Einige Trigonometrische und andere Sätze, die in Rechnungen häufig gebraucht werden.

1. Alle trigonometrische Linien, als Sinus, Tangenten, Secanten, u. s. w. sind in den gewöhnlichen Sinustafeln in Form ganzer Zahlen für den Halbdurchmesser oder Sinus totus = 10000000 zu finden. Es ist aber bey vielen Rechnungen vortheilhaft, den Sinus totus = 1 zu setzen *). Alsdann verwandeln sich jene Sinusse und Cosinusse sämtlich in Decimal-Brüche. Will man nun diese trigonometrischen Linien für den Sinus totus = 1 finden, so darf man nur diejenigen, die in den Tafeln angegeben sind, mit 10000000 dividiren, d. h. von der rechten Hand gegen die linke 7 Decimalstellen von denselben ab-

*) In Vega's Logarithmischen, Trigonometrischen und andern zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln, Wien 1783. finden sich Tafel VI. die trigonometrischen Linien schon für den Sin. tot. = 1 angegeben.

abschneiden. Z. E. in den Tafeln ist für den Sin. tot. = 10000000, der Sinus von 28° = 4694716; der Sinus von 28° für den Sinus tot. = 1 würde also folgende Zahl 0,4694716 seyn.

Der Logarithme von 10000000 ist 7. Also müste in den Tafeln für log Sin. tot die Zahl 7 stehen. Daß man aber 10 statt log Sin tot findet, rührt daher, daß man bey Berechnung der Logarithmen der trigonometrischen Linien nicht obigen Halbmesser 10000000, sondern vielmehr einen Halbmesser = 10000000000 zum Grunde gelegt hat, für welchen sich nun auch z. B. in Sherwins und mehr andern größern Tafeln die trigonometrischen Linien angegeben finden.

II. Da folglich in den Tafeln der Logarithme des Sinus totus = 10 gesetzt wird, so erhellet aus (I), daß man von dem Tabellen-Logarithmen einer gewissen trigonometrischen Linie nur die Zahl 10 abziehen dürfe, um den Logarithmen dieser trigonom. Linie für den Sinus totus = 1 zu erhalten. Z. E. in den Tafeln ist log sin 28° = 9, 6716093; also wäre log sin 28° = 9, 6716093 — 10 = — 0, 3283907, wenn der Sin. tot = 1 angenommen würde.

Gewöhnlich zieht man aber die 10 nicht würklich ab, sondern setzt sie nur mit dem negativen Zeichen hinter den Tabellarlogarithmen,

oder

oder man schreibt auch in dem gegebenen Beyspiele 0, 6716093 — 1.

Umgekehrt, hat man den Log. einer trigonometrischen Linie für den sin tot = 1, so addirt man 10 hinzu, um den Logarithmen derselben für den sin tot. der Tafeln zu bekommen.

III. Wenn der Halbmesser eines Kreises = 1 ist, so ist bekanntermaaßen die halbe Peripherie = 3, 141592 . . . . und der Logarithme dieser Zahl = 0, 4971498.

IV. Wenn in einem Kreise, dessen Halbmesser = 1 ist, ein gewisser Bogen in Theilen des Halbmessers gegeben ist, so kann man die Anzahl von Secunden finden, die dieser Bogen hält, wenn man ihn mit der Zahl 206264 multipliciret.

Denn die halbe Peripherie eines Kreises hält 180.60.60 oder 648000 Secunden. Wenn man nun den gegebenen Bogen in Theilen des Halbmessers = a, und die diesem Bogen zugehörige Anzahl von Secunden = x nennt, so schließt man nach der Regel de Tri

$$3,141592 : a = 648000'' : x''$$

also $x = \frac{648000}{3,141592} . a$; Dividirt man nun 648000 würklich mit 3, 141592, so kömmt 206264 zum Quotienten, und es ist daher

$$x = 206264 . a$$

V. Auch ist $\log 206264 = \log 648000 - \log 3,141592 = 5,8115750 - 0,4971498$ (III) $= 5,3144252$ folglich $\log x = 5,3144252 + \log a$

Ex. Wie viel Secunden hält ein Bogen der $= 0,3246$ des Halbmessers ist. Also ist hier $a = 0,3246$ Mithin

$$\begin{array}{ll} \log a = & 3,5113485 - 4 \\ \text{addirt} & 5,3144252 \\ \hline \log x = & 4,8257737 \end{array}$$

Daher

$$x = 66954,3 \text{ Sec.} = 18^\circ\, 35'.\, 53'',3$$

VI. Eben diese gefundenen $18^\circ\, 35'.\, 53'',3$ würden auch das Maaß des Winkels seyn, der dem Bogen a am Mittelpunkte des Kreises zugehörte.

VII. Wenn in einem Kreise, dessen Halbmesser $= 1$ ist, α einen sehr kleinen Bogen, z. E. nur von einigen wenigen Minuten bedeutet, so kann man so wohl den Sinus, als auch die Tangente dieses kleinen Bogens, ohne merklichen Irrthum diesem kleinen Bogen selbst gleich setzen, oder es ist alsdann

$$\sin \alpha = \alpha$$
$$\text{tang } \alpha = \alpha$$

das will sagen, so viel Theilchen des Halbmessers 1, auf den Sinus oder die Tangente dieses Bogens gehen, eben so viel dergleichen Theil-

Theilchen, wird auch ohne merklichen Fehler der Bogen selbst halten.

In Secunden wäre aber dieser Bogen = 206264 α nach IV.

VIII. Es ist bekanntermaaßen $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$: Nimmt man nun für x einen sehr kleinen Bruch an, so ist x^2 in Vergleichung mit $1 + 2x$ als unendlich gering anzusehen, und man kann daher in solchem Falle blos setzen $(1 + x)^2 = 1 + 2x$.

Man setze $2x = m$ also $x = \frac{1}{2}m$ so ist $(1 + \frac{1}{2}m)^2 = 1 + m$

Daher $\sqrt{(1+m)} = 1 + \frac{1}{2}m$

Wenn also m einen sehr kleinen Bruch bedeutet, so ist ohne merklichen Fehler

$$\sqrt{(1 + m)} = 1 + \frac{1}{2}m$$

IX. Ist m negativ, so wird

$$\sqrt{(1 - m)} = 1 - \frac{1}{2}m$$

Anmerk. Völlig genau läßt sich $\sqrt{(1 + m)}$, was auch m ist, durch eine unendliche Reihe ausdrücken und es ist

$$\sqrt{(1+m)} = 1 + \frac{1}{2}m - \frac{1}{8}m^2 + \frac{1}{16}m^3 - \frac{5}{128}m^4 \text{ etc.}$$

Man s. Kästners Anal. d. Unendl. im 50 §. der neuesten Ausgabe 1799.

X.

X. Da $\cos\alpha = \sqrt{(1 - \sin\alpha^2)}$ ist, wenn man den Sinus totus $= 1$ setzet, so wird unter der Voraussetzung, daß α sehr klein ist, $\sin\alpha = \alpha$ (VII) Mithin

$$\cos\alpha = \sqrt{(1 - \alpha^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \text{ (IX)}$$

XI. Einfache trigonometrische Formeln.

Wenn man sin tot $= 1$ setzet, und β einen gewissen Winkel oder Bogen bedeutet, so ist bekanntermaaßen

1) $\sin\beta^2 = 1 - \cos\beta^2$; oder $\sin\beta = \sqrt{(1 - \cos\beta^2)}$

2) $\cos\beta = \sqrt{(1 - \sin\beta^2)}$

3) $\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$

4) $\cot\beta = \dfrac{1}{\tan\beta} = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$

5) $\sec\beta = \dfrac{1}{\cos\beta} = \sqrt{(1 + \tan\beta^2)}$

6) $\operatorname{cosec}\beta = \dfrac{1}{\sin\beta} = \sqrt{(1 + \cot\beta^2)}$

XII. Zusammengesetzte trigonometrische Formeln.

1) $\sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta$
2) $\sin(\beta - \gamma) = \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta$

3)

3) $\cos(\beta+\gamma) = \cos\beta \cos\gamma - \sin\beta \sin\gamma$

4) $\cos(\beta-\gamma) = \cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma$

5) $\tan(\beta+\gamma) = \dfrac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta \tan\gamma}$

6) $\tan(\beta-\gamma) = \dfrac{\tan\beta - \tan\gamma}{1 + \tan\beta \tan\gamma}$

Diese Sätze findet man z. E. in Hr. H. Kästners Trigonometrie 19 Satz u. s. f.

Es folgen aber aus diesen 6 sehr fruchtbaren Lehrsätzen noch sehr viel andere, die insgesamt von häufiger Anwendung sind, und einem Geometer zur Erfindung neuer Wahrheiten, und zur Erweiterung seiner Wissenschaft dienen. Wir wollen aus den angeführten 6 Formeln noch folgende herleiten.

XIII. Wenn man in XII, die Formeln (1. 2) zusammen addirt oder sie von einander abziehet, so wird

7) $\sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma) = 2 \sin\beta \cos\gamma$

8) $\sin(\beta+\gamma) - \sin(\beta-\gamma) = 2 \sin\gamma \cos\beta$

Eben dieses mit den Formeln 3, 4, vorgenommen, giebt

9) $\cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma) = 2 \cos\beta \cos\gamma$

10) $\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma) = 2 \sin\beta \sin\gamma$

Wenn

Wenn man $\beta+\gamma=\varphi$; $\beta-\gamma=\psi$ mithin $\beta=\frac{\varphi+\psi}{2}$; $\gamma=\frac{\varphi-\psi}{2}$ setzt, so verwandeln sich die Formeln 7, 8, 9, 10, in folgende

$$11)\ \sin\varphi+\sin\psi=2\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

$$12)\ \sin\varphi-\sin\psi=2\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right).\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

$$13)\ \cos\varphi+\cos\psi=2\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

$$14)\ \cos\varphi-\cos\psi=-2\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

Aus 11, 12 wird

$$15)\ \frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi}=\frac{\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}.\frac{\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}$$

$$=\tan\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cot\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

Aus 13, 14, wird eben so

$$16)\ \frac{\cos\psi-\cos\varphi}{\cos\psi+\cos\varphi}=\tan\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right).\tan\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

Und wenn man in 11, 12, statt ψ setzet $90^\circ-\psi$, so wird

17)

17) $\sin\varphi + \cos\psi = 2\sin\left(\frac{\varphi - \psi + 90}{2}\right)$
$\cos\left(\frac{\varphi + \psi - 90^\circ}{2}\right)$

18) $\sin\varphi - \cos\psi = 2\cos\left(\frac{\varphi - \psi + 90^\circ}{2}\right).$
$\sin\left(\frac{\varphi + \psi - 90^\circ}{2}\right)$

Aus 11. 13, wird

19) $\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi} = \tang\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) =$
$\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\sin\varphi - \sin\psi}$ (12. 14.)

Aus 12. 13. erhält man

20) $\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi} = \tang\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)$

(Aus 1. 2) wird, $\gamma = \beta$ gesetzt,

21) $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$

22) $\cos 2\beta = \cos\beta^2 - \sin\beta^2 = 2\cos\beta^2$
$- 1 = 1 - 2\sin\beta^2$

Aus (22) wird, wenn man statt 2β den Buchstaben φ setzt

$\cos\varphi = 2\cos\frac{1}{2}\varphi^2 - 1$. Mithin $1 + \cos\varphi$
$= 2\cos\frac{1}{2}\varphi^2$ und

$$23)\ \cos\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1+\cos\varphi}{2}\right)}$$

Eben so wird aus (22) wegen $\cos\varphi = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2$

$$24)\ \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\varphi}{2}\right)}$$

Und wenn man in 23, 24 statt φ setzt $90° - \varphi$, so wird

$$25)\ \cos.(45° - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\left(\frac{1+\sin\varphi}{2}\right)}$$

$$26)\ \sin(45° - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\left(\frac{1-\sin\varphi}{2}\right)}$$

Aus (20) wird, $\psi = 0$ gesetzt,

$$27)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} \text{ aus (19)}$$

$$28)\ \cot\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$$

Endlich wird aus (19. 20) wenn man $90° - \psi$ statt ψ setzt

$$29)\ \frac{\sin\varphi+\cos\psi}{\cos\varphi+\sin\psi} = \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi-\psi+90°}{2}\right)$$

$$30)\ \frac{\sin\varphi-\cos\psi}{\cos\varphi+\sin\psi} = \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi+\psi-90°}{2}\right)$$

XIV. Dies sind zwar nicht alle, doch bey weiten die brauchbarsten trigonometrischen Formeln. Wenn es nöthig ist, so läßt sich aus ihnen noch eine große Menge anderer herleiten, die zwar nicht alle gleich brauchbar sind, von denen es aber gut ist, eine vollständige Samlung zu haben.

Nur muß man in einer solchen Samlung eine gewisse Ordnung halten, um jede Formel bequem aufsuchen zu können. In dem Falle ist es gut, die Formeln nach gewissen Gestalten zu ordnen, da eine große Menge derselben einige Aehnlichkeit in Absicht ihres Ausdrucks untereinander haben. Ich habe mir eine solche Samlung verfertiget, die ziemlich vollständig ist, und mir wegen ihrer Einrichtung das Aufsuchen sehr erleichtert.

XV. Ohnerachtet ich die gewöhnliche trigonometrische Auflösung der Dreyecke, bey meinen Lesern voraussetzen darf, so können doch Fälle vorkommen, wo analytische Auflösungen theils brauchbarer theils bequemer sind. Ich gebe hier ein paar Formeln an, vermittelst deren man aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, oder aus drey Seiten eines Dreyecks, sehr leicht die übrigen unbekannten Stücke desselben berechnen kann. Vorher muß ich aber folgendes beybringen.

XVI. 1. Wenn B und A ein paar Zahlen sind, und $A < B$ ist, so läßt sich $\sqrt{(B^2 - A^2)}$ durch die Sinustafeln berechnen, denn es ist

$$\sqrt{(B^2 - A^2)} = B\sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right)}$$

Da nun $A < B$ mithin $\frac{A^2}{B^2} < 1$ ist, so läßt sich, wenn die 1 den Sinus totus bedeutet, der Bruch $\frac{A}{B}$ allemahl als ein Sinus eines gewissen Winkels betrachten, den ich ψ nennen will. Man suche also einen Winkel ψ dessen Sinus $= \frac{A}{B}$ ist, so wird

$$\sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right)} = \sqrt{(1 - \sin\psi^2)} = \cos\psi$$

Mithin

$$\sqrt{(B^2 - A^2)} = B\cos\psi$$

wo man sowohl $\sin\psi = \frac{A}{B}$ als auch $B\cos\psi$ durch Logarithmen berechnen kann.

2. Eben so läßt sich auch $\sqrt{(B^2 + A^2)}$ durch die Sinustafeln finden. Denn es ist

$$\sqrt{(B^2 + A^2)} = B\sqrt{\left(1 + \frac{A^2}{B^2}\right)}$$

Hier

Hier suche man also einen Winkel, dessen Tangente $= \frac{A}{B}$ ist, oder man setze tang $\psi = \frac{A}{B}$

so wird sec $\psi = \surd \left(1 + \frac{A^2}{B^2}\right)$

Mithin $\surd (B^2 + A^2) = B \sec \psi$

Dieses zum vorausgesetzt so seyen

XVII. In dem Dreyecke DAF fig. XXIII. die Seiten AD $= a$, AF $= b$, der eingeschlossene Winkel DAF $= \varphi$

Man soll die dritte Seite DF $= c$ finden.

Aufl. Man fälle von D auf AF die Perpendiculär-Linie DC herab, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke ADC, wenn man sin tot $= 1$ setzt,

$$AD : DC = 1 : \sin \varphi$$

$$AD : AC = 1 : \cos \varphi$$

Mithin DC $=$ AD sin $\varphi = a \sin \varphi$; AC $= a \cos \varphi$ Folglich CF $=$ AF $-$ AC $= b - a \cos \varphi$, daher in dem rechtwinklichten Dreyecke DCF; $DF^2 = DC^2 + CF^2$ oder

$$c^2 = a^2 \sin \varphi^2 + (b - a \cos \varphi)^2 =$$
$$a^2 (\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2) + b^2 - 2\,ab \cos \varphi$$

aber $\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2 = 1$ (XI. 1) folglich

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos \varphi$$

XVIII. Diese Formel bestimmt aus den gegebenen Stücken a, b, φ, das Quadrat der dritten Seite c; um aber bey der Berechnung von c die Ausziehung der Quadratwurzel zu ersparen, so kann man folgende Einrichtung gebrauchen

Es ist auch $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - 2ab \cos\varphi$ oder

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab(1 + \cos\varphi)$$

aber $1 + \cos\varphi = 2\cos\frac{1}{2}\varphi^2$, (XIII. 23) daher

$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2$$

$$c = \sqrt{((a+b)^2 - 4ab\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2)}$$

diese Formel läßt sich nun mit der (XVI. 1) vergleichen, wenn das dortige B^2 hier $(a+b)^2$; und A^2 hier $4ab\cos\frac{1}{2}\varphi^2$ bedeutet.

Mithin hat man $B = a + b$; $A = \sqrt{4ab\cos\frac{1}{2}\varphi^2} = 2\cos\frac{1}{2}\varphi\sqrt{ab}$. Man suche also einen Winkel $= \psi$ dessen Sinus $= \frac{A}{B}$ oder hier $= \frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi\sqrt{ab}}{a+b}$ ist, so wird $c = B\cos\psi = (a+b)\cos\psi$

Will man alles durch Logarithmen rechnen, so wird erstlich

$$\log\sin\psi = \log 2 + \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}(\log a + \log b) - \log(a+b)$$

und dann

$$\log c = \log(a+b) + \log\cos\psi$$

Ex.

Ex. Es sey $a = 100$; $b = 87$, $\varphi = 30° 18'$ so wird

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2}\varphi = 9,9846375 - 10 \text{ (nach II)}$$
$$\tfrac{1}{2}(\log a + \log b) = 1,9697596$$
$$\overline{ 12,2554271 - 10}$$
$$\text{abgez.} \log (a+b) = 2,2718416$$
$$\overline{\text{giebt} \log \sin \psi = 9,9835855 - 10}$$

folglich weil hier 9,9835855 — 10 der Logarithme des Sinus vom Winkel ψ ist, wenn sin tot = 1 gesetzt wird, so ist nach (I) 9,9835855 der Logarithme von sin ψ für den sin tot = 10000000000 (I).

Wenn man also in den Sinustafeln den nur genannten Logarithmen 9,9835855 aufsuchet, so findet man dabey den Winkel $\psi = 74°.20'. +$ Also

$$\log \cos \psi = 9,4314286 - 10$$
$$\log (a + b) = 2,2718416$$
$$\overline{\log c = 1,7032702}$$
$$\text{daher } c = 16,49$$

Ich habe in diesem Exempel die Secunden in dem Winkel ψ weggelassen. Wollte man sie aber auch mitnehmen, so hätte man sich der gewöhnlichen Proportionaltheile bedienen müssen.

XIX. Es würden aber alsdann zwey Proportionen nöthig seyn, wenn man für die Secunden in dem Winkel ψ, den Logarithmen von cos ψ finden wollte. Nemlich 1) würde man vermittelst der Proportionaltheile die Secunden in dem Winkel ψ, und dann 2) vermittelst einer zweyten Proportion, für die gefundene Anzahl von Secunden, den log von cos ψ berechnen. Eigentlich braucht man aber den Winkel ψ nicht selbst, sondern blos dessen Cosinus, wenn man in XVIII die Seite c sucht. Es ist daher, um log cos ψ zu finden, nicht nöthig, die Secunden in dem Winkel ψ erst würklich zu berechnen, sondern man kann kürzer so verfahren. Es ist aus den Sinustafeln

M) $\log \sin 74^\circ\, 20' = 9{,}9835582$

N) $\log \sin \psi = 9{,}9835855$

O) $\log \sin 74^\circ\, 21' = 9{,}9835936$

Um also die Secunden in dem Winkel ψ zu berechnen, würde man erstlich nach der gewöhnlichen Regel schliessen

$O - M : N - M = 60'' : x''$ da wäre folglich

$$x'' = \frac{N - M}{O - M}\, 60''$$

Nun ist aber ferner

P) $\log \cos 74^\circ\, 20' = 9{,}4314286$

Q) $\log \cos 74^\circ\, 21' = 9{,}4309776$

da

da also log cos ψ = log cos $(74^\circ 20' + x'')$ zwischen P und Q fallen muß, so setze man log cos ψ $= P - y$ wo y den Proportionaltheil bedeute, der denen x'' zugehöret. Um also y zu finden schliesse man

$$60'' : x'' = P - Q : y \text{ oder}$$

$$60'' : \frac{N - M}{O - M} . 60'' = P - Q : y \text{ da würde also}$$

$$y = \frac{(P - Q)(N - M)}{O - M} \text{ Mithin}$$

$$O - M : N - M = P - Q : y$$

Also blos vermittelst dieser einzigen Proportion findet man sogleich den Proportionaltheil y, der in dem Cos ψ denen x'' zugehört, ohne daß es nöthig ist, durch eine besondere Proportion vorher die x'' selbst zu berechnen

Hier ist

$$N - M = 0,0000273$$

$$O - M = 0,0000354$$

$$P - Q = 0,0004507$$

Mithin die Proportion diese

$$0,0000354 : 0,0000273 = 0,0004507 : y$$

also $y = 0,0003475$

folglich $\log \cos \psi = P - y =$

$9,4314286 - 0,0003475$

oder

$$\log \cos \psi = 9,4310811$$

daß diese Rechnung weit leichter und bequemer ist, als wenn man erst würklich die x'', und dann hieraus den Proportionaltheil y berechnen wollte, wird man leicht einsehen. Ich habe es daher nicht undienlich erachtet, kürzlich diesen Rechnungsvortheil, der sich mit geringer Mühe auf ähnliche Fälle erstrecken läßt, hie beyzubringen.

XX. Aus der Formel XVII, nämlich

$$c^2 = a^2 - 2\,ab \cos \phi + b^2$$

folgt umgekehrt

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab} = \cos \phi$$

$$1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab} = 1 - \cos \phi \text{ oder}$$

$$\frac{c^2 - (a - b)^2}{2\,ab} = 1 - \cos \phi \text{ und}$$

$$\frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab} = \frac{1 - \cos\varphi}{2} = \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2$$

XIII. 24.

Aber $c^2 - (a-b)^2$ ist $= (c + a - b)(c - a + b)$

Es wird also $\sqrt{\frac{(c + a - b)(c - a + b)}{4ab}} = \sin\tfrac{1}{2}\varphi$

oder durch Logarithmen

$$\tfrac{1}{2}\log(c + a - b) + \tfrac{1}{2}\log(c - a + b) =$$
$$\tfrac{1}{2}(\log a + \log b + \log 4) = \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

diese Formel dienet, aus drey Seiten eines Dreyecks, oder aus a, b, c, den Winkel φ zu berechnen, der der Seite c gegenüber steht. Man muß aber zu dem Werthe, wodurch man $\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi$ bekömmt, noch 10 hinzu addiren, damit man $\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi$ für den sin tot = 10000000 erhalte (I).

Ex. Es sey $a = 300$; $b = 200$; $c = 210$ so ist

$c + a - b = 310$;	$\tfrac{1}{2}\log(c + a - b) =$	1,2456808
$c - a + b = 110$;	$\tfrac{1}{2}\log(c - a + b) =$	1,0206963
	addiret 10 =	10,0000000
	Summe =	12,2663771

abgezogen $\frac{1}{2}(\log a + \log b + \log 4) = 2,6901056$

gibt $\log \sin \frac{1}{2}\varphi = 9,5762715$

Und durch Proportionaltheile $\frac{1}{2}\varphi = 22°.8'.39''$

folglich $\varphi = 44°.17'18''$

Es ist gar kein Zweifel, daß diese Rechnung, aus drey Seiten eines Dreyecks einen Winkel zu finden, weit kürzer und bequemer ist, als die gewöhnliche Regel, die in den gemeinen Elementen der Trigonometrie angegeben wird.

Man setze die Summe aller drey Seiten, oder $a + b + c = S$; so ist $c + b - a = S - 2a$ und $c + a - b = S - 2b$, daher auch

$$\sin \tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{(S-2a)(S-2b)}{4ab}}$$

welche Form noch bequemer als die obige ist.

XXI. Aus XVII ist in dem Dreyecke DCF

$$\frac{CD}{CF} = \tan F = \frac{a \sin \varphi}{b - a \cos \varphi}$$

und folglich

$$\cot F = \frac{1}{\tan F} = \frac{b - a \cos \varphi}{a \sin \varphi} = \frac{b}{a \sin \varphi}$$
$$- \cot \varphi$$

wel-

welche Formel dienet, aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreyecks, oder aus den gegebenen a, b, φ, sogleich den Winkel F zu finden, der der Seite a gegenüber stehet.

Hier kann man nun den Quotienten $\frac{b}{a \sin\varphi}$ durch Logarithmen berechnen; cot φ hat man aber sogleich aus den Tafeln; Nur muß man von der zugehörigen Zahl, 7 Decimalstellen abschneiden, damit man, wie hier erfordert wird, cot φ für den Sinus totus = 1 bekomme (I).

Ex. Es sey $a = 100$; $b = 120$; $\varphi = 30°$ so ist

$$\log b = 2,0791812$$

$$\text{abgezogen } \log a + \log \sin\varphi = 1,6989700$$

$$\text{läßt } \log \frac{b}{a \sin\varphi} = 0,3802112$$

$$\text{Mithin } \frac{b}{a \sin\varphi} = 2,4000000$$

$$\text{abgezogen } \cot\varphi = 1,7320508$$

$$\text{giebt } \cot F = 0,6679492$$

$$\text{und } F = 56° \; 15' +$$

XXII. Es ist zu bemerken, daß wenn $\varphi > 90°$ ist, sowohl tang φ als auch cot φ negativ werden.

Es

Es sey $\varphi = 90° + \alpha$ also um α größer als $90°$ so ist $\cot\varphi = \cot(90° + \alpha) = \frac{1}{\text{tang}(90° + \alpha)} =$

$$-\frac{1}{\text{tang}(90° - \alpha)} = -\frac{1}{\cot\alpha} = -\text{tang}\,\alpha.$$

Und alsdann in XXI

$$\cot F = \frac{b}{a \sin(90° + \alpha)} + \text{tang}\,\alpha$$

oder wegen $\sin(90° + \alpha) = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

$$\cot F = \frac{b}{a \cos\alpha} + \text{tang}\,\alpha$$

XXIII. Wenn fig. XXIII von der Spitze eines Dreyecks auf die Grundlinie AF eine Perpendiculärlinie DC herabgefället wird, so ist $DC^2 = AD^2 - AC^2$

Und eben so $DC^2 = DF^2 - CF^2 = DF^2 - (AF - AC)^2$

Mithin

$$AD^2 - AC^2 = DF^2 - (AF - AC)^2$$

oder

$$AD^2 - AC^2 = DF^2 - AF^2 + 2AF.AC - AC^2$$

oder weil sich AC^2 auf beyden Seiten aufhebt, $AD^2 = DF^2 - AF^2 + 2\,AF.AC$

also

$$\text{also } AC = \frac{AD^2 + AF^2 - DF^2}{2\,AF}$$

Diese Formel bestimmt aus den 3 Seiten AD, AF, DF eines Dreyecks, das Stück AC der Grundlinie AF, welches von einer Perpendiculärlinie DC, auf AF abgeschnitten wird.

Eben so wird das andere Stück CF = AF — AC

oder

$$CF = \frac{AF^2 + FD^2 - AD^2}{2\,AF}$$

Anwendungen dieser Formel werden sich in der Folge bey verschiedenen geometrischen Aufgaben zeigen.

XXIV. Die bisherigen Sätze habe ich kürzlich hier zum voraus schicken müssen, um mich in den folgenden Theilen dieser practischen Geometrie darauf beziehen zu können. Ich hielt es für nützlich, sie hier beysammen zu haben, weil ich sonst durch häufige Lehnsätze den ordentlichen Vortrag der practischen Lehren zu oft hätte unterbrechen müssen.

Statt der gewöhnlichen Lehrsätze aus der gemeinen Geometrie, die man oft den practischen Anleitungen zur Feldmeßkunst, voraus zu schicken pflegt,

pflegt, hielt ich das bisherige für fruchtbarer und nützlicher. Und was die gemeine Geometrie anbelangt, die muß ich bey meinen Lesern völlig zum voraus setzen.

Wer von der Elementargeometrie weiter nichts weiß, als die wenigen Lehrsätze, die man gewöhnlich ohne Beweis den Anleitungen zur practischen Geometrie vorauszuschicken pflegt, der wird nie im Feldmessen eine nur mittelmäßige Kenntniß erlangen; eben so müssen einem Geometer auch die wichtigsten Sätze der Arithmetik, z. E. von Decimalbrüchen, Logarithmen u. s. w. zureichend bekannt und geläufig seyn.

Anmerk. Wenn ich mich in der Folge auf die bisher beygebrachten trigonometrischen Sätze berufe, so wird dieses unter folgender Bezeichnung Trig. S. geschehen.

Die