IV. Kapitel.

Entwerfung krummer Linien auf dem Felde.

Vorläufige Begriffe und Erklärungen.

§. 54. Es sey Fig. XXII. Tab. II. $\alpha\beta c\delta\varepsilon\varphi\gamma\zeta$ der Zug einer beliebigen krummen Linie auf dem Felde: z. B. die Beugung eines Flusses, die krumme Gränze eines Waldes u. d. gl.

AD sey aber eine gerade Linie, die nach Gefallen neben der krummen hergezogen ist: so wird die krumme Linie, sich der geraden, an einigen Stellen nähern, an andern sich wieder von ihr entfernen, auch sie selbst, wie z. B. bey c durchschneiden können.

2. Wüßte man nun die Lage eines jeden Punktes der krummen Linie gegen die gerade, so würde man einen deutlichen Begriff von ihrem Zuge erhalten, ja auch selbst daraus ein Mittel finden, sie auf dem Papiere zu verzeichnen.

3. Es giebt verschiedene Methoden, die Lage eines Punktes, gegen eine nach Gefallen gezogene gerade Linie zu bestimmen; diejenige aber,

die sehr oft in der practischen Geometrie gebraucht wird, ist folgende:

Es sey in der willkührlichen geraden Linie, AD nach Gefallen ein gewisser Punkt A angenommen, und α, β, δ u. s. w. seyen Punkte der krummen Linie, deren Lagen gegen die gerade AD bestimmt werden sollen. Man fälle also von α, β, δ u. s. w. auf AD die Perpendiculärlinien αa, βb, δd u. s. w. herab.

So wird der Punkt α bestimmt seyn, wenn man erstlich die Länge des Perpendikels αa weiß, zweitens die Weite Aa, von dem willkührlichen Punkte A angerechnet, bis an das Perpendikel $a\alpha$, und drittens die Lage des Perpendikels αa, ob nämlich αa, rechter oder linker Hand AD liegt.

Eben so würde β durch die Linien βb, Ab bestimmt u. s. w.

Denn es wird kein anderer Punkt, in der krummen Linie vorkommen, dem eben die αa, Aa zugehörten, und der doch von dem Punkte α, unterschieden wäre. Es ist kein Punkt in der krummen Linie, als gerade der β, dem dieselben Grössen $b\beta$, Ab zugehörten.

4. Es könnte wohl geschehen, daß z. E. der Punkt δ eben den Abstand von der geraden Linie AD hätte, den der Punkt α hat, oder

daß

daß $d\delta = a\alpha$ wäre, allein dann sind doch Ad, und Aa nicht einerley; Auch läge hier δ linker Hand AD, α aber rechter Hand.

Eben so könnte z. E. dem Punkt x sowohl ein Perpendikel $xa = \alpha a$, als auch dieselbe Weite Aa zugehören, die dem Punkte α zukömmt, aber x wird doch nicht mit α einerley seyn, weil die Weiten xa, $a\alpha$ auf entgegengesetzten Seiten der geraden Linie AD liegen.

5. So erhellet also, wie durch die in (3) angegebenen Umstände, die Lage eines gewissen Punktes gegen die gerade Linie AD völlig bestimmt und gegeben ist.

6. Man nennt die Linien Aa, Ab, Ad u. s. w. welche auf der willkührlichen Ad von A angerechnet werden, Abscissen, und die zugehörigen Perpendikel αa, βb, δd; Ordinaten. Die Linie AD selbst heißt die Abscissenlinie, und A der Anfangspunkt der Abscissen.

7. Also sagt man, daß jeder Punkt der krummen Linie z. E. α durch seine Abscisse Aa, und Ordinate $a\alpha$ gegeben oder bestimmt sey.

8. Da zu gleicher Zeit auch die Lage der Ordinate bekannt seyn muß (3) so kann man diese durch die Zeichen + — unterscheiden. Z. B. die Ordinaten rechter Hand der Abscissen-

linie, wie aα, bβ u. s. w. mögen mit +, die Ordinaten linker Hand z. E. dδ, εe u. s. w. mit dem Zeichen — bemerkt werden.

9. Da, wo die krumme Linie die gerade Linie AD schneidet, wie bey c, ist die Absciſſe = Ac, die Ordinate aber = o.

10. Da zu jedem andern Punkte der krummen Linie eine andere Absciſſe und Ordinate gehört (3. 4.) so würde es auf dem Felde eine unendliche Arbeit seyn, wenn man für alle Punkte die Absciſſen und Ordinaten messen wollte. Man bestimmt daher gewöhnlich nur diejenigen Ordinaten und Absciſſen, welche den merklichsten Krümmungen und Wendungen entsprechen. Z. B. in der Figur nur diejenigen, welche den Punkten α, β, c, i, δ, ε, φ, γ, η zugehören, wo die krumme Linie am stärksten sich der Absciſſenlinie nähert, oder sich von ihr entfernt.

11. Hat man solchergestalt auf dem Felde für die hauptsächlichsten Punkte der krummen Linie, die Ordinaten und Absciſſen gemessen, so läßt sich daraus schon ziemlich genau ihr Zug und ihre Gestalt beurtheilen, und auf dem Papiere entwerfen, wenn man die Maaße der Absciſſen und Ordinaten, in eben der Ordnung, wie man sie auf dem Felde gefunden, vermittelst des verjüngten Maaßstabes, auf eine auf

dem

dem Papier gezogene Abscissen-Linie absetzt, und durch die Endpunkte der Ordinaten aus freyer Hand eine krumme Linie zieht. Die Figur auf dem Papiere wird aber der auf dem Felde, desto ähnlicher werden, je mehr Abscissen und Ordinaten gemessen worden sind.

12. Der Bogen einer krummen Linie, der zwischen zwey nächst auf einander folgenden, und nicht sehr weit von einander liegenden Ordinaten enthalten ist, kann gegen die Abscissenlinie hohl oder erhaben seyn. Hohl heißt er, wenn dessen Chorde zwischen ihm und der Abscissenlinie liegt. Erhaben, wenn die Chorde nicht zwischen ihn und die Abscissenlinie fällt. Z. E. in der Figur, wäre der Bogen $\gamma\varphi$ gegen die Abscissenlinie hohl, weil dessen Chorde $\gamma\varphi$ zwischen ihm und der Abscissenlinie liegt. Der Bogen $\gamma\eta$ aber wäre das Beyspiel eines Bogens, der seine erhabene Seite der Abscissenlinie zukehrte.

13. Man hat in der höhern Geometrie noch andere Merkmahle, woraus man erkennen kann, ob ein Bogen seine hohle und erhabene Seite der Abscissenlinie zuwendet. Diese Merkmahle sind aber in der practischen Geometrie von keinem Nutzen. Man sehe indessen hievon Kästners Anal. des Unendl. (1770) §. 518. 521.

14. Hat man auf dem Felde ein paar nächst auf einander folgende Ordinaten gemessen, so wird es gut seyn, wenn man zu gleicher Zeit auch anmerkt, ob der Theil der krummen Linie zwischen ihnen, gegen die Abscissenlinie hohl oder erhaben ist. Diese Bemerkung dient alsdann, zu einer genauern Verzeichnung auf dem Papiere.

15. Einige Schriftsteller bedienen sich statt der Wörter, Abscissen, Ordinaten, Benennungen aus der mathematischen Geographie, und nennen die Abscissen, Längen, die Ordinaten, Breiten; ich habe aber lieber die Namen beybehalten wollen, die man einmal in der Geometrie eingeführt hat.

Aufgabe.

§. 55. Die Abmessungen an einer krummen Linie auf dem Felde zu bestimmen.

Aufl. 1. Man stecke längst der krummen Linie (Fig. XXII.), eine gerade ab, durch ein paar Stäbe, die man bey A und D in den Boden befestigt.

2. In der abgesteckten Richtung AD, spanne man von A bis B eine Meßkette aus, und lasse sie in unverrückter Lage.

3. Hierauf gehe man längst der ausgespannten Kette fort, z. B. nach a, wo man bey α eine merkliche Bucht oder Wendung der krummen Linie bemerkt.

4. Man zähle auf der Kette die Menge der von A bis a enthaltenen Ruthen, Fuße und Zolle, so hat man die Abscisse Aa, die dem Punkte α zugehört.

5. Um die Ordinate a α zu messen, lege man an den Punkt a, so gut es nach dem Augenmaaße geschehen kann, einen Maaßstab senkrecht an die Richtung der Kette, und messe nach dem Punkte α zu.

6. Wollte man noch genauer verfahren, so spanne man von α nach a eine Schnur an, und messe mit dem Maaßstabe längst ihr her. Die ausgespannte Schnur dient nicht allein, um in der geraden Richtung aα zu messen, sondern auch desto sicherer bey a einen rechten Winkel Aaα zu erhalten.

7. In den meisten Fällen aber kann man die Schnur weglassen; besonders wenn die Ordinaten nicht sehr groß sind.

8. Die gemessene Abscisse Aa, und Ordinate aα, bemerke man in einem bey sich zu führenden Manual, oder **Brouillon**.

9. Hierauf gehe man weiter längst der Kette fort, und wenn man nach dem Punkte b hinkömmt, wo man abermahls bey β eine Wendung der krummen Linie, nach einer auf Ab senkrechten Richtung bβ bemerkt, so zähle man wiederum wie vorhin, die Menge der Ruthen, Fuße und Zolle von A bis b, und messe die Ordinate bβ.

10. Weil die bisherigen Ordinaten rechter Hand der Abscissenlinie lagen, so schreibe man neben ihre Maaße in dem Manuale, zugleich das Zeichen + hin. (§. 54. 8.)

11. Bey c, wo die krumme Linie in die Abscissenlinie einschneidet, nimmt man auch die Abscisse Ac; und setzt die zugehörige Ordinate = o. (§. 54. 9.)

12. Endlich bey B, wo die Kettenlänge zu Ende ist, messe man auch die Ordinate Bi. Die Abscisse AB ist aber da der ganzen Kettenlänge gleich.

13. Auch muß man in dem Manuale neben die Ordinate Bi das Zeichen — setzen, weil sich die krumme Linie bereits linker Hand der Abscissenlinie befindet.

14. Ist man solchergestalt mit einer Kettenlänge zu Ende, so gehen die Kettenzieher weiter

ter fort, und spannen abermahls, von B bis C eine Kettenlänge an.

15. Darauf verfährt man von B bis C eben so, wie vorhin von A bis B gezeigt worden.

16. Hier muß ich aber erinnern, daß beym 2ten Kettenzuge zu jeder Abscisse Bd, Be, Bf u. s. w. eine Kettenlänge, oder 5° addirt werden muß, um die Abscissen Ad, Ae, Af, von dem Punkt A angerechnet, zu erhalten; und diese letztern schreibt man eigentlich in dem Manuale auf.

17. Eben so addirt man, beym dritten Kettenzuge, zu jeder Abscisse Ch u. s. w. 2 Kettenlängen oder 10°, damit man die Abscissen Ah u. s. w. bekomme.

18. Bey jedem Kettenzuge nehme man überhaupt so viel Abscissen und Ordinaten, als man nothwendig braucht, um daraus ohngefähr den Zug der krummen Linie beurtheilen zu können.

19. Wegen des Manuals muß ich aber noch folgende Erinnerung beyfügen. Man mache zwey Kolumnen, in die erste schreibe man die Maaße für die Abscissen, in die zweyte die Maaße der Ordinaten mit den zugehörigen Zeichen + —.

Auch kann man, um die einzelnen Kettenzüge zu unterscheiden, allemal da, wo ein Kettenzug zu Ende ist, einen Strich untersetzen.

Endlich bemerke man noch in dem Manuale, wo jedesmal zwischen zwey nächst auf einander folgenden Ordinaten, die krumme Linie hohl oder erhaben gegen die Abscissenlinie war, und bediene sich dazu etwa der Buchstaben H. E. oder anderer willkührlicher Zeichen, die man neben die Maaße der Ordinaten hinschreibt.

20. So würden also die Bestimmungen für die Abscissen und Ordinaten der krummen Linie, in dem Manuale etwa auf folgende Art zu stehen kommen.

Abscissen			Ordinaten			
°	'	"	°	'	"	
1	5	3	+0	2	8	H
2	8	5	+0	8	3	H.
3	4	6	+0	0	0	E
5	0	0	−0	5	0	E
6	0	0	−0	6	0	E
7	2	0	−0	7	0	E
8	5	0	−0	8	0	E
10	0	0	−0	7	0	E
11	0	0	−0	9	0	H
12	9	0	−0	5	0	H.
15	0	0	−0	4	0	

21. Wie nun aus solchen Datis die krumme Linie aufs Papier verzeichnet werden könne, das werde ich in der Folge zeigen.

Anmerkungen über das Vorhergehende.

§. 56. I) Es erhellet leicht, daß die Punkte α, β, γ u. s. w. eben nicht Punkte einer krummen Linie seyn müssen, sondern sich auch nach Gefallen auf andere Gegenstände beziehen können, deren Lage man in Absicht der Abscissenlinie bestimmen will. Z. E. Eckpunkte von Gebäuden, Gränzsteine u. s. w.

II) Man nimmt die willkührliche Abscissenlinie gern so nahe neben der krummen Linie her, als möglich, damit die Ordinaten nicht gar zu groß werden; fangen daher die Ordinaten an sehr stark zu wachsen, so reicht man mit einer Abscissenlinie allein nicht aus. In solchem Falle nimmt man eine neue Abscissenlinie DO an, deren Lage oder Winkel mit der erstern, bekannt seyn muß. Doch hievon werde ich in der Folge erst nähern Unterricht ertheilen können.

III) Oft zeigen sich unerwartete Hinderniße, die keine unmittelbare Messung der Ordinaten zulassen: Wie wenn z. E. die krumme Linie Fig. XXII die Beugungen eines Flusses vorstellte; Da kann man oft wegen der seichten

Ufer

Ufer keine Ordinaten bequem messen. Wie man sich in solchem Falle zu verhalten habe, wird ebenfalls die Folge ausweisen.

IV) Es muß endlich noch bemerkt werden, daß man sowohl die Abscissenlinie nach horizontaler Richtung annehmen, als auch selbst die Ordinaten horizontal messen müsse, damit man nämlich die Reduction der krummen Linie auf die Horizontalfläche erhalte. (§. 4.)

Liefe daher die krumme Linie Fig. XXII. an einer Anhöhe herunter, so müßte man nach (§. 38. 6.) jeden Kettenzug horizontal anspannen. Um die Ordinaten zu messen, liesse sich in solchem Falle sehr bequem eine Meßschnur gebrauchen. Man läßt sie an dem Punkte, wo sich auf der Kette eine Abscisse endigt, fest halten, und spannt sie alsdann bis an den perpendiculär gegenüberstehenden Punkt der krummen Linie horizontal aus, so daß sie mit der Kette einen rechten Winkel macht: Hierauf bestimmt man auf dieser Schnur die Länge der Ordinate. Dieses Verfahren ist bey solchen Krümmungen, die an Anhöhen herunter laufen, weit sicherer, als wenn man sich der Maaßstäbe dazu bedienen wollte.

Es versteht sich aber, daß auf der Schnur Fuße von eben der Größe seyn müssen, wie

auf

auf der Kette, damit man die Ordinaten und Abcissen in einerley Maaße bekomme.

Uebrigens ist in vielen Fällen eine sehr genaue Bestimmung der Ordinaten nicht nöthig, wie z. E. in dem Falle, wenn die Krümmungen eines Flusses zu bestimmen sind, da bekannt ist, daß die Ufer oft sehr unbestimmte Gränzen haben.