichs mit den practischen Linien, bey denen ebenfalls eine Länge und Breite in Betrachtung kömmt.

Auf dem Felde werden, nach Maaßgabe der Umstände, oft ganze Flächen und Körper,

z. E. Gränzsteine, Häuser, Bäume, Bergspitzen u. s. w. für Punkte angenommen, und Flüsse, Hecken, Wege u. s. w. als Linien betrachtet. So groß ist also der Unterschied zwischen den theoretischen und practischen Größen.

Auf dem Papiere haben wir Ursache, die practischen Punkte und Linien, dem Bilde der theoretischen, so nahe als möglich zu bringen, d. h. sie so zart zu entwerfen, als es die Werkzeuge zulassen, und die Umstände erfordern.

Wenn wir eine practische Linie auf dem Papiere mit einem Zirkel fassen, und messen wollen, so werden wir dabey allemahl Fehler begehen; theils wegen der Dicke der Zirkelspitzen, die als Punkte angesehen werden, theils wenn der Maaßstab selbst vielleicht nicht ganz zuverlässig ist, und endlich wegen der Unvollkommenheit unserer Augen, die im Sehen ihre Gränzen haben, und practische Punkte auf dem Papiere nicht mehr deutlich erkennen, so bald sie gar zu klein sind, und folglich unter einem zu kleinen Sehewinkel ins Auge fallen.

2. In dem letztern Falle hat man Versuche angestellt, die kleinste mögliche Größe der practischen Punkte zu bestimmen, die man auf dem Papiere mit bloßem Auge noch deutlich unterscheiden kann. — Um hievon nur ohngefähr eini-

einige Begriffe zu geben, so setze man, auf dem Papiere sey ein kleiner Kreis, z. E. von einer Linie im Durchmesser, beschrieben, und etwa mit einer schwarzen Farbe überstrichen worden. Nun stelle man das Blatt Papier in eine mäßige Erleuchtung, und entferne sich mit dem Auge nach und nach immer weiter, bis der Kreis auf dem Papiere anfängt undeutlich zu werden. Die Entfernung des Auges von dem Papiere, mit dem Durchmesser des Kreises verglichen, giebt die scheinbare Größe, oder den kleinsten Winkel, unter welchem dieser Kreis noch deutlich empfunden werden kann.

3. Nämlich, wenn man den Sinus totus $= 1$ setzet, so wird die Tangente der scheinbaren Größe dieses Kreises herauskommen, wenn man dessen Durchmesser, mit der Entfernung des Auges dividirt. Es sey also die scheinbare Größe $= \varphi$, des Kreises Durchmesser $= a$, die Weite des Auges von dem Kreise, wenn er anfängt undeutlich zu werden, d. h. die Gesichtsferne, oder die Gränze des deutlichen Sehens $= b$, so ist

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{a}{b}$$

weil aber φ immer ein sehr kleiner Winkel ist, so kann man bloß $\varphi = \frac{a}{b}$ (Trig. S. VII) oder

in

in Secunden $\varphi = \frac{a}{b} \cdot 206264$ Sec. setzen.

4. Diese scheinbare Größe φ richtet sich offenbar nach der Schärfe der Augen, weil b nicht für jedes Auge einerley seyn kann.

5. So ist R. Smith (Lehrbegr. d. Optik §. 97) bey einem Versuche gegenwärtig gewesen, wo ein guter Freund von ihm, einen schwarzen Kreis auf weißen Papiere, bey dem gewöhnlichen Tageslichte nicht mehr deutlich erkennen konnte, da die Entfernung seines Auges von dem Kreise ohngefähr 5156mahl grösser war, als der Durchmesser desselben. Mithin war für diese Person b = 5156 . a und folglich der kleinste empfindbare Gesichtswinkel

$$\varphi = \frac{206264}{5156} \text{ Sec.} = 40 \text{ Sec.}$$

6. Diese Person hatte sehr gute Augen; weil ihr in einer so großen Entfernung, folglich unter einer so geringen scheinbaren Größe, jener Kreis erst anfieng undeutlich zu werden. Wahrscheinlich muß bey den meisten Menschen der Sehewinkel größer als 40″ seyn, wenn sie ein kleines Object noch deutlich sollen empfinden können.

Man kann annehmen, als ein Mittel aus vielen Erfahrungen, daß von den meisten

Men-

Menschen ein Object anfängt undeutlich gesehen zu werden, so bald der Winkel, unter welchem es ins Auge fällt, kleiner als eine Minute, oder 60″ ist. — Indessen giebt es Personen, denen ein Gegenstand noch unkenntlich bleibt, wenn er gleich unter einem Winkel von 2 und mehreren Minuten ins Auge fiele.

7. Es kömmt der Sehewinkel offenbar auch auf die Farbe und Figur der Gegenstände, und auf den Grad ihrer Erleuchtung an. Wenn man z. E. einen gelben Kreis von eben der Größe, wie in (5) auf dem weißen Papiere verzeichnete, so würde man ihn bey weiten in der Entfernung gar nicht mehr sehen, in welcher der schwarze Kreis nur erst anfängt undeutlich zu werden.

Die größten Fixsterne machen an unserm Auge kaum einen Winkel von 1″ und wir sehen sie dennoch wegen ihres sehr lebhaften Glanzes.

Striche werden auf größere Weiten gesehen, als Punkte, oder Tüpfelchen von gleicher Breite, und längere Striche sieht man auf größere Weiten als kürzere gleich dicke. Jurin konnte einen Silberdrath von $\frac{1}{385}$ Zoll Dicke auf weißem Papiere unter einem Gesichtswinkel von $3\frac{1}{2}$ Sec. und eines seidenen Fadens Dicke unter einem Winkel von $2\frac{1}{2}$ Sec. noch sehen. Einzelne iso=

isolirte Gegenstände bleiben auf eine größere Weite empfindbar, als gleich große, zwischen andern Objecten befindliche, Gegenstände, (Smiths Optik der deutsch. Ueb. S. 502.)

8. Hat man nun ein für allemahl durch eine Erfahrung den kleinsten Sehewinkel bestimmt, unter dem ein Auge einen gewissen Gegenstand noch deutlich empfindet, so können wir daraus herleiten, wie groß der Durchmesser eines andern Objects, dessen Weite vom Auge gegeben ist, seyn müsse, damit man es noch deutlich erkennen möge. Denn aus der Gleichung (3) wird umgekehrt

$$a = b \text{ tang } \varphi.$$

Ex. Gesetzt eine Person, deren kleinster Sehewinkel, bey schwarzer Farbe auf weiß, zwey Minuten betrüge, wollte eine gerade Linie LM Fig. XLIV, die auf dem Papiere mit Tusche gezeichnet ist, mit dem Zirkel fassen, und auf dem verjüngten Maaßstabe messen; die Entfernung dieser Linie vom Auge sey 8 Zoll, so ist $\varphi = 2$ Min. $b = 8$ Zoll, folglich der Diameter des kleinsten sichtbaren practischen Punktes der Linie LM $= 8$ Zoll $\times$ tang $2' = 0{,}0005818 \;.\; 8$ Zoll $= 0{,}0046544$ Zoll $= \frac{1}{215}$ Zoll. Um so viel kann also diese Person bey dem einen Endpunkte M der Linie LM, und um eben so viel auch bey dem andern L fehlen.

D.

D. h. sie würde die Weite LM höchstens nur bis auf $\frac{2}{215}$ oder $\frac{1}{107}$ eines Zolles genau mit dem Zirkel fassen können; oder um so viel könnte sie LM zu groß oder zu klein nehmen, weil ihr die äussersten Gränzen dieser Linie in der Entfernung von 8 Zollen unkenntlich werden.

Wäre nun z. E. die Linie LM = 6 Zoll, so wäre das Verhältniß des Fehlers zur ganzen Länge = $\frac{1}{107} : 6 = 1 : 642$ oder blos wegen der undeutlichen Empfindung der äussersten Punkte dieser Linie, würde die Person, deren kleinster Winkel 2′ betrüge, die vorgegebene Länge LM, in einer Entfernung von 8 Zollen, nur höchstens bis auf ihren 642 Theil genau abtragen, und messen können, wenn auch gleich die Zirkelspitzen mathematische Punkte wären, und also aus dieser Ursache keine neuen Fehler entsprängen.

9. So läßt sich also aus dem bisherigen einigermaaßen die Genauigkeit bestimmen, mit der eine Person, deren kleinster Sehewinkel bekannt ist, eine vorgegebene Linie abtragen und messen kann. Indessen werden doch wohl in den meisten Fällen die Fehler, deren Grund in dem Baue unserer Augen liegt, nicht sehr beträchtlich seyn. Weit größer sind diejenigen, die aus Nachlässigkeit begangen zu werden pflegen. Z. E. wenn man die Zirkelspitzen nicht recht genau einsetzt, oder wenn sie nicht scharf

genug

genug sind, die äussersten Gränzen einer Linie gehörig zu fassen.

10. Die bisherigen Betrachtungen werden bey Gelegenheit auch in der Folge noch nützlich seyn. Z. E. die Fehler zu bestimmen, die wegen der unterschiedenen Schärfe der Augen, beym Winkelmessen u. s. w. begangen werden können.

11. Verschiedene Versuche über die Schärfe der Augen, und die scheinbare Größe der kleinsten sichtbaren Punkte, bey verschiedener Farbe, und Erleuchtung derselben, sind von meinem Vater, Tob. Mayer, in den alten Göttingischen Comment. Soc. Reg. Tom. IV. pag. 120. beschrieben. Er folgert daraus, daß bey schwachen Erleuchtungen sich der kleinste Sehewinkel umgekehrt wie die Wurzel des sechsten Grades der Stärke der Beleuchtung verhalte.

Allerley hieher gehöriges enthält auch eine Schrift vom Hrn. Prof. Späth: Analytische Untersuchungen über die Zuverlässigkeit, mit welcher ein Landmesser — — Winkel und Linien abmessen kann. Altdorf und Nürnberg, 1789. 2ter Abschnitt.

12. Die bisherigen Betrachtungen gelten überhaupt nur in so fern, als ein kleiner Gegenstand, z. E. ein Tüpfelchen blos undeutlich gesehen wird, weil es unter einem zu kleinen Sehewinkel ins Auge fällt, oder man nach Verhältniß des Durchmessers dieses Tüpfelchens zu weit von ihm weg ist.

13. Es lehrt aber auch die Erfahrung, daß ein solches Tüpfelchen undeutlich wird, wenn man es zu nahe an das Auge bringt.

14. Mit dieser Undeutlichkeit muß man die bisher betrachtete nicht verwechseln.

15. Die (13) erwähnte rührt nemlich nicht blos von der geringen scheinbaren Größe des Tüpfelchens her, sondern weil der ganze Gegenstand, von dem das Tüpfelchen ein Theil ist, undeutlich wird, so bald er dem Auge zu nahe kömmt, wovon die Optik den weitern Grund angiebt. Beym Abtragen der Linien nimmt man an, eine Linie erscheine im Ganzen deutlich, einzelne Punkte von ihr aber nur deswegen undeutlich, weil ihr Sehewinkel zu klein ist, oder vielmehr, weil unser Auge Schenkel eines Winkels, die zu nahe zusammenfallen, mit einander verwechselt und einen für den andern hält.

16. Aus dem bisherigen läßt sich auch der Fehler beurtheilen, den man beym Abstecken einer geraden Linie auf dem Felde, wegen des Sehewinkels, und dem davon abhängenden unrichtigen Visiren begehen kann.

Wären z. B. Fig. VIII. ab, cd, mn, die Durchmesser dreyer nach einer geraden Linie Oilk abzusteckenden Stäbe, so frägt sich, um wie viel kann der lezte Stab über mn fehlerhaft zu stehen kommen, wenn man das Auge in o hält, und nach der Vorschrift des §. 33 III. längs obdn an den Seitenflächen der Stäbe hinausvisirt?

Man gedenke sich bey o an der wahren Visirlinie on den kleinsten Winkel des deutlichen Sehens, so wird zwischen den Schenkeln desselben ein Stück der Linie hf enthalten seyn, so viel wird der Fehler betragen, um welchen der Stab über mn unrichtig zu stehen kommen kann.

Dieß zwischen den Schenkeln des gedachten Winkels enthaltene Stück der Linie hf wird, wie sich leicht einsehen läßt $=$ on . tang φ.

Also $\varphi = 1'$ gesezt, so kann mn um den Abstand 0,0002909 . on falsch zu stehen kommen. Wäre also z. B. on $=$ 800 Fuß, so kann der Stab über mn um 0,232 eines Fußes

ßes also ohngefähr um 2 Zoll falsch zu stehen kommen.

Da nun die Stäbe selbst gewöhnlich diese Dicke haben, so kann man den Stab mn in einer Entfernung von 800 Fuß um seine ganze Dicke selbst falsch abstecken, in so ferne man nur den Fehler betrachtet, der auch bey dem möglichst scharfen Visiren mit dem bloßen Auge noch statt finden kann. Bey dunkeler Witterung wird man den Fehler wohl noch viel größer ansetzen dürfen.

VII. Ka=