



Johannes Pusch

**Entwicklung einer analytischen
Berechnungsvorschrift unter Berücksichtigung von
Seildehnung und Durchhang der inversen Kinematik
am Beispiel Seilroboter**

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Ingenieur
Masterstudium Maschinenbau

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Dipl.-Ing. BSc Michael Schedler
Assoc.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Christian Landschützer

Institut für Technische Logistik

Graz, April 2019

Eidstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Das TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Graz, am 6. Mai 2019

.....
Johannes Pusch

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mir während meines Studiums und insbesondere beim Verfassen dieser Arbeit zur Seite gestanden sind. Mein besonderer Dank gilt dabei meinem Betreuer Michael Schedler, welcher mich für dieses Thema begeistert und mit wertvollen Hinweisen zum richtigen Zeitpunkt auf neue Ideen und Lösungsansätze gebracht hat. Ebenso möchte ich mich bei Prof. Christian Landschützer für seine Betreuung und Unterstützung bedanken, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Für den reibungslosen Ablauf des Studiums und die unzähligen Lerneinheiten zu jeder Tageszeit möchte ich mich außerdem bei Stefan Roth bedanken, ohne unserer hervorragenden Zusammenarbeit könnte ich jetzt nicht so zufrieden auf das Studium zurückblicken.

Der größte Dank gebührt meinen Eltern Elfriede und Erwin für die bedingungslose mentale und finanzielle Unterstützung während der Zeit meines Studiums, sowie meinen Brüdern Benedikt, Dominik und Manuel, die mich immer in allen Entscheidungen unterstützt haben. Bei meiner Freundin Johanna und meinem Mitbewohner Matthias möchte ich mich für die unzähligen aufbauenden Gespräche und unterstützenden Gesten bedanken.

Nicht zuletzt möchte ich auch meiner Oma für ihre stets ermutigenden Worte und ihren uneingeschränkten Glauben an mich danken.

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine analytische Berechnungsvorschrift für die inverse Kinematik eines zweidimensionalen Seilroboters entwickelt und mit Hilfe von verschiedenen Simulationsmodellen verifiziert.

Anfangs wird nur die Seildehnung berücksichtigt und die Positionsabweichung auf Basis der Elastizität von Seilen rechnerisch ermittelt. Um den Seilroboter genauer positionieren zu können, muss auch der Einfluss des Seildurchhangs berücksichtigt werden. Außerdem muss der für die Berechnungsvorschrift gültige Arbeitsraum eingeschränkt werden, um die gewünschte Genauigkeit zu gewährleisten.

Das Ziel der Arbeit wird durch die Entwicklung einer lastabhängigen, direkt analytischen Berechnungsvorschrift für die inverse Kinematik des Seilroboters erreicht.

Zur Verifizierung wird der Seilroboter mit Simscape Multibody und SimulationX modelliert. Dabei stimmen die Resultate der Simulationen mit den Ergebnissen der Berechnungsvorschrift überein und untermauern die Relevanz dieser Arbeit.

Abschließend wird im SimulationX-Modell eine Kraftmessung implementiert, die dem Seilroboter das Halten einer gewünschten Position, trotz Veränderungen der Last, ermöglicht.

Summary

This thesis develops an analytic calculation method for the inverse kinematics of a two dimensional cable driven parallel robot and verifies it with different simulation models.

At first, the position deviation is calculated geometrically by considering the elongation of the ropes. For a better position accuracy, the influence of the sagging effect has to be considered as well. Furthermore, the working space has to be reduced to guarantee the accuracy of the calculation method.

The aim of the thesis is achieved by developing a load dependend, direct analytic calculation method for the inverse kinematics of the cable driven parallel robot.

In order to verify the proposed method, Simscape Multibody and SimulationX are used to create a model of the cable driven parallel robot. The outcome of both simulations meet the calculated results and back up the relevance of this thesis.

Finally, a force sensor gets implemented in the SimulationX model. By measuring the force of the cables it helps the robot to hold a desired position, even if the load varies.

Nomenklatur

In dieser Nomenklatur sind zur Wahrung der Übersicht nur die wichtigsten Formelzeichen, welche an unterschiedlichen Stellen der Arbeit auftauchen, aufgelistet.

d	mm	Nenndurchmesser der Stahlseile
F_{zul}	kN	Maximal zulässige Zugkraft im Stahlseil
A	mm^2	Metallische Nenn-Querschnitt der Stahlseile
EA	MN	Steifigkeit der Stahlseile
ρ	kg/m	Auf die Länge bezogene Masse der Stahlseile
m	kg	Masse der Manipulatorplattform mit Last
S	-	Sicherheit des Seiles gegen Bruch
$l_{1,2}$	m	Länge der Seile
y_p, z_p	m	y- beziehungsweise z-Koordinate der Manipulatorplattform
F	N	Gewichtskraft der Manipulatorplattform mit Last
$\alpha_{1,2}$	rad	Kraftangriffswinkel der Seile an der Plattform
$Fs_{1,2}$	N	Seilkräfte an der Plattform
$Fg_{1,2}$	N	Gemittelter Eigengewichtsanteil der Seile
$Fges_{1,2}$	N	Gemittelte Seilkraft über das gesamte Seil
$l_{1,2abgewickelt}$	m	Tatsächliche, ungedehnte, abgewickelte Seillängen
$l_{1,2real}$	m	Länge des gedehnten und durchhängenden Seiles
$Fy_{1,2}$	N	y-Komponente der Seilkräfte
$Fz_{1,2}$	N	z-Komponente der Seilkräfte
ρ_q	N/m	Längenbezogene Gewichtskraft der Seile
$z_{1,2}$	m	Funktion des z-Verlaufs der Seilkurve
$y_{links,rechts}$	m	Linke, rechte Arbeitsraumgrenze
$kf_{1,2}$	-	Korrekturfaktoren für die Kraftangriffswinkel
lg	m	Länge des Seiles für die klassische Funktion der Seilkurve
w	m	Abstand zwischen den Seilaufhängungen
a	m	Krümmungsradius für die Funktion der Seilkurve
y_{pr}	m	Berechnete y-Koordinate der Endposition
z_{pr}	m	Berechnete z-Koordinate der Endposition
y_{ps}	m	Simulierte y-Koordinate der Endposition
z_{ps}	m	Simulierte z-Koordinate der Endposition
ΔPos	mm	Positionsabweichung der Endposition zur Ausgangsposition
$\sigma_{y,z}$	mm	Standardabweichungen der berechneten oder simulierten Endpositionen

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Definition eines Seilroboters	1
1.2	Motivation	2
1.3	Stand der Technik und Literaturübersicht	2
1.4	Anwendungen	4
1.5	Problemstellung und Zielsetzung	4
1.6	Festlegung der technischen Ausgangsparameter	6
1.7	Seilauswahl	7
1.8	Definition der inversen Kinematik	7
2	Berechnung der Seildehnung	9
2.1	Inverse Kinematik (Analytische Methode)	9
2.2	Vorwärtskinematik (Iterative Methode)	11
2.3	Parametervariation	14
2.3.1	Laständerung	14
2.3.2	Höhenänderung	15
2.3.3	Darstellung des Kraftverlaufs	17
3	Berechnung der Seildehnung unter Berücksichtigung des Seildurch-	
	hangs	20
3.1	Seilstatik	20
3.1.1	Linkes Seil (Seil 1)	21
3.1.2	Rechtes Seil (Seil 2)	24
3.2	Iterative Berechnung der Seilkurven	26
3.3	Arbeitsraumeinschränkung	28
3.4	Korrekturfaktoren	31
3.4.1	Analytische Berechnung der Seilkurven	33
3.4.2	Arbeitsraumgrenzen in Abhängigkeit der Korrekturfaktoren	35
3.5	Lastabhängigkeit der Korrekturfaktoren respektive der Arbeitsraum-	
	grenzen	36
3.6	Erstellen einer analytischen Berechnungsvorschrift der inversen Kine-	
	matik	38
4	Simulation mit Simscape Multibody	40
4.1	Modellaufbau und Koeffizientenermittlung	40
4.1.1	Diskretisierung der Seile	41
4.1.2	Ideale Seilkurve	42

4.2	Simulationsergebnisse und Vergleich mit der Berechnung	43
4.2.1	Versuchsanordnung für die Verifizierung der Berechnungsvorschrift	43
4.2.2	Simulation mit Seildehnung ohne Durchhang	47
4.2.3	Simulation mit Seildehnung und Durchhang	50
5	Simulation mit SimulationX	54
5.1	Programmbeschreibung	54
5.2	Modellaufbau	54
5.3	Steuerung des SimX-Modells	55
5.3.1	Aufbau der Steuerung	56
5.3.2	Ergebnisse der Simulation und Verifizierung der analytischen Berechnungsvorschrift	57
5.4	Regelung des SimX-Modells unter Berücksichtigung veränderlicher Massen	59
5.4.1	Kraftmessung	60
5.4.2	Aufbau der Regelung	60
5.4.3	Ergebnisse der Simulation mit Kraftmessung	63
5.5	Vergleich zu Simscape Multibody	65
6	Zusammenfassung und Diskussion	69
6.1	Diskussion der Ergebnisse	69
6.1.1	Schaubeispiel der Simulation anhand zweier Positionen	74
6.2	Conclusio	76
6.3	Ausblick	77
	Abbildungsverzeichnis	78
	Tabellenverzeichnis	80
	Literaturverzeichnis	81
	Anhang	82
A	Herleitung der Seilstatik	82
A.1	Linkes Seil (Seil 1)	82
A.2	Rechtes Seil (Seil 2)	86

1 Einleitung

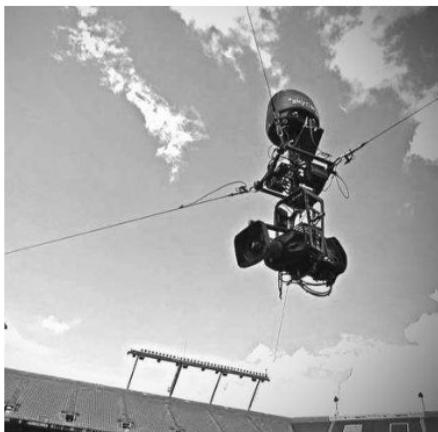
1.1 Definition eines Seilroboters

Als Seilroboter werden prinzipiell parallele Manipulatoren bezeichnet, die zur Positionierung statt starren Stäben oder Hydraulikzylindern flexible Seile verwenden. Auf der Plattform des Seilroboters befindet sich dann das Werkzeug zur Handhabung der Produkte [BP13].

Die Positionierung des Manipulators erfolgt dabei durch die Längenänderung der gespannten Seile, welche wiederum durch Winden am anderen Ende der Seile gesteuert wird.

Als vereinfachtes Beispiel für die in dieser Arbeit behandelten Arten der Seilroboter gilt eine gängige Kameraaufhängung in Stadien. Diese sogenannte Skycam (Abbildung 1.1a) schwebt an Seilen hängend über dem Stadion und kann flexibel durch den Raum bewegt werden.

Zwar spielt die Positionsgenauigkeit bei einer Skycam kaum eine Rolle, im Fall der Linsen-Positionierung für das Radioteleskop (siehe Abbildung 1.1b) muss jedoch absolute Genauigkeit gewährleistet sein.



(a) Skycam ¹



(b) FAST [Nan06]

Abbildung 1.1: Beispiele der Anwendung von Seilrobotern [Yua15]

Das FAST (Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope) ist ein neuwertiges Radioteleskop in China mit einem rund 520m großen Hauptspiegel, über diesen Spiegel wird eine Fokuskabine per Seilrobotik positioniert und in Waage gehalten, dafür werden 6 Seile zu den um den Spiegel angeordneten Masten gespannt.

¹Produkt der Firma Skycam: <http://www.skycam.tv/>

Eine ähnliche Anwendung und die Abschätzung der Positionsabweichung wird in den folgenden Kapiteln genauer behandelt.

1.2 Motivation

Im Zuge der steigenden Automatisierung, werden immer mehr Systeme gesucht, die schnell, autonom und präzise Massen über große Distanzen bewegen können. Dabei wird die Flexibilität stetig wichtiger, der Roboter soll möglichst viele Punkte im Raum ohne Probleme oder Kollisionen schnell erreichen können [Bru10].

Außerdem spielt die Energieeffizienz eine rasant größer werdende Rolle. Einer der wichtigsten Faktoren dafür ist das Gewicht des zu bewegenden Manipulatorsystems, hier ist ein Seilroboter im Gegensatz zu herkömmlichen Bewegungsmitteln (Stapler, Hublader, Regalbediengerät, ...) klar im Vorteil. Bewegt werden ja nur die Seile und die Manipulatorplattform, das Antriebssystem (Seilwinden, Motoren,...) befindet sich an einer starren Position außerhalb des Arbeitsraums [Yua15].

Durch die geringeren, zu bewegenden Massen erhöht sich auch die mögliche Beschleunigung der Manipulatorplattform und in Folge dessen verkürzen sich die Spielzeiten für die individuellen Aufgaben der Seilroboter.

1.3 Stand der Technik und Literaturübersicht

Die konkreten Eigenschaften von Seilrobotern wurden von Han Yuan in seiner Dissertation "Static and dynamic Stiffness of Cable driven parallel robots" [Yua15] zusammengefasst. Die wichtigsten Vorteile im Gegensatz zu konventionellen Manipulatoren (Stapler, Hublader, Kran, Regalbediengerät,..) können wie folgt aufgelistet werden:

- + Weil Seile sehr flexibel sind und die Länge sehr einfach variierbar ist, ergibt sich der große Arbeitsraum zu einem eindeutigen Vorteil.
- + Seilroboter sind dynamischer, weil sie geringere Massen bewegen müssen.
- + Mit den geringeren, bewegten Massen steigt die Energieeffizienz.
- + Es entstehen geringere Kosten, weil das System mechanisch eine sehr einfache Struktur besitzt (Seile, Seilwinden und -rollen, relativ einfache Antriebe).
- + Die Sicherheit im Arbeitsraum steigt, weil nur die Manipulatorplattform aus starrem Material besteht, die Seile selber sind flexibel und verursachen bei Kollisionen nur minimale Schäden an Mensch und Umgebung.

Als weitere Basis dieser Arbeit dienen außerdem die Dissertationen von Tobias Bruckmann “Auslegung und Betrieb redundanter paralleler Seilroboter“ [Bru10] und die Dissertation von Wildan Lalo “Ein Beitrag zur Entwicklung von Assistenzsystemen für serielle und parallele Roboter am Beispiel von Autobetonpumpen und seilbasierten Regalbediengeräten“ [Lal13].

Sie beschreiben optimierte Ansätze für die Kraft- und Positionsregelung von eher komplexen Seilroboter-Systemen. Im Unterschied zu dieser Arbeit handelt es sich bei ihnen aber immer um verspannte Seilroboter. Bei diesen Konstruktionen ist die Manipulatorplattform nicht nur an Seilen aufgehängt welche an der oberen Arbeitsraumgrenze befestigt sind, sondern wird auch redundant nach unten gespannt. Das erhöht die Positioniergenauigkeit markant, steigert aber auch den Rechenaufwand sprunghaft (die Positionierung muss redundant, mit allen Seilen gleichzeitig, gesteuert werden), zusätzlich wird eine Kraftregelung erforderlich.

Außerdem werden meistens nur Seilroboter mit einem kleineren Arbeitsraum behandelt (Würfel von ungefähr 2 m Kantenlänge).

Waldo Lalo [Lal13] beziehungsweise das Verbundprojekt “Regalbediengerät auf Basis der STEWART-GOUGH-Plattform“ aus dem Spitzencluster *EffizienzCluster LogistikRuhr* beschreiben eine Seilroboteranwendung als Regalbediengerät für Regale von bis zu 30 m Länge und 10 m Höhe, das Projekt verspricht Leistungssteigerung in der Dynamik und Kosten- beziehungsweise Energieeinsparungen².



Abbildung 1.2: Regalbediengerät auf Basis der STEWART-GOUGH-Plattform

²http://www.oeffizienzcluster.de/files/1/36/371_stewart-gough-plattform_produk_tblatt.pdf

1.4 Anwendungen

In dieser Arbeit werden nur Systeme behandelt die, ähnlich wie die Skycam, in den Seilen hängen und nicht nach unten verspannt sind. Dadurch kann das Produkt am Boden gestapelt werden und es gibt keine Seile unter der Manipulatorplattform die daran streifen und zu Kollisionen führen können.

Dabei werden Arbeitsräume von bis zu 100 x 100 x 30 m betrachtet und die manipulierte Masse kann von 500 kg bis 2000 kg variieren (entspricht Seilkräften von maximal 163.9 kN). Im Gegensatz zu dem Projekt von Tobias Bruckmann [Bru10] “Auslegung und Betrieb redundanter paralleler Seilroboter“ ist der Arbeitsraum circa 50 mal und die maximale Seilkraft ungefähr 150 mal so groß. Auch das Verbundprojekt aus Abbildung 1.2 behandelt Regale mit einer Länge von bis zu 30 m und 100 kg manipulierter Masse.

Ein möglicher Anwendungsfall ist die Lagerung oder Trocknung von Schüttgut (beispielsweise Hackgut, Kompost, Sand,...) auf einer größeren Fläche. Dabei übernimmt der Seilroboter die Verteilung und Umschichtung des Schüttguts, als Manipulator wird eine Zange oder eine Kranschaufel verwendet.

Eine weitere Anwendung könnte die Handhabung von Containern über größere Distanzen sein. Je nach Anbringung der Seilrollen ist auch eine Entladung von Containerschiffen denkbar. Dabei werden die Container, ähnlich wie bei bestehenden Kransystemen, von oben mit einer speziellen Vorrichtung aufgegriffen und mit Hilfe der Seile durch den Raum bewegt. Hier spielt die Positionsgenauigkeit eine wichtigere Rolle, um eine Stapelung beziehungsweise eine Umlagerung der Container zu ermöglichen.

Der große Nachteil aller, nicht nach unten verspannten Systeme besteht in ihrer Beeinflussbarkeit von außen. Wind, Regen und andere äußere Einflüsse können die Positionsgenauigkeit gravierend beeinträchtigen und dürfen bei der Auslegung solcher Seilroboter nicht vernachlässigt werden.

1.5 Problemstellung und Zielsetzung

Die Positionsgenauigkeit bei verspannten Systemen ([Bru10] bzw. [Lal13]) hängt kaum von der Seildehnung ab, da alle Seile beinahe gleich stark vorgespannt sind. Vorgespannte Seile hängen praktisch nicht durch, wodurch die daraus resultierende Positionsabweichung vernachlässigt werden kann. Dieser Vorteil muss allerdings

durch eine komplexe Sensorik zur Kraftmessung und eine aufwändige Kraftregelung erkaufte werden.

Durch die fehlende Verspannung nach unten unterscheidet sich diese Arbeit markant von den bisher behandelten Projekten.

Für die Bestimmung der Position von hängenden Seilrobotern mit Seilen von mindestens 50 m Länge muss grundlegend anders vorgegangen werden.

Bei so langen Stahlseilen spielt das Eigengewicht eine nicht zu vernachlässigende Rolle, zusammen mit der manipulierten Masse von bis zu 2000 kg bewirkt das eine Seildehnung von bis zu 110 mm.

Bei hängenden Systemen muss auch der Seildurchhang berücksichtigt werden. Frei, zwischen zwei Masten hängende Seile beschreiben immer eine Cosinus-Hyperbolicus Kurve. Die Herleitung dieser Kurve für die tragenden Seile eines Seilroboters spielt eine markante Rolle in der Positionsgenauigkeit. Wird die Manipulatorplattform beispielsweise mit nur 500 kg belastet, kann die Position aufgrund des Seildurchhangs im Extremfall um bis zu 800 mm von der berechneten Position ohne Berücksichtigung des Seildurchhangs abweichen.

Als Ziel dieser Arbeit wird die Entwicklung einer analytischen Berechnungsvorschrift zum Ausgleich der Positionsabweichungen aufgrund der Dehnung und des Seildurchhangs definiert. Dabei soll der regelungstechnische Aufwand minimiert werden und maximal ein Sensor für die Seilkraftmessung zum Einsatz kommen.

Um die analytische Berechnungsvorschrift zu verifizieren, soll sie an einem Seilrobotermodell in verschiedenen Simulationsprogrammen getestet werden.

In Abbildung 1.3 wird der strukturelle Aufbau dieser Arbeit dargestellt.

Mit Simscape Multibody kann die Seildehnung gut simuliert und eine erste Verifizierung der Berechnungsvorschrift durchgeführt werden, für die endgültige Verifizierung wird SimulationX verwendet.

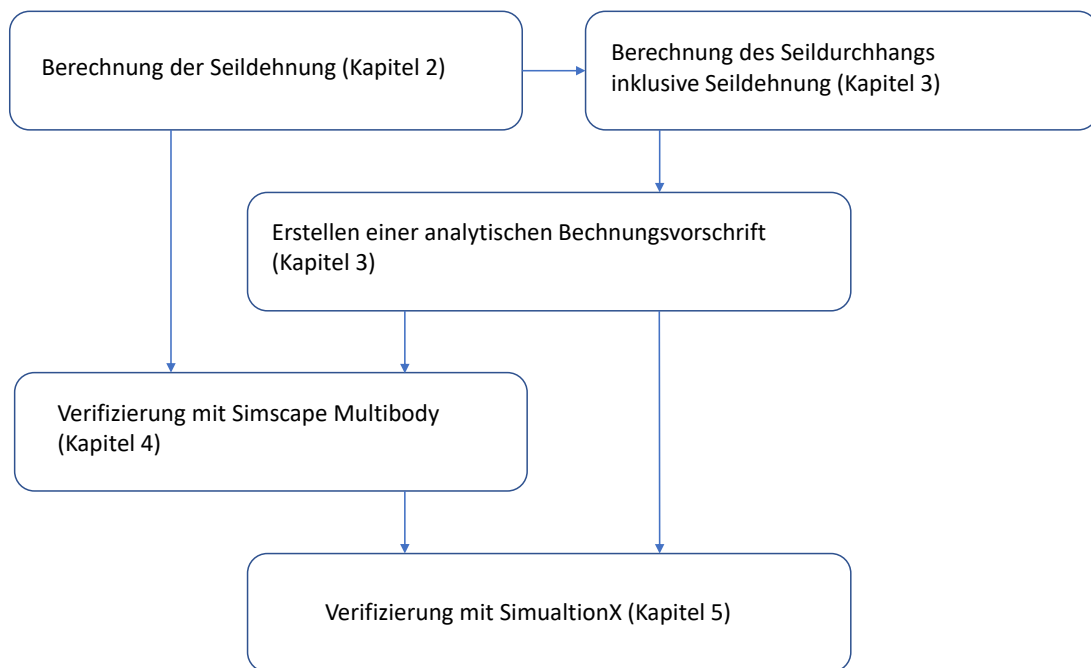


Abbildung 1.3: Struktureller Aufbau der Masterarbeit

1.6 Festlegung der technischen Ausgangsparameter

Zur Evaluierung der Problemstellung wird ein zweidimensionales Modell verwendet. Die Manipulatorplattform (vereinfacht dargestellt als Punktmasse) wird durch 2 Seile befestigt, welche an den oberen Ecken über Umlenkrollen zu den Seilwinden geführt und variabel abgewickelt werden.

Um einen Arbeitsraum von 100 x 30 m zu ermöglichen (siehe Abbildung 1.4), werden die Umlenkrollen 3 m höher angebracht (der tatsächlich verwendbare Arbeitsraum wird im Laufe der Berechnungen noch weiter eingeschränkt).

Für die Vereinfachung der Berechnung wird standardmäßig eine Last von $m = 1000kg$, beziehungsweise $F = m \cdot g$, vorausgesetzt, nur in extra deklarierten Fällen wird mit anderen Lasten gerechnet (siehe Kapitel 3.5).

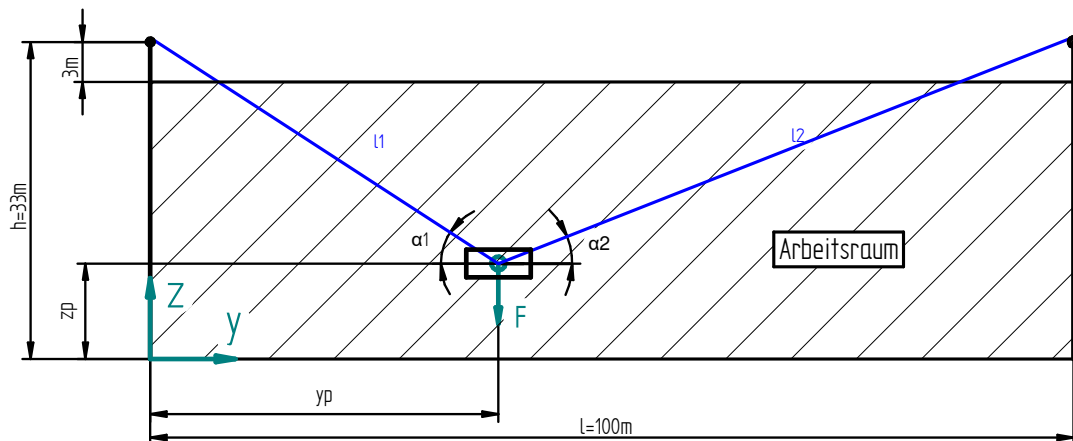


Abbildung 1.4: Arbeitsraum des 2D-Modells

1.7 Seilauswahl

Für die Berechnung und Simulation des Seilroboters wird ein offenes Spiralseil von der Firma Fatzer aus Deutschland gewählt, Tabelle 1.1 ist ein Auszug aus dem Produktblatt [Fat19]. Gewählt wird das Seil mit dem Nenndurchmesser = 30 mm, dabei ist die Grenzzugkraft das ausschlaggebende Argument (Sicherheit $S \geq 3$ und Last $m = 2000$ kg), die maximal auftretende Zugkraft im Seil wird in Kapitel 2.1 berechnet und beträgt $F_{max} = 163.9$ kN.

Tabelle 1.1: Seileigenschaften [Fat19]

Nenn- \varnothing d / mm	Grenzzugkraft F_{zul} / kN	Metall. Nenn-Querschnitt A / mm ²	Steifigkeit EA / MN	Gewicht ρ / kg/m
20	245	244	39	2
30	544	548	87.7	4.5
40	967	929	149	7.7

1.8 Definition der inversen Kinematik

Die inverse Kinematik ist ein Begriff aus der Robotik. Sie ermöglicht die Bestimmung aller nötigen Stellgrößen (Gelenkwinkel, Seillängen, Zylinderhub, ...) anhand der gewünschten Position des Endeffektors. Bei Seilrobotern ist der Endeffektor auf der Manipulatorplattform befestigt.

Im Allgemeinen wird eine Transformationsmatrix vom Basis-Koordinatensystem zum Endeffektor-Koordinatensystem erstellt und im Anschluss invertiert [Haa17].

Essentiell ist die inverse Kinematik für die Berechnung der Beschleunigung der einzelnen Gelenke zur Ermöglichung einer geregelten Bewegung entlang einer vorgegebenen Bahn.

Im Falle des behandelten Seilroboters werden die gewünschten Positionen durch Änderung der Seillängen erreicht.

Die inverse Kinematik beschreibt daher eine analytische Berechnungsvorschrift die als Ergebnis die abgewickelten Seillängen in Abhängigkeit der Manipulatorposition liefert.

2 Berechnung der Seildehnung

Bei Kraftbelastung erfährt jeder Werkstoff eine Formänderung, so dehnen sich auch Seile, wenn sie auf Zug beansprucht werden. Für die Berechnung der Position muss der gegenseitige Einfluss der beiden Seilkräfte aufeinander genauer betrachtet werden.

2.1 Inverse Kinematik (Analytische Methode)

Bei bekannter, ruhender Position des Manipulators (Masse muss gegeben sein) können die beiden erforderlichen Seillängen direkt analytisch berechnet werden.

Nachdem die Position und somit auch die beiden Winkel α_1 und α_2 (Gleichung 2.1) berechnet wurden, kann die Gewichtskraft des Manipulators auf die beiden Seile aufgeteilt werden (siehe Abbildung 2.1). In Gleichung 2.2 wird die Kraft im linken Seil ermittelt.

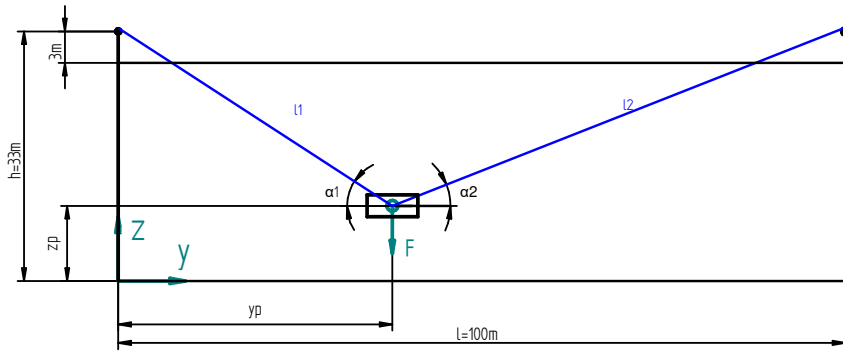


Abbildung 2.1: Kraftaufteilung auf beide Seile

Um die gesamte Seilbelastung (Gleichung 2.4) zu berechnen muss noch das anteilmäßige Eigengewicht (Gleichung 2.3) des Seiles addiert werden. Die y-Abhängigkeit der Eigengewichtskraft fällt aufgrund des Winkels und der einhergehenden Seillänge weg, somit bleibt der Eigengewichtsanteil bei gleichbleibender Höhe z über den gesamten Arbeitsraum konstant.

Seil 2 verhält sich analog.

$$\alpha_1 = \text{atan}\left(\frac{h - zp}{yp}\right) \quad \alpha_2 = \text{atan}\left(\frac{h - zp}{l - yp}\right) \quad (2.1)$$

$$Fs1 = \frac{F}{\sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1) \cdot \tan(\alpha_2)} \quad (2.2)$$

$$Fg1 = \frac{\rho \cdot g \cdot (h - zp)}{2} \quad (2.3)$$

$$F_{ges1} = F_{s1} + F_{g1} \quad (2.4)$$

Mit der berechneten Gesamtbelastung und dem hookeschen Gesetz kann die aktuelle Dehnung der Seile berechnet werden (Gleichung 2.5), daraus ergibt sich die erforderliche, abgewickelte Seillänge für eine bestimmte Position der Manipulatorplattform (Gleichung 2.7).

$$\Delta l_1 = \frac{F_{ges1}}{EA} \cdot l_{1abgewickelt} \quad (2.5)$$

$$l_{1real} = l_{1abgewickelt} + \Delta l_1 \quad (2.6)$$

$$l_{1abgewickelt} = \frac{l_{1real}}{1 + \frac{F_{ges1}}{EA}} \quad (2.7)$$

Bei gegebener Last $m = 1000 \text{ kg}$ und dem erwünschten Arbeitsraum lassen sich die Kraftverläufe über y beziehungsweise z darstellen. Damit können die maximale Längenänderung pro Seil und die maximale Positionsänderung im Arbeitsraum berechnet werden.

In Abbildung 2.2 wird die Seilkraft $1 \triangleq F_{ges1z}$ bei verschiedenen Höhen über die Länge des Arbeitsraum dargestellt, daneben sieht man den Verlauf der Seilkraft $1 \triangleq F_{ges1zy}$, bei verschiedenen y -Positionen über die Höhe des Arbeitsraumes. Abbildung 2.3 zeigt die gleichen Verläufe für die Seilkraft $2 \triangleq F_{ges2z}$ sowie F_{ges2y} , damit wird die Antisymmetrie der beiden Seilkräfte bestätigt. Die Zone der Maximalbelastung liegt klar erkenntlich bei hohen z -Werten und mittleren y -Werten.

Am meisten gedehnt werden die Seile leicht außerhalb der Mitte (siehe Abbildung 2.4a), summiert man beide Seile ergibt sich die die maximale Positionsabweichung bei $z_p = 30 \text{ m}$, $y_p = 50 \text{ m}$ und beträgt $\Delta Pos = 922.9 \text{ mm}$ (gelber Bereich in Abbildung 2.4b). An dieser Position ergibt sich auch die maximale Seilkraft von 82 kN (für Lasten von $m = 2000 \text{ kg}$ ergibt sich die maximale Seilkraft zu $F_{max} = 163.9 \text{ kN}$).

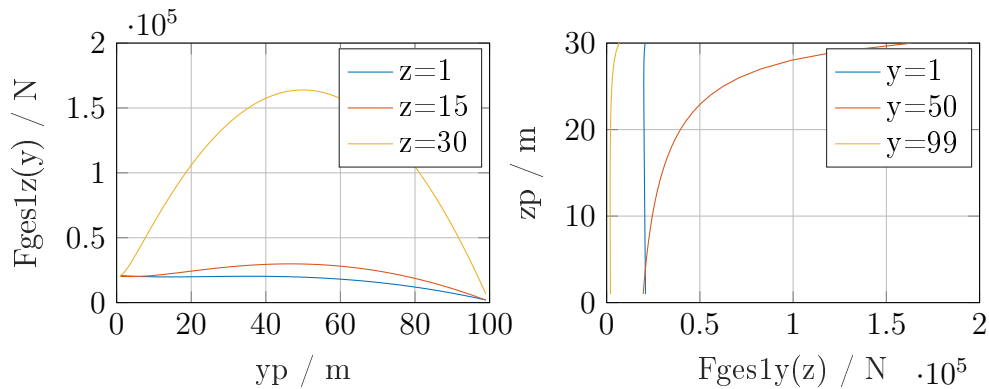


Abbildung 2.2: Verlauf der Seilkraft 1 über y beziehungsweise z (Inverse Kinematik)

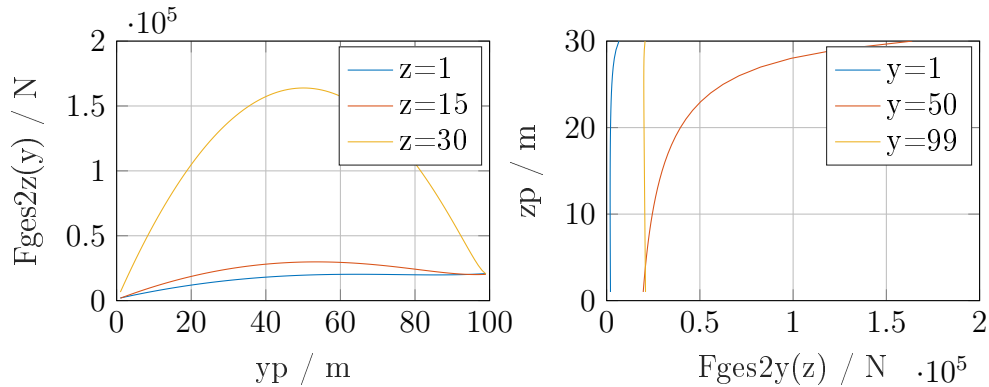


Abbildung 2.3: Verlauf der Seilkraft 2 über y beziehungsweise z (Inverse Kinematik)

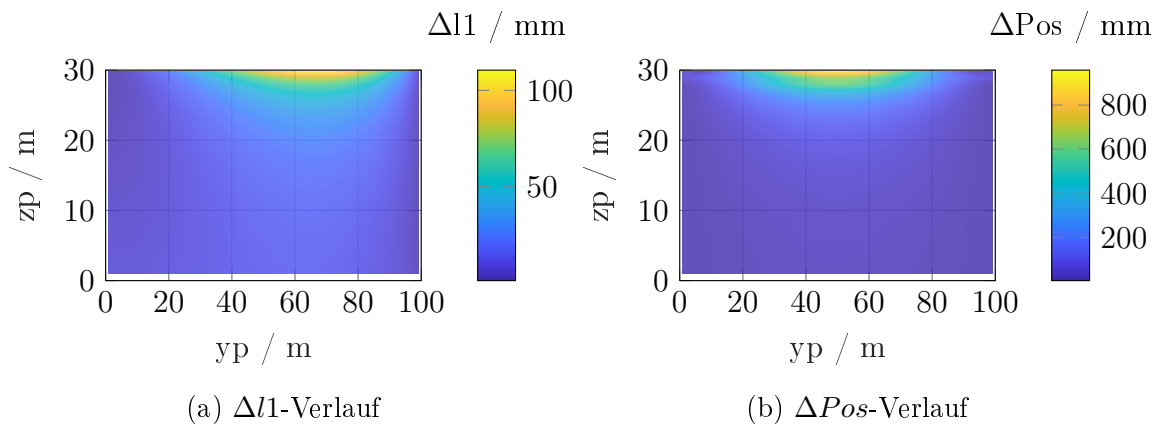


Abbildung 2.4: Positionsabweichung durch Seildehnung über den Arbeitsraum

2.2 Vorwärtskinematik (Iterative Methode)

Für die reelle Anwendung (Laständerung durch Be- und Entladung) wird bei dieser Berechnungsmethode zuerst durch Abwicklung der Seile eine Position angefahren, wobei die Seildehnung anfangs vernachlässigt wird, vor Ort wird die Last verändert, die Seile dehnen sich und die Position muss neu berechnet werden.

Durch die Seildehnung ändern sich auch die Befestigungswinkel an der Manipulatorplattform und somit die Kraftaufteilung. Dadurch lässt sich die Positionsänderung nicht mehr analytisch berechnen, sondern muss schrittweise iterativ angenähert werden. Je mehr sich die Seile dehnen, desto steiler werden die Kraftangriffswinkel, desto kleiner werden die Seilkräfte und die Dehnung der Seile geht zurück.

Für die erste Iteration werden die Kraftangriffswinkel aus den geometrischen Dreiecken mit ungedehnten Seilen berechnet. Mit Hilfe der Winkel kann die Gewichtskraft des Manipulators auf die Seile aufgeteilt werden (ähnlich wie in Kapitel 2.1). Die Dehnung der Seile wird dann in Abhängigkeit der Kräfte ermittelt, daraus ergeben

sich neue Seillängen. Diese formen wieder geometrische Dreiecke woraus sich neue Kraftangriffswinkel der Seile für die nächste Iteration ergeben.

Ab der 20. Iteration ändern sich die Seilkräfte von einem Berechnungsdurchgang zum nächsten um $F_{21} - F_{20} < 0.1 \text{ mN}$. Für auftretenden Kräften im kN-Bereich sind Abweichungen dieser Größenordnung vernachlässigbar gering und die Iteration kann beendet werden.

In Abbildung 2.5 ist beispielhaft eine Positionsänderung der Ausgangsposition $yp_0=30 \text{ m}$ zur Endposition $zp_0=25 \text{ m}$ dargestellt.

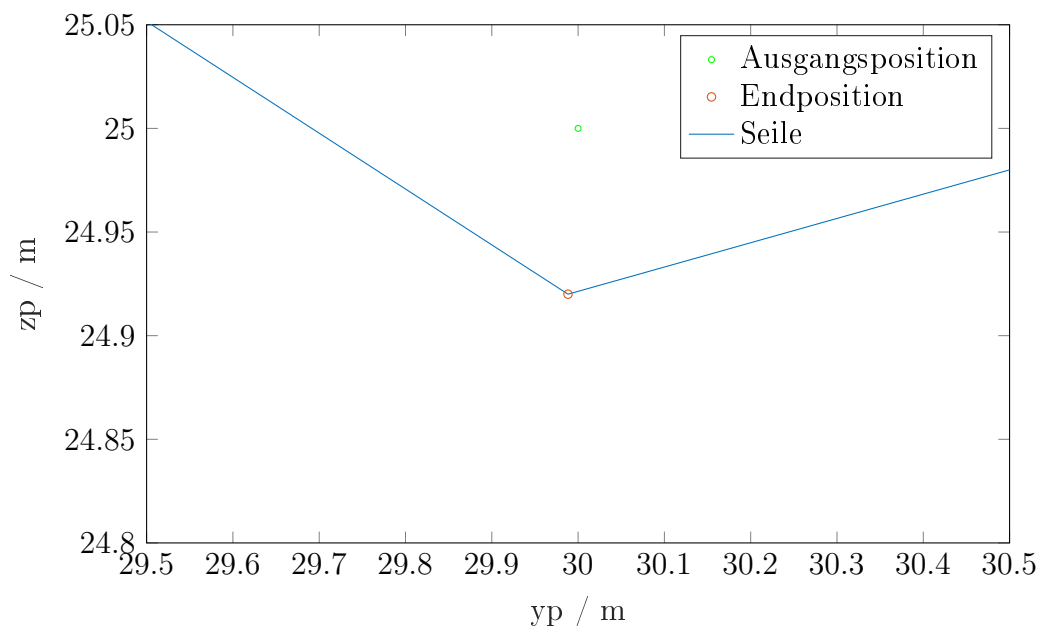


Abbildung 2.5: Positionsabweichung durch Seildehnung (Vorwärtskinematik)

Verwendet man als Ausgangsposition $yp_0=50 \text{ m}$ und $zp_0=30.923 \text{ m}$ (laut der inversen Berechnung aus Kapitel 2.1 führt diese Ausgangsposition zu einer Endposition von $yp = 50 \text{ m}$ und $zp = 30 \text{ m}$) ergibt sich durch die Vorwärtskinematik eine Endposition von $yp = 50 \text{ m}$ und $zp = 30.0005 \text{ m}$, das bedeutet Inverse und Vorwärts-Kinematik liefern übereinstimmende Werte. Auch die maximale Seilkraft von 82 kN ergibt sich bei beiden Berechnungsmethoden.

Für die Berechnung über den gesamten Arbeitsraum werden der Einfachheit halber ganzzahlige Werte für die Ausgangspositionen verwendet (Bei der Inversen Kinematik wurden ganzzahlige Werte für die Endpositionen verwendet). Dadurch stimmen die Ergebnisse nicht mehr exakt mit denen der Inversen Kinematik überein. Die Kraftverläufe (siehe Abbildung 2.6 2.7) und der Verlauf der Positionsabweichungen über den gesamten Arbeitsraum (siehe Abbildung 2.8) liefern aber qualitativ ver-

gleichbare Bilder wie Abbildung 2.2, 2.3 und 2.4b. Die maximale Seilkraft bei einer Ausgangsposition von $yp = 50$ m und $zp = 30$ m ergibt sich dann zu 68.49 kN.

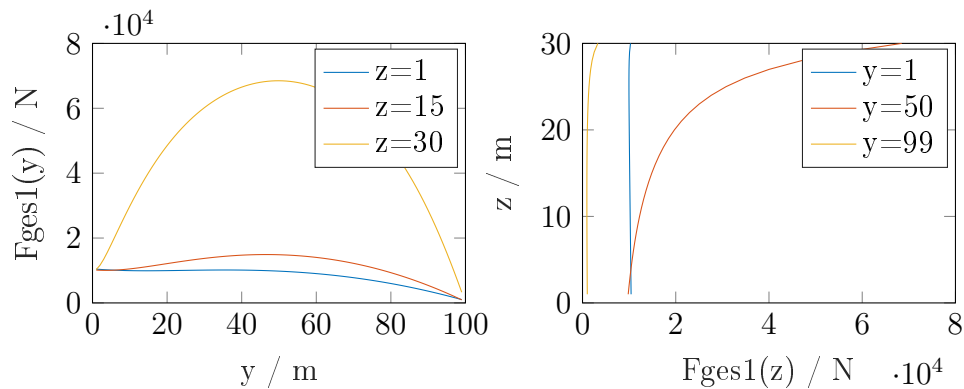


Abbildung 2.6: Verlauf der Seilkraft 1 über y beziehungsweise z (Vorwärtskinematik)

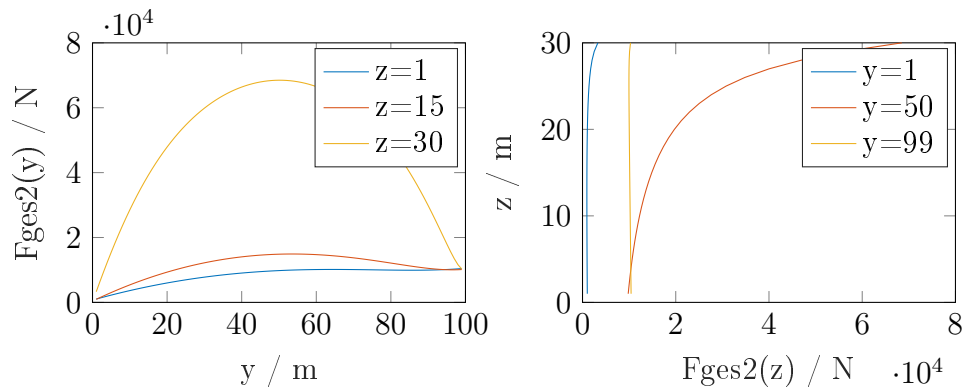


Abbildung 2.7: Verlauf der Seilkraft 2 über y beziehungsweise z (Vorwärtskinematik)

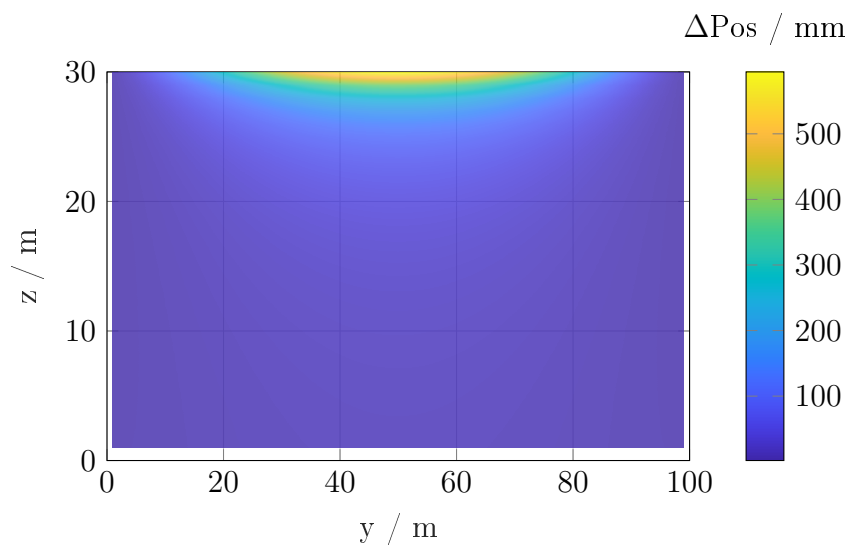


Abbildung 2.8: Positionsabweichung aufgrund der Seildehnung (Vorwärtskinematik)

2.3 Parametervariation

2.3.1 Laständerung

Zur Analyse der Kraftverläufe und der Positionsabweichung über den gesamten Arbeitsraum wird die Berechnung bei verschiedenen Lasten durchgeführt. Aus Abbildung 2.8 wissen wir, dass die Positionsabweichung bei $z \geq 25$ m sehr schnell steigt und die Positionen bei $z = 30$ m im Realfall zu vermeiden sind.

Um relevante Ergebnisse visualisieren zu können, wird die Versuchsreihe mit Laständerung bei konstanter Höhe $z_0 = 25$ m durchgeführt.

In Abbildung 2.9 und 2.10 kann der direkt proportionale Zusammenhang zur Last gut erkannt werden (Doppelte Last entspricht in etwa doppelter Seilkraft beziehungsweise doppelter Positionsabweichung).

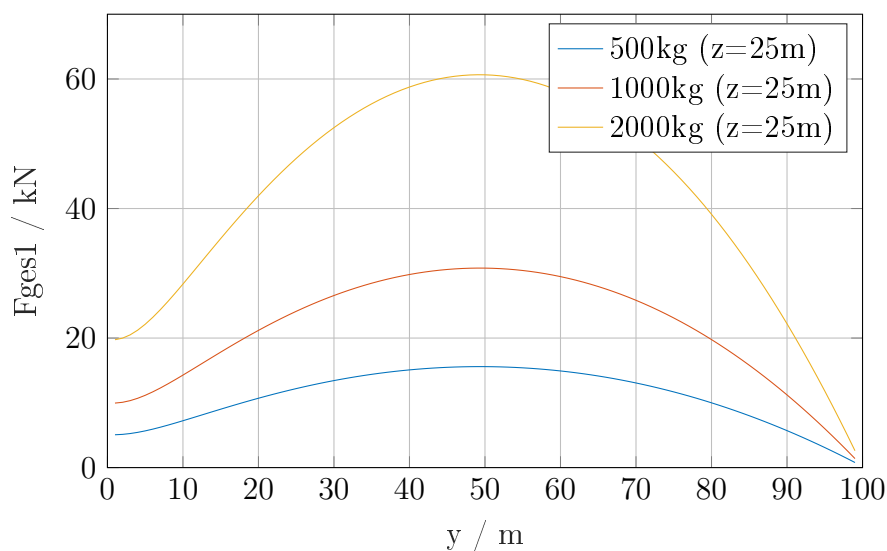


Abbildung 2.9: Verlauf der Gesamtkraft im Seil 1

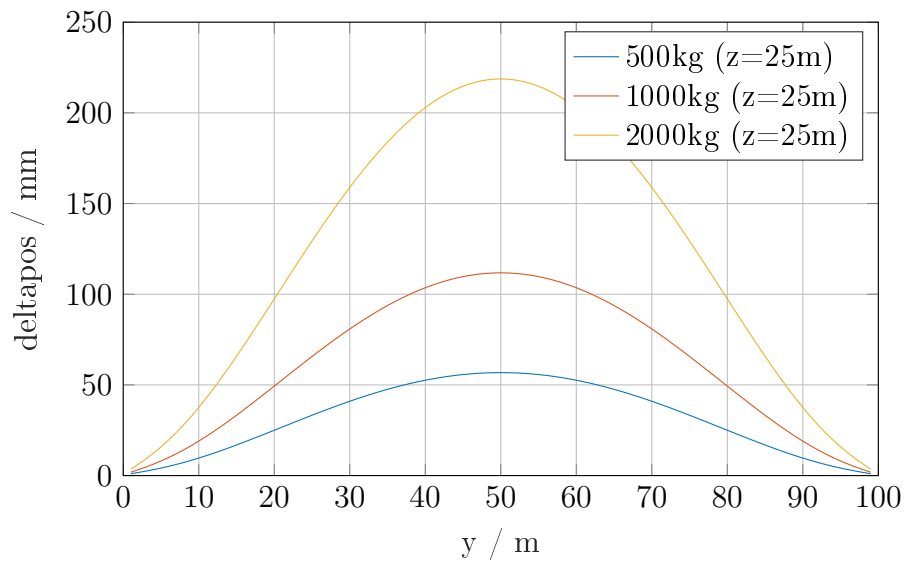


Abbildung 2.10: Verlauf der Positionsabweichung

Die Auflistung der Maximas in Tabelle 2.1 bestätigt den Zusammenhang.

Tabelle 2.1: Maximas zu den Abbildungen 2.9 und 2.10 von Seilkraft 1 und Positionsabweichung bei verschiedenen Lasten und konstanter Höhe $z=25\text{ m}$

Last	500 kg	1000 kg	2000 kg
F_{ges1}	36.93 kN	68.49 kN	122.9 kN
ΔP_{os}	111.79 mm	218.71 mm	56.78 mm

2.3.2 Höhenänderung

Der Zusammenhang zwischen den Kraftverläufen und der Höhe ist nicht so klar ersichtlich, die unproportional große Steigerung der Kraft von $z=25\text{ m}$ zu $z=30\text{ m}$ wird in den Abbildungen 2.11 und 2.12 deutlich erkennbar.

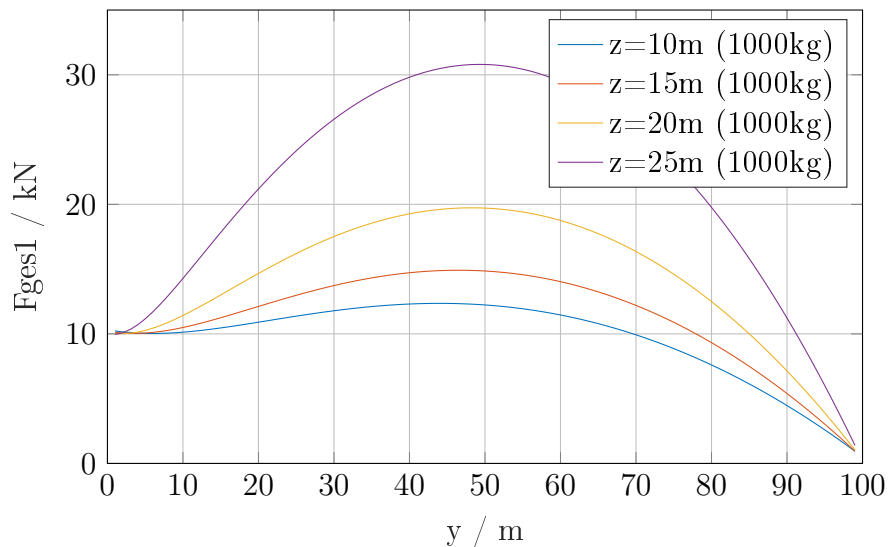


Abbildung 2.11: Verlauf der Gesamtkraft im Seil 1 bei verschiedenen Höhen und konstanter Last $m=1000$ kg

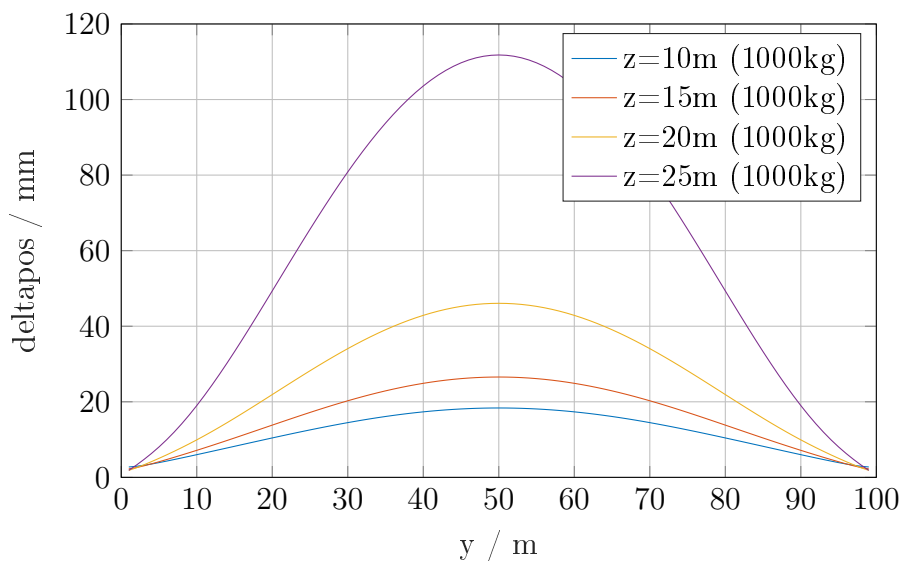


Abbildung 2.12: Verlauf der Positionsabweichung bei verschiedenen Höhen und konstanter Last $m=1000$ kg

Auch die Maximias in Tabelle 2.2 liefern keine klaren mathematischen Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Höhen und der Seilkraft 1 oder der Positionsabweichung.

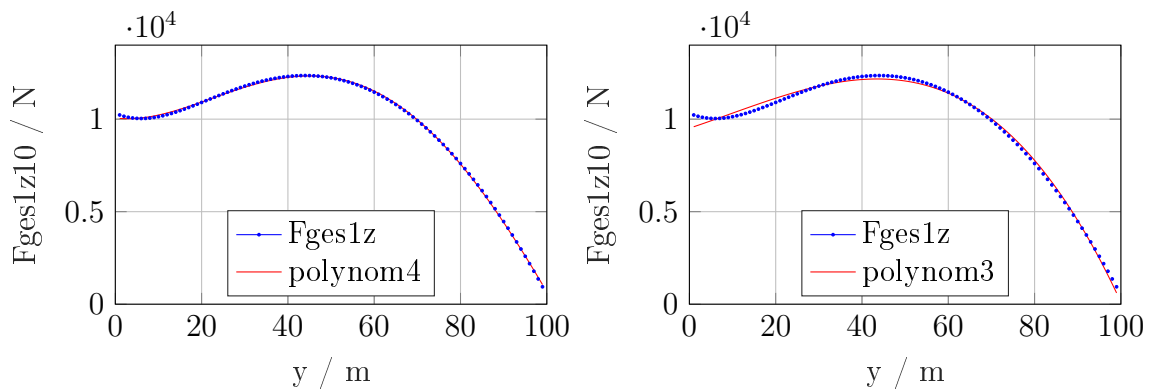
Tabelle 2.2: Maximas zu den Abbildungen 2.11 und 2.12 von Seilkraft 1 und Positionsabweichung bei verschiedenen Höhen und konstanter Last $m=1000$ kg

Höhe	10 m	15 m	20 m	25 m	30 m
Fges1	12.36 kN	14.91 kN	19.73 kN	30.8 kN	68.49 kN
ΔPos	18.37 mm	26.56 mm	46.07 mm	111.8 mm	594.46 mm

2.3.3 Darstellung des Kraftverlaufs

Die Dehnung der Seile hängt direkt von der Seilkraft ab. Um die Längenänderung berechenbar zu machen wird versucht mathematische Funktionen an den Kraftverlauf anzunähern. Dafür wird die Anwendung "Curve-Fitting" von Matlab verwendet.

Dabei lässt sich der Verlauf der Seilkraft mit einem Polynom 4.Grades beschreiben (Abbildung 2.13a) . Ein Polynom 3.Grades weicht in vielen Stellen markant vom Original ab (Abbildung 2.13b)



(a) Polynom 4.Grades

(b) Polynom 3.Grades

Abbildung 2.13: Kurvenanpassung durch Polynome: Fges1 bei $z=10$ m

Auch für andere Höhen eignet sich der Ansatz mit einem Polynom 4. Grades besser (Abbildung 2.14).

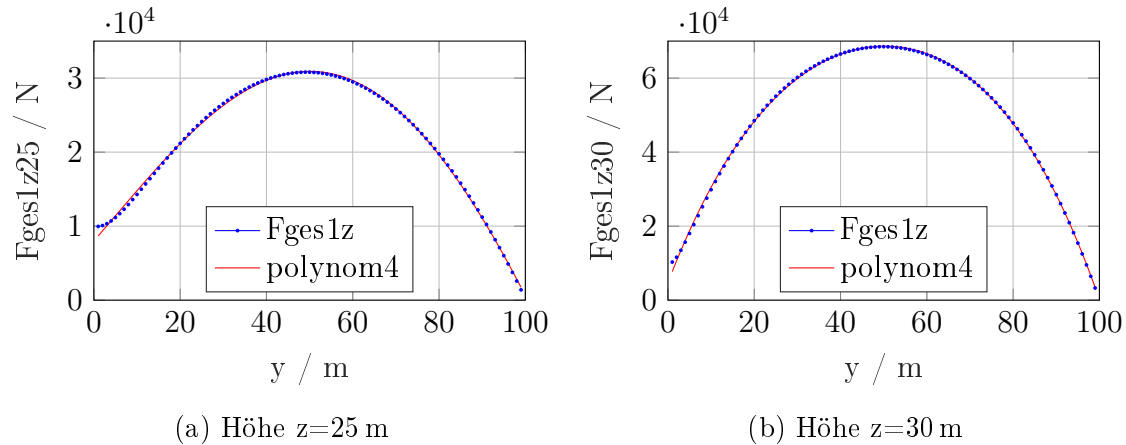


Abbildung 2.14: Interpolation durch Polynome 4.Grades: Fges1 bei z=25 m beziehungsweise z=30 m

Die mathematischen Darstellung der Polynome zeigt Formel 2.8:

$$F_{ges1}(y) = p_4 * y^4 + p_3 * y^3 + p_2 * y^2 + p_1 * y + p_0 \quad (2.8)$$

Die Parameter p_0 bis p_4 werden in Tabelle 2.3 für die verschiedenen Höhen aufgelistet. Eine passende Funktion für die verschiedenen Parameter über den gesamten Arbeitsraum zu finden gestaltet sich als schwierig und nicht zielführend, da die Dehnung nur einen Teil der tatsächlichen Positionsabweichung begründet. Im folgenden Kapitel wird neben der Dehnung auch noch der Seildurchhang berücksichtigt.

Tabelle 2.3: Parameter für die Polynome 4.Grades

z [m]	$p_4 \cdot 10^{-6}$	$p_3 \cdot 10^{-3}$	p_2	p_1	$p_0 \cdot 10^3$
1	222.99	-63.23	3.90	-77.48	10.43
10	364.46	-96.65	5.37	-28.49	10.06
15	477.77	-122.47	6.13	43.31	9.73
20	610.03	-151.70	6.13	208.81	9.16
25	662.47	-162.90	2.20	672.51	8.00
30	-2219.00	421.53	-50.88	3045.80	4.72

Die direkte mathematische Annäherung an den Kraftverlauf über den gesamten Arbeitsraum mit einem dreidimensionalen Polynom 4. Grades, wird in Abbildung 2.15 dargestellt.

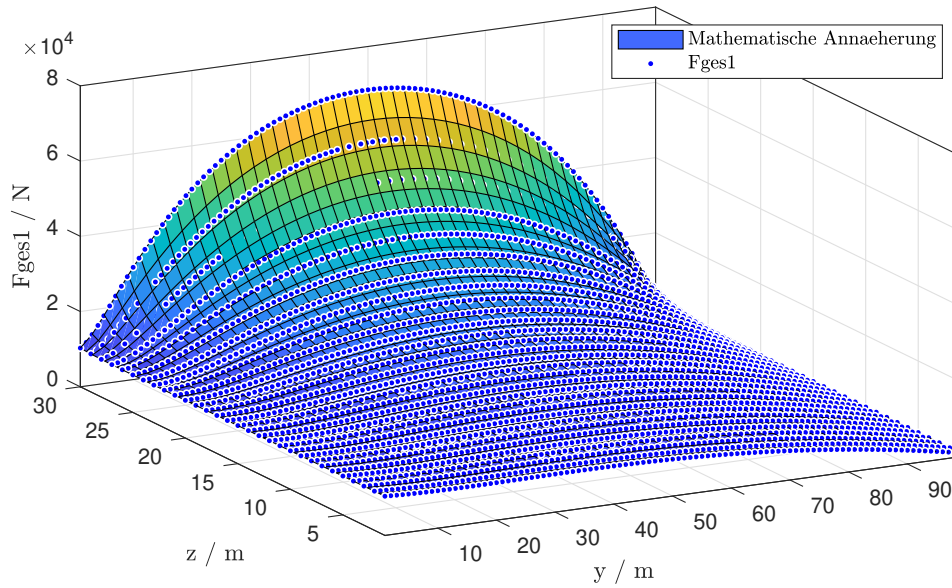


Abbildung 2.15: Kraftverlauf über y und z mit einem angenäherten Polynom 4. Grades

Für die Seildehnung und die daraus folgende Positionsabweichung können die Erkenntnisse aus den mathematischen Annäherungen sowie den vorhergegangenen analytischen Berechnungen verwendet werden.

Die tatsächlich auftretende Positionsabweichung hängt jedoch nicht nur von der Dehnung ab, sondern vor allem auch vom auftretenden Seildurchhang. Die Seilkurve und deren Einfluss auf die Positionsgenauigkeit wird im Kapitel 3 ausführlich erläutert.

3 Berechnung der Seildehnung unter Berücksichtigung des Seildurchhangs

Jedes Seil das frei zwischen zwei Punkten hängt beschreibt eine Form der Cosinus-Hyperbolicus-Funktion. Je höher die Seilkräfte im Verhältnis zum Eigengewichtes des Seils sind, desto straffer ist das Seil gespannt [DD11].

Für große Seilkräfte kann die Positionsabweichung durch den Seildurchhang theoretisch vernachlässigt werden. Beispielsweise beträgt die Seilkraft $F_{ges1/2} = 82 \text{ kN}$ bei einer Endposition von $y_p = 50 \text{ m}$ und $z_p = 30 \text{ m}$. Für Positionen in den unteren Randbereichen gewinnt der Seildurchhang immer mehr an Bedeutung.

3.1 Seilstatik

Für die Berechnung der Seilstatik muss die im Seil wirkende Kraft ermittelt werden. Als Vereinfachung der Berechnung wird wieder weitestgehend eine Last von $m = 1000 \text{ kg}$ vorausgesetzt, verschiedene Lasten werden in Kapitel 3.5 behandelt.

Wie in Kapitel 2.2 gezeigt wurde ändern sich die Seilkräfte je nach Angriffswinkel. Sollte das Seil also stark durchhängen, führt dies nicht nur zu einer Richtungsänderung der Seilkraft, sondern auch zu einer signifikanten Variation des Betrags der Kraft. Eine korrekte Berechnung der Seilstatik ist daher nur iterativ möglich.

Für die Seilkraftermittlung in diesem Kapitel wird anfangs ein gestrecktes, nicht durchhängendes Seil zur Endposition angenommen. Beide Winkel werden trigonometrisch ermittelt, die Last wird auf die Seilkräfte aufgeteilt (siehe Abbildung 3.1). Für die Berechnung des Durchhangs müssen beiden Seile getrennt betrachtet werden.

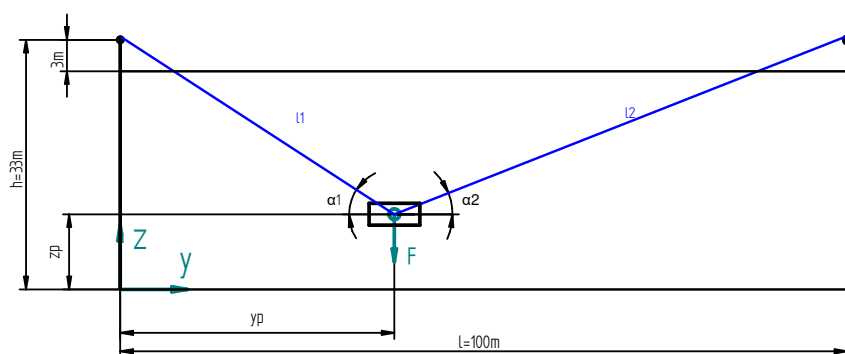


Abbildung 3.1: Kraftaufteilung auf beide Seile

3.1.1 Linkes Seil (Seil 1)

Die y - und z -Komponenten der Seilkraft im linken Seil ergeben sich zu Gleichung 3.1 und 3.2. Die beiden Winkel α_1 und α_2 wurden im Kapitel 2.1 in Gleichung 2.1 ermittelt.

$$F_{y1} = \frac{F}{\tan(\alpha_1) + \tan(\alpha_2)} \quad (3.1)$$

$$F_{z1} = F_{y1} \cdot \tan(\alpha_1) \quad (3.2)$$

Für die Berechnung der sogenannten Seilcurve wird ein infinitesimales Element freigeschnitten, siehe Abbildung 3.2.

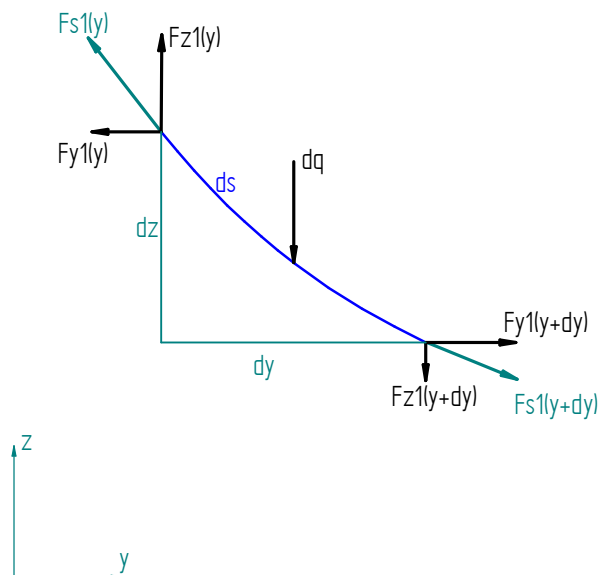


Abbildung 3.2: Infinitesimales Element des linken Seiles

Das Eigengewicht des Seiles entspricht der Streckenlast (Gleichung 3.3) multipliziert mit der Länge des Seilelementes.

$$\rho_q = \rho \cdot g \quad (3.3)$$

$$dq = \rho_q \cdot ds \quad (3.4)$$

Infinitesimal kann die Länge ds laut Gleichung 3.5 mit dem Satz des Pythagoras beschrieben werden. In den Gleichungen 3.5 bis 3.8 wird das Seilelement durch die Ableitung von z ((Koordinate)) nach y ((Koordinate)) definiert.

$$ds = \sqrt{dy^2 + dz^2} \quad (3.5)$$

$$z1' = -\frac{dz}{dy} \quad (3.6)$$

$$dz^2 = z1'^2 \cdot dy^2 \quad (3.7)$$

$$ds = \sqrt{1 + z1'^2} \cdot dy \quad (3.8)$$

Aus der Summe der Kräfte in y-Richtung wird ersichtlich, dass die y-Komponente der Seilkraft über das gesamte Seil konstant ist ($Fy1(y + dy) = Fy1(y)$).

$$\Sigma Fy = 0 = Fy1(y + dy) - Fy1(y) \quad (3.9)$$

Da die y-Komponente der Kraft konstant bleibt, ist der Seilkraftverlauf nur noch von der z-Komponente abhängig. Die Summe der Kräfte in z-Richtung ergibt sich zu Gleichung 3.10. Unter Verwendung der Gleichungen 3.4 und 3.8 lässt sie sich zu Gleichung 3.11 umformen.

$$\Sigma Fz = 0 = Fz1(y) - dq \cdot ds - Fz1(y + dy) \quad (3.10)$$

$$\Sigma Fz = 0 = Fz1(y) - \rho_q \cdot \sqrt{1 + z1'^2} \cdot dy - Fz1(y + dy) \quad (3.11)$$

Die erste Ableitung der z-Komponente der Seilkraft $Fz1'$ kann durch den Grenzwert der Kraftänderung dargestellt werden. Wird der Zähler durch die Gleichung 3.11 ersetzt, lässt sich dy kürzen wodurch die Grenzwertbildung entfällt (Gleichung 3.13).

$$Fz1' = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{Fz1(y + dy) - Fz1(y)}{dy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{-\rho_q \cdot \sqrt{1 + z1'^2} \cdot dy}{dy} \quad (3.12)$$

$$Fz1' = -\rho_q \cdot \sqrt{1 + z1'^2} \quad (3.13)$$

Aus den physikalischen Eigenschaften eines Seiles ist bekannt, dass die Seilkraft immer in Seilrichtung verläuft, das heißt die erste Ableitung der Seilkurve $z1'$ kann auch durch das Kräfteverhältnis dargestellt werden. Die zweite Ableitung ergibt sich zu Gleichung 3.15, weil $Fy1$ über das Seil konstant ist.

$$z1' = -\frac{dz}{dy} = \frac{Fz1}{Fy1} \quad (3.14)$$

$$z1'' = \frac{Fz1'}{Fy1} \quad (3.15)$$

Kombiniert man Gleichung 3.13 mit 3.15, ergibt sich eine Differentialgleichung 2.

Ordnung (Gleichung 3.16).

$$z1'' = -\frac{\rho_q}{Fy1} \cdot \sqrt{1 + z1'^2} \quad (3.16)$$

Die Lösung der Differentialgleichung führt über die gefundene erste Ableitung (Gleichung 3.17) zur Funktion der gesuchten linken Seilkurve in Gleichung 3.18. Der detaillierte Lösungsweg wird im Anhang erläutert.

$$z1' = \sinh\left(-\frac{\rho_q}{Fy1} \cdot y + C1'\right) \quad (3.17)$$

$$z1(y) = \frac{Fy1}{\rho_q} \cdot \cosh\left(-\frac{\rho_q}{Fy1} \cdot y + C1'\right) + C1 \quad (3.18)$$

Zur Berechnung der Integrationskonstanten werden zwei Randbedingungen angenommen. Gleichung 3.19 setzt voraus, dass Seil 1 bei $y = 0$ auf der Höhe h befestigt ist (Umlenkrolle links), die zweite Randbedingung fixiert das Seil an der Manipulatorplattform (Gleichung 3.20).

$$z1(0) = h \quad (3.19)$$

$$z1(yp) = zp \quad (3.20)$$

Aus den beiden Randbedingungen ergeben sich die Integrationskonstanten zu Gleichung 3.21 und 3.22.

$$C1 = h - \frac{Fy1}{\rho_q} \cdot \cosh(C1') \quad (3.21)$$

$$C1' = \operatorname{asinh}\left(\frac{\rho_q \cdot (zp - h)}{2 * Fy1 \cdot \sinh\left(\frac{-\rho_q \cdot yp}{2 \cdot Fy1}\right)}\right) + \frac{\rho_q \cdot yp}{2 \cdot Fy1} \quad (3.22)$$

Seillängen

Für die gedehnte, reale Seillänge $l1real$ muss nur noch das infinitesimale Element über den y -Bereich des linken Seiles integriert werden, ds wird durch Gleichung 3.8 ersetzt.

$$l1real = \int_0^{yp} ds \cdot dy = \int_0^{yp} \sqrt{1 + z1'^2} \cdot dy \quad (3.23)$$

Abhängig von der Manipulatorposition ergibt sich die linke Seillänge zur Gleichung 3.24.

$$l1real = -\frac{Fy1}{\rho_q} \cdot \left(\sinh\left(-\frac{\rho_q}{Fy1} \cdot yp + C1'\right) - \sinh(C1')\right) \quad (3.24)$$

Zur Berechnung der Seilkraft unter Berücksichtigung des Durchhangs können die Gleichungen 2.7, 2.4, 2.3 und 2.2 aus Kapitel 2.1 übernommen werden. Berücksich-

tigt wird der Durchhang über die neu gefundene Definition für l_{real} .

Der Anteil der Gewichtskraft wird vereinfacht wieder als Funktion abhängig von der Höhe der Manipulatorposition angeschrieben. Auch wenn das Seil durch den Durchhang etwas länger wird, wodurch die Winkel nicht mehr den geometrischen Dreiecken entsprechen, verändert das den für die Seildehnung verantwortlichen Anteil der Gewichtskraft nur minimal. Wie in Abbildung 2.12 ersichtlich, wird die Positionsänderung aufgrund der Seildehnung erst bei Höhen von $z=25\text{m}$ relevant, gleichzeitig ist dort aber die Seilkraft so groß, dass der Seildurchhang vernachlässigbar klein wird. Aus diesen Gründen dürfen die Gleichungen 3.25 bis 3.27 für den Gewichtskraftanteil auch für die Berechnung mit Seildurchhang übernommen werden.

$$F_{s1} = \frac{m \cdot g}{\sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1) \cdot \tan(\alpha_2)} \quad (3.25)$$

$$F_{g1} = \frac{\rho * g * (h - zp)}{2} \quad (3.26)$$

$$F_{ges1} = F_{s1} + F_{g1} \quad (3.27)$$

Mit Hilfe des hookeschen Gesetz kann dann wieder die tatsächlich abgewickelte Seillänge bestimmt werden.

$$l_{abgewickelt} = \frac{l_{real}}{1 + \frac{F_{ges1}}{EA}} \quad (3.28)$$

3.1.2 Rechtes Seil (Seil 2)

Die Berechnung der Seilkurve des rechten Seils verläuft analog, die detaillierte Herleitung wird im Anhang gezeigt.

Die y-Komponente der Seilkraft 2 (Gleichung 3.29) muss gleich groß sein, wie die der Seilkraft 1 (Manipulatorplattform befindet sich im Gleichgewicht).

$$F_{y2} = F_{y1} \quad (3.29)$$

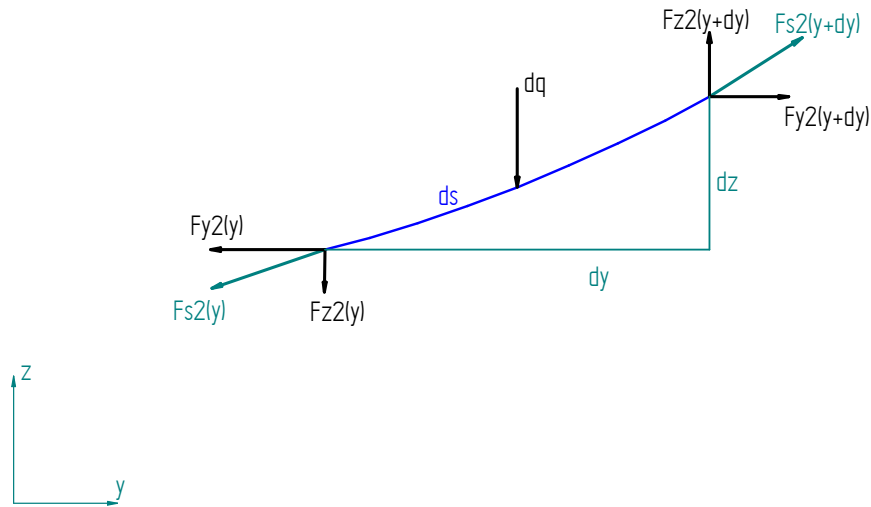


Abbildung 3.3: Infinitesimales Element des rechten Seiles

Aus Abbildung 3.3 wird ersichtlich, dass sich bei der Steigung $z2'$ des infinitesimalen Elementes (Gleichung 3.6 beim linken Seil) das Vorzeichen wechselt. Dadurch findet sich die Differentialgleichung 2.Ordnung in Gleichung 3.31.

$$z2' = \frac{dz}{dy} \quad (3.30)$$

$$z2'' = \frac{\rho_q}{Fy2} \cdot \sqrt{1 + z2'^2} \quad (3.31)$$

Die rechte Seilcurve und deren erste Ableitung ergeben Gleichungen 3.32 und 3.33.

$$z2' = \sinh \left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot y + C2' \right) \quad (3.32)$$

$$z2(y) = \frac{Fy2}{\rho_q} \cdot \cosh \left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot y + C2' \right) + C2 \quad (3.33)$$

Die erste Randbedingung (Gleichung 3.34) setzt voraus, dass das Seil 2 bei $y = yp$ an der Manipulatorplattform befestigt ist. Die Zweite fixiert das andere Ende des Seiles an der rechten Umlenkrolle (Gleichung 3.35).

$$z2(yp) = zp \quad (3.34)$$

$$z2(l) = h \quad (3.35)$$

Aus den beiden Randbedingungen ergeben sich die Integrationskonstanten zu Glei-

chung 3.37 und 3.36.

$$C2 = zp - \frac{Fy2}{\rho_q} \cdot \cosh\left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot yp + C2'\right) \quad (3.36)$$

$$C2' = a \sinh\left(\frac{\rho_q \cdot (h - zp)}{2 \cdot Fy2 \cdot \sinh\left(\frac{\rho_q(l-yp)}{2 \cdot Fy2}\right)}\right) - \frac{\rho_q \cdot (l + yp)}{2 \cdot Fy2} \quad (3.37)$$

Seillängen

Für die gedehnte, reale Seillänge l_{2real} muss wieder das infinitesimale Element über den y -Bereich des rechten Seiles integriert werden, ds wird wieder durch Gleichung 3.8 ersetzt.

$$l_{2real} = \int_{yp}^l ds \cdot dy = \int_{yp}^l \sqrt{1 + z1'^2} \cdot dy \quad (3.38)$$

Abhängig von der Manipulatorposition ergibt sich dann die rechte Seillänge zur Gleichung 3.39.

$$l_{2real} = \frac{Fy2}{\rho_q} \cdot \left(\sinh\left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot l + C2'\right) - \sinh\left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot yp + C2'\right) \right) \quad (3.39)$$

Für die tatsächlich abgewickelte Seillänge können wieder die Gleichungen aus Kapitel 3.24 angewendet werden (Gleichung 3.41 bis 3.43).

$$Fs2 = \frac{m \cdot g}{\sin(\alpha2) + \cos(\alpha2) \cdot \tan(\alpha1)} \quad (3.40)$$

$$Fg2 = \frac{\rho \cdot g \cdot (h - zp)}{2} \quad (3.41)$$

$$Fges2 = Fs2 + Fg2 \quad (3.42)$$

$$l_{2abgewickelt} = \frac{l_{2real}}{1 + \frac{Fges2}{EA}} \quad (3.43)$$

3.2 Iterative Berechnung der Seilkurven

Die Seilkräfte werden ursprünglich durch die geometrische Aufteilung bestimmt (siehe Kapitel 2.1), die beiden Ausgangswinkel $\alpha01$ und $\alpha02$ werden mit gestreckten, nicht durchhängenden Seilen ermittelt (Gleichung 3.44).

$$\alpha01 = \operatorname{atan}\left(\frac{h - zp}{yp}\right) \quad \alpha02 = \operatorname{atan}\left(\frac{h - zp}{l - yp}\right) \quad (3.44)$$

Nach einer Iteration der Berechnung aus Kapitel 3.1 ergibt sich dann eine Seilkurve mit zu großem Durchhang. Aufgrund der zu groß angenommenen Ausgangswinkel

und den daraus folgenden zu kleinen Seilkräften (siehe rechte Seilkurve nach einer Iteration in Abbildung 3.4). Mit dieser Seilkurve, beziehungsweise den neuen Kraftangriffswinkeln der Kurve ($\alpha_1 = \text{atan}(z_1')$ und $\alpha_2 = \text{atan}(z_2')$), wird erneut die Last auf die beiden Seile aufgeteilt und die gesamte Berechnung der Seilstatik wiederholt.

Dadurch ändern sich die beiden Winkel bei jeder Iteration, bis sie sich den realen Werten annähern und die Abweichungen der Seilkurve vom tatsächlichen Verlauf des Seiles vernachlässigbar gering sind. Ab der 20. Iteration pendeln sich die Winkel α_1 und α_2 mit einer Toleranz von $\pm 0.0001^\circ$ um den Realwert ein.

In Abbildung 3.4 wird die Seilkurve nach verschieden vielen Iterationen angezeigt ($y_p = 15\text{ m}$ und $z_p = 5\text{ m}$). Das linke Seil nimmt durch den Kraftangriffswinkel eine größere Kraft auf, und hängt kaum durch. Die Seilkurve nach der 1. Iteration ändert sich nicht mehr signifikant ($z_{0_1}(y) = z_1(y)$).

Die rechte Seilkurve $z_{0_2}(y)$ jedoch verläuft nach der 1. Iteration sogar stellenweise unter der Manipulatorplattform ($\alpha_2 \leq 0$), nach mehreren Iterationen hebt sich das Seil und der Winkel α_2 pendelt sich bei ca. 0° ein. In Abbildung 3.4 wird nur noch die Seilkurve $z_2(y)$ nach der 100. Iteration dargestellt, weil sie genau mit der Seilkurve der 20. Iteration übereinstimmt und diese überdeckt.

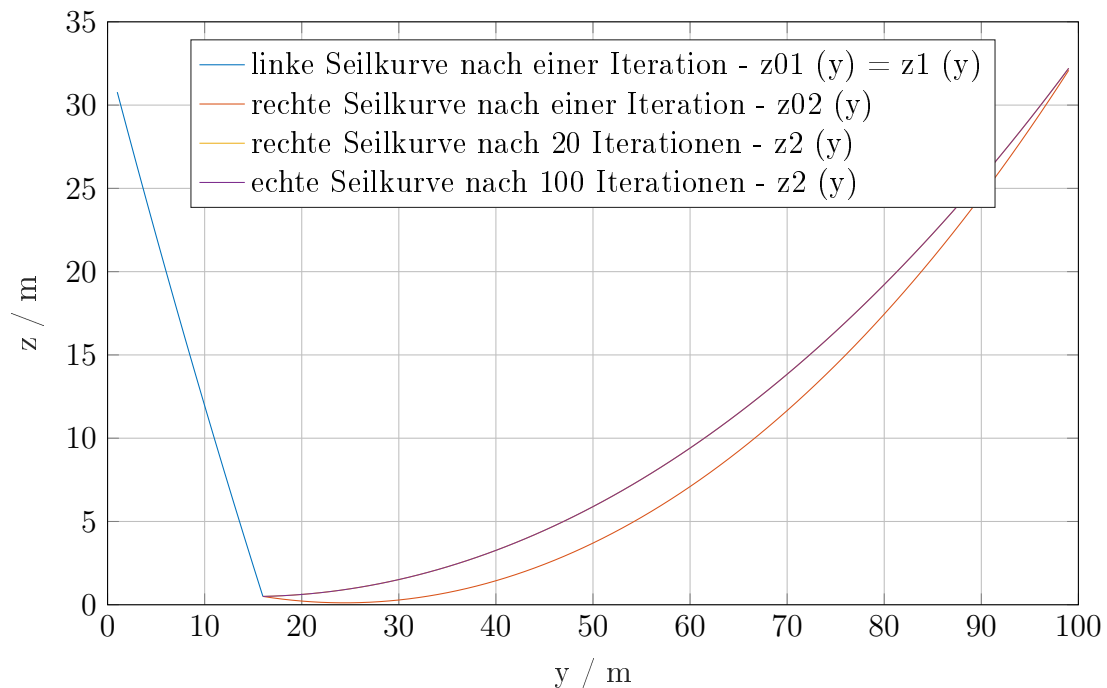


Abbildung 3.4: Die Seilkurve nach verschieden vielen Iterationen

Der tatsächliche Verlauf der Seilkurve lässt sich also nicht direkt analytisch be-

rechnen sondern bedarf einer iterativen Annäherungsmethode. Um den Prozess der Iteration zu vermeiden werden in Kapitel 3.4 geeignete Verfahren und Korrekturfaktoren eingeführt.

3.3 Arbeitsraumeinschränkung

Für die möglichen Anwendungen des behandelten Seilrobotersystems (siehe Kapitel 1.4) muss der Arbeitsraum noch weiter eingegrenzt werden. Hauptproblem sind durchhängende Seile die am tiefsten Punkt niedriger als die Manipulatorplattform sind. Diese können an Gegenständen unterhalb des Manipulators streifen und dadurch die Positionsgenauigkeit stark beeinflussen, oder zu Kollisionen führen.

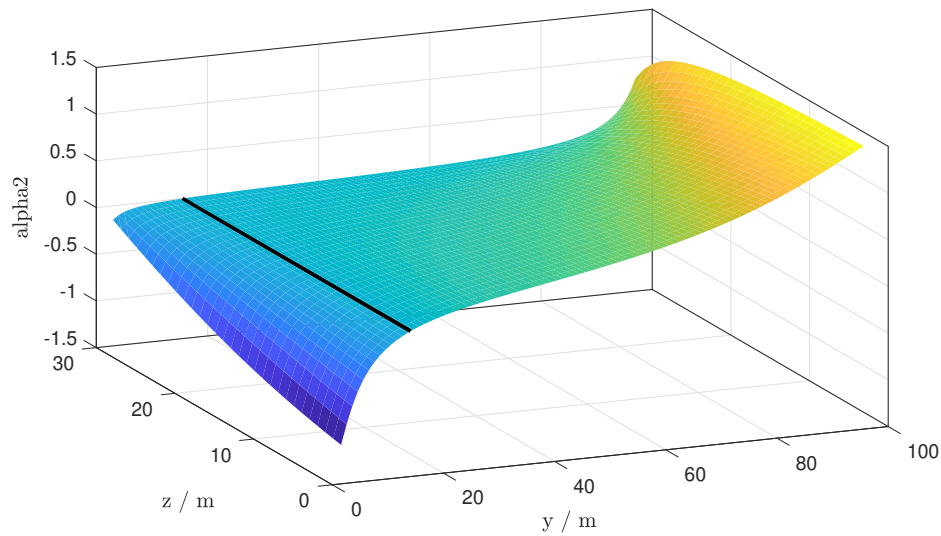
Die Grundanforderung für die Arbeitsraumeinschränkung wird daher so definiert, dass keines der beiden Seile an irgendeinem Punkt tiefer als die Manipulatorplattform hängen darf.

Mathematisch kann das durch die erste Ableitung der Seilkurve beschrieben werden: Ist die Steigung eines der beiden Seile im Punkt der Manipulatorplattform negativ, wird die Grundanforderung nicht mehr erfüllt. Daraus ergeben sich die mathematischen Gleichungen für die Arbeitsraumgrenzen zu Gleichung 3.45 und 3.46.

$$z1'(yp) \geq 0 \tag{3.45}$$

$$z2'(yp) \geq 0 \tag{3.46}$$

Für die Veranschaulichung wird der iterativ berechnete Winkel α_2 aus Kapitel 3.2 verwendet. Der Verlauf des Winkels α_2 über den Arbeitsraum mag zwar willkürlich wirken, der Nulldurchgang befindet sich aber genau entlang einer vertikalen Geraden (schwarze Linie in Abbildung 3.5).

Abbildung 3.5: Verlauf von α_2 über den Raum

Das führt zu geraden, vertikalen Arbeitsraumgrenzen (Abbildung 3.6). Wobei Gleichung 3.45 die rechte und Gleichung 3.46 die Linke Grenze definiert ($y_{links} = 15.49$ m und $y_{rechts} = 84.51$ m).

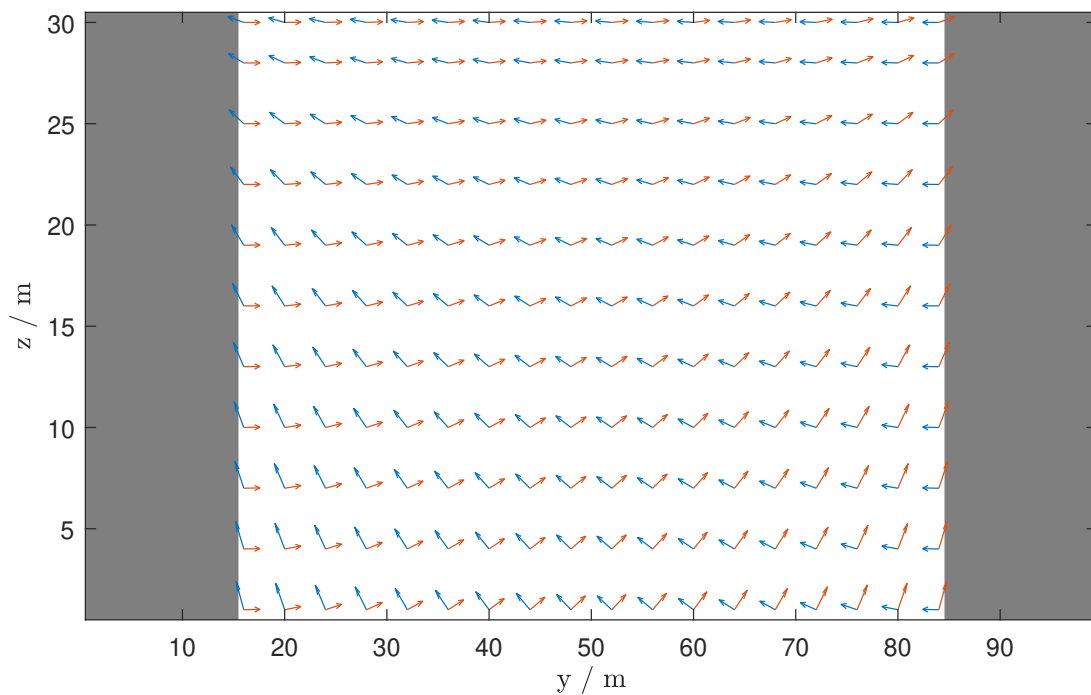


Abbildung 3.6: Eingeschränkter Arbeitsraum mit den Kraftangriffswinkeln als Vektorfeld

Die Arbeitsraumgrenzen können mathematisch, aufgrund der iterativen Berechnungsmethode, nicht bewiesen werden. Prinzipiell ist die Kraft im Seil direkt von der Höhe der Manipulatorplattform abhängig (je höher, desto größer werden die Kräfte). Bei größeren Kräften hängen die Seile weniger durch, die Kraftangriffswinkel werden unter der Annahme von gestreckten Seilen kleiner wenn die Höhe zunimmt.

Aus diesen Zusammenhängen lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

Bei kleinen Höhen sind die ursprünglichen Kraftangriffswinkel groß, die Seilkräfte klein und der Seildurchhang weicht stark von dem gestreckten Seil ab. Das heißt der relativ große Winkel α_0 (ursprünglicher Kraftangriffswinkel) wird kompensiert durch den großen Seildurchhang und der tatsächliche, iterativ berechnete, Winkel α pendelt sich bei 0° ein.

Bei großen Höhen verhält sich das System umgekehrt: Die ursprünglichen Kraftangriffswinkel sind klein, dadurch ergeben sich große Seilkräfte und der Durchhang wird minimal. Das bedeutet für den ursprünglich kleinen Winkel α_0 genügt ein minimaler Seildurchhang um die Grenze $\alpha = 0^\circ$ zu erreichen.

Die bestmögliche mathematische Definition der Arbeitsraumgrenzen wird im Kapitel 3.4.2 genauer beschrieben.

In Abbildung 3.6 werden außerdem die Vektorpaare der beiden Kraftangriffswinkel (Steigung der Seile) für ausgewählte Positionen dargestellt.

Wird zum Beispiel Schüttgut mit dem Seilroboter gehandhabt, kann aufgrund des Vektorfelds und der erwünschten zu erreichenden Positionen, der maximal mögliche Verlauf des Schüttgutberges ermittelt werden.

In Abbildung 3.7 wird erkenntlich, dass die eingrenzenden Kurven die Seilverläufe der beiden Positionen am Rande des Arbeitsraumes sind.

Als Beispiel wurden zwei extreme Positionen am unteren Rand der Arbeitsraumgrenzen gewählt ($y_{p1} = 16 \text{ m}$, $z_{p1} = 0.5 \text{ m}$ und $y_{p2} = 84 \text{ m}$, $z_{p2} = 0.5 \text{ m}$). Das Schüttgut kann zu einem Berg mit einem Maximum von $z = 5.89 \text{ m}$ bei $y = 50 \text{ m}$ angehäuft werden (gefärbte Fläche in Abbildung 3.7).

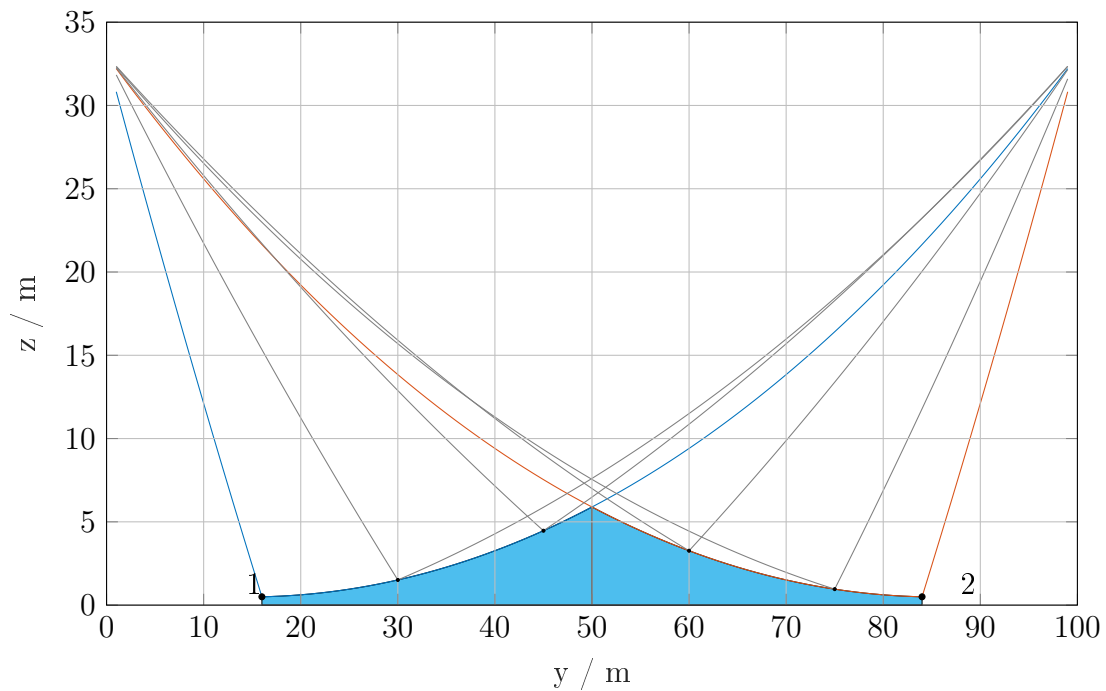


Abbildung 3.7: Möglicher Verlauf des Schuttgutberges für zwei Positionen

3.4 Korrekturfaktoren

Für die Entwicklung einer analytischen Berechnungsvorschrift ist das Umgehen einer iterativen Berechnungsmethode fundamental. Dafür werden Korrekturfaktoren gesucht, die den Zusammenhang zwischen dem iterativ berechneten Endergebnis und den Ausgangsparametern der Iteration beschreiben.

Vor der 1. Iteration wurden die Winkel α_{01} und α_{02} geometrisch, mit gestreckten Seilen, ermittelt (siehe Kapitel 3.1 und 3.2). Iteriert werden die Kraftangriffswinkel, die endgültigen Winkel α_1 und α_2 liefern eine Seilkurve die an den tatsächlichen Verlauf des Seiles zufriedenstellend angenähert wurde.

Die Korrekturfaktoren zur Vermeidung der iterativen Berechnungsmethode werden daher direkt für die Winkel angesetzt. Sie beschreiben den Zusammenhang zwischen den resultierenden Kraftangriffswinkel nach der iterativen Berechnung und den Ausgangswinkel vor der 1. Iteration (Gleichung 3.47 und 3.48).

$$kf1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_{01}} \quad (3.47)$$

$$kf2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_{02}} \quad (3.48)$$

Korrekturfaktor 1 ist symmetrisch zum Korrekturfaktor 2. Exemplarisch wird daher in den folgenden Absätzen nur noch Korrekturfaktor 2 behandelt.

Wird der Verlauf von $kf2$ über den eingeschränkten Arbeitsraum dargestellt, ergibt das eine dreidimensionale Fläche, die sich über die Höhe z des Arbeitsraumes nicht verändert (Abbildung 3.8). Außerdem wird der Wert von $kf2$ außerhalb der linken Arbeitsraumgrenze negativ, da die Steigung $z2'$ und somit auch $\alpha2$ dort negativ sind. Die Arbeitsraumgrenzen können daher auch direkt mit dem Verlauf der Korrekturfaktoren ermittelt werden. Hier wird der gerade, vertikale Verlauf der Arbeitsraumgrenzen durch die z -Unabhängigkeit der Korrekturfaktoren bestätigt.

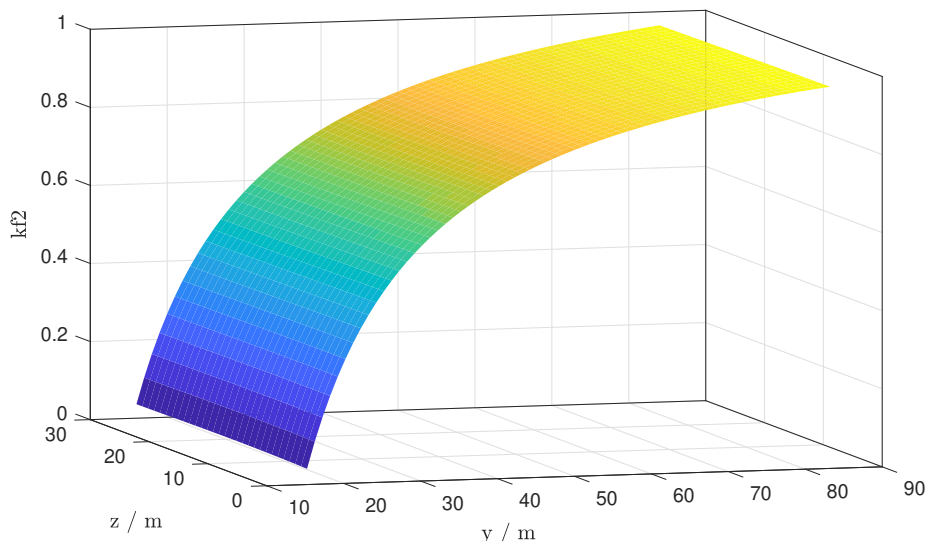


Abbildung 3.8: Verlauf des Korrekturfaktors 2 über den Arbeitsraum

Durch die z -Unabhängigkeit kann außerdem die dreidimensionale Fläche mit einer z -Ebene geschnitten werden. Daraus ergibt sich eine zweidimensionaler Verlauf für $kf2$ der nur noch von der y -Koordinate abhängig ist (siehe Abbildung 3.9).

Mit Hilfe des Curvefit-Tools von Matlab kann der Verlauf mit einer rationalen, mathematischen Funktion angenähert werden (Abbildung 3.9 beziehungsweise Gleichung 3.49).

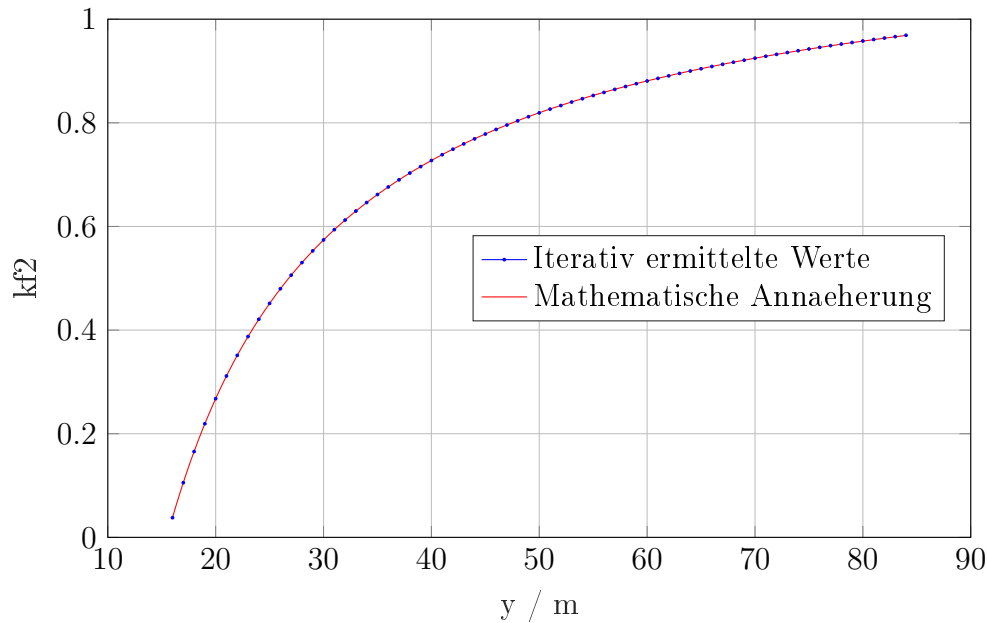


Abbildung 3.9: Verlauf von $kf2$ und der mathematischen Annäherung über den Arbeitsraum

$$kf2(y_p) = \frac{1.188 \cdot y_p - 18.4}{y_p + 0.05877} \quad (3.49)$$

Durch die Symmetrie ergibt sich $kf1$ zur Gleichung 3.50.

$$kf1(y_p) = \frac{1.188 \cdot (l - y_p) - 18.4}{(l - y_p) + 0.05877} \quad (3.50)$$

3.4.1 Analytische Berechnung der Seilkurven

Bei der Berechnung der Seilkurve beeinflussen die Korrekturfaktoren nur die Gleichung zur Ermittlung der Seilkraft, respektive der für die Seilkurve relevanten y -Komponente der Seilkraft (Gleichung 3.1).

Mit Hilfe der Korrekturfaktoren können die tatsächlich auftretenden Seilkräfte in einem analytischen Schritt berechnet werden. Wie aus Gleichung 3.29 bekannt ist, sind die y -Komponenten der beiden Seilkräfte gleich groß. Für F_{y1} und F_{y2} können nun Gleichung 3.52 angeschrieben werden, in der beide an die realen Werte angenäherten Winkel α_1 und α_2 durch die korrigierten Ausgangswinkel beschrieben sind (Gleichungen 3.51).

$$\alpha_1 = \alpha_{01} \cdot kf1 \quad \alpha_2 = \alpha_{02} \cdot kf2 \quad (3.51)$$

$$Fy1 = Fy2 = \frac{m \cdot g}{\tan(\alpha01 \cdot kf1) + \tan(\alpha02 \cdot kf2)} \quad (3.52)$$

Die restlichen Gleichungen der Seilkurvenermittlung aus Kapitel 3.1 bleiben gleich, vorausgesetzt die tatsächlich wirkende Fy -Kraft aus Gleichung 3.52 und die angepassten Winkel $\alpha1$ und $\alpha2$ (Gleichung 3.51) werden verwendet.

Mit Hilfe der beiden Korrekturfaktoren lassen sich die idealisierten Seilkurven ermitteln, die sich an den realen Verlauf der Seile zufriedenstellend annähern. Verifiziert wird der Ansatz mit den Korrekturfaktoren mit Hilfe von geeigneten Simulationsmodellen, in den folgenden Kapiteln werden die einzelnen Modelle genauer beschrieben. Ist die Masse des Manipulators inklusive Last bekannt, können die Gleichungen aus Kapitel 3.1 kombiniert mit den Korrekturfaktoren (Gleichung 3.52) als analytische Berechnungsvorschrift für die inverse Kinematik des Seilroboters verwendet werden. In Abbildung 3.10 wird der strukturelle Ablauf für die Ermittlung der Korrekturfaktoren und deren Implementierung in die Berechnungsvorschrift dargestellt.

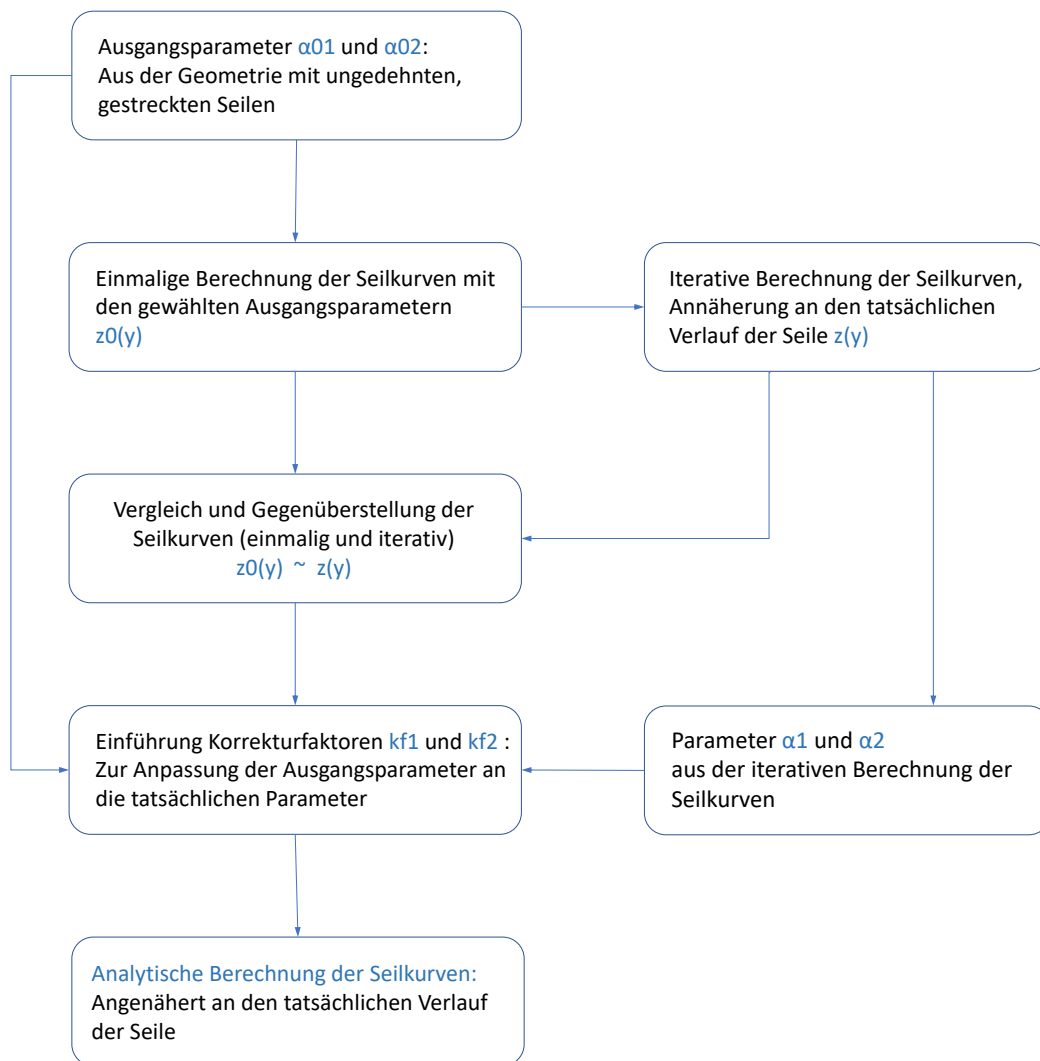


Abbildung 3.10: Struktureller Aufbau der analytischen Berechnung der Seilkurven mit Hilfe der Korrekturfaktoren

3.4.2 Arbeitsraumgrenzen in Abhängigkeit der Korrekturfaktoren

Wird der Korrekturfaktor 2 in die Gleichung des Winkels $\alpha 2$ (Gleichung 2.1) eingesetzt, ergibt sich Gleichung 3.53.

$$\alpha 2 = \operatorname{atan} \left(\frac{h - zp}{l - yp} \right) \cdot kf2 \quad (3.53)$$

Über den gesamten Raum betrachtet, entspricht diese Funktion der gleichen Fläche wie der in Abbildung 3.5. Da es sich jetzt um eine direkte, analytische Formel und keine iterativ ermittelten Werte handelt, kann der Nulldurchgang mathematisch

bestimmt werden.

$$0 = \operatorname{atan} \left(\frac{h - zp}{l - yp} \right) \cdot \frac{1.188 \cdot yp - 18.4}{yp + 0.05877} \quad (3.54)$$

Dabei kann der atan -Term nicht 0 werden, da die Umlenkrollen zu Beginn in Kapitel 2 auf 3 m über dem gültigen Arbeitsraum festgelegt wurden ($h - zp > 0$). Dadurch entspricht der Nulldurchgang von α_2 dem von kf_2 (Gleichung 3.55).

$$0 = \frac{1.188 \cdot yp - 18.4}{yp + 0.05877} \quad (3.55)$$

Die linke Arbeitsraumgrenze ergibt sich dann zu Gleichung 3.56.

$$y_{links} = \frac{18.4}{1.188} = 15.49 \text{ m} \quad (3.56)$$

Weil der Arbeitsraum symmetrisch ist kann die rechte Arbeitsraumgrenze mit der Gleichung 3.57 berechnet werden (alternativ kann auch α_1 unter Berücksichtigung von kf_1 null gesetzt werden).

$$y_{rechts} = l - y_{links} = 84.51 \text{ m} \quad (3.57)$$

Zur Vereinfachung beziehungsweise Sicherstellung, dass sich der Seilroboter im gültigen Arbeitsraum bewegt, wird die nächste ganze Zahl innerhalb der Grenzen verwendet (Gleichung 3.58).

$$y_{links} = 16 \text{ m} \quad y_{rechts} = 84 \text{ m} \quad (3.58)$$

Außerhalb dieser Arbeitsraumgrenzen kann die Berechnungsvorschrift durch Korrekturfaktoren zwar noch immer zufriedenstellend angewendet werden. Die Arbeitsraumanforderung, dass kein Teil der Seile tiefer als die Manipulatorplattform hängt, ist nicht mehr gegeben. Außerdem neigt das System zu starken Schwingungen, aus Simulationsversuchen ergeben sich sogar Schwingungsamplituden von bis zu 1 m, die erst nach einer Einschwingphase von ca. 5 min langsam abklingen.

Die definierten Arbeitsraumgrenzen aus Gleichung 3.58 sollten aus diesen Gründen nicht überschritten werden.

3.5 Lastabhängigkeit der Korrekturfaktoren respektive der Arbeitsraumgrenzen

Bis hierher wurden alle Berechnungen mit einer konstanten Last von $m = 1000 \text{ kg}$ durchgeführt. Alle Parameter der Seilkurve sind jedoch direkt von dem Gewicht

der Manipulatorplattform abhängig. Diese Abhängigkeit kann mathematisch in die Formel für die Korrekturfaktoren mit einbezogen werden.

Für die Bestimmung wird die Formel für den Korrekturfaktor unter Verwendung der lastabhängigen Größen angeschrieben (Gleichung 3.59).

$$kf2(yp, m) = \frac{1.188 \cdot yp - 18.4}{yp + 0.05877} = \frac{p1(m) \cdot yp + p2(m)}{yp + q1(m)} \quad (3.59)$$

Korrekturfaktor 2 wird dann für verschiedene Lasten iterativ neu berechnet. Um die Genauigkeit zu erhöhen sollten die Lastabstufungen möglichst gering sein, je höher die Anzahl der verschiedenen Lasten, desto höher ist aber auch der Rechenaufwand. Als Kompromiss wurde hier die Last von 300 kg bis 2000 kg in 1 kg-Schritten unterteilt (entspricht einer Berechnungsdauer von ca. 20 min pro Lastschritt).

Für jede einzelne dieser Lasten wird die Funktion des $kf2$ neu mit dem CurveFit-Tool interpoliert und liefert Werte für $p1, p2$ und $q1$. Diese Werte werden korrespondierend zu den jeweiligen Massen erneut mit CurveFit interpoliert und liefern rationale, massenabhängige Funktionen für die einzelnen Parameter (Gleichung 3.60 bis 3.62).

$$p1(m) = \frac{m + 434.54}{m + 207.18} \quad (3.60)$$

$$p2(m) = \frac{-0.112 \cdot m - 22214}{m + 213.57} \quad (3.61)$$

$$q1(m) = \frac{-0.1261 \cdot m + 186.34}{m - 32.46} \quad (3.62)$$

Somit wurde $kf2$ lastabhängig definiert, $kf1$ ergibt sich analog in Gleichung 3.63.

$$kf1(yp, m) = \frac{p1(m) \cdot (l - yp) + p2(m)}{(l - yp) + q1(m)} \quad (3.63)$$

Durch Nullsetzen von $kf2$ kann wieder die linke Arbeitsraumgrenze definiert werden (Gleichung 3.64). Die rechte Arbeitsraumgrenze ist $y_{rechts} = l - y_{links}$.

$$y_{links}(m) = \frac{p2(m)}{p1(m)} \quad (3.64)$$

Für eine Last von beispielsweise 500 kg können die ganzzahlige Grenzen zu $y_{links} = 24 m$ und $y_{rechts} = 76 m$ bestimmt werden. Je leichter also die Last ist desto kleiner wird der verwendbare Arbeitsraum, in dem die in Kapitel 3.3 definierten Anforderungen erfüllt sind.

Verwendet man den lastabhängigen Korrekturfaktor zur Berechnung der Seilkurve, ergeben sich, für $m = 1000$ kg, exakt die gleichen Kurven wie in Abbildung 3.4 nach

der 100. Iteration.

3.6 Erstellen einer analytischen Berechnungsvorschrift der inversen Kinematik

Die inverse Kinematik des Seilroboters beschreibt die Positionierung der Manipulatorplattform durch die Änderung der Seillängen. Dabei ist die tatsächlich abgewickelte Länge der Seile die zu verändernde Variable des Systems.

In Abbildung 3.11 wird der strukturelle Aufbau der analytischen Berechnungsvorschrift dargestellt. Mit Hilfe der Seileigenschaften und den geometrischen Randbedingungen des Seilroboters sind alle Gleichungen der Berechnungsvorschrift vollständig definiert.

Für die Korrekturfaktoren $kf1$ und $kf2$ werden die Gleichungen aus Kapitel 3.5 verwendet, dadurch kann die Berechnungsvorschrift auch für die Positionierung von Lasten $m \neq 1000$ kg angewandt werden.

Mit den Korrekturfaktoren und den tatsächlich auftretenden Winkel $\alpha1$ und $\alpha2$ können die y-Komponenten der Seilkräfte an der Manipulatorplattform ($Fy1 = Fy2$), sowie die für die Dehnung relevanten gemittelten Seilkräfte $Fges1$ und $Fges2$, berechnet werden.

Aus der Seilkurve beziehungsweise deren erster Ableitung lassen sich die Integrationskonstanten $C1'$ und $C2'$ bestimmen, gemeinsam mit den y-Komponenten der Seilkräfte können mit ihnen die ungedehnten, aber durchhängenden Seillängen $l1_{real}$ und $l2_{real}$ berechnet werden.

Die für die inverse Kinematik notwendige Ergebnisse der Berechnungsvorschrift ($l1_{abgewickelt}$ und $l2_{abgewickelt}$) werden dann mit Hilfe der gemittelten Seilkräfte berechnet, sie entsprechen den gedehnten, durchhängenden Seillängen des Seilroboters.

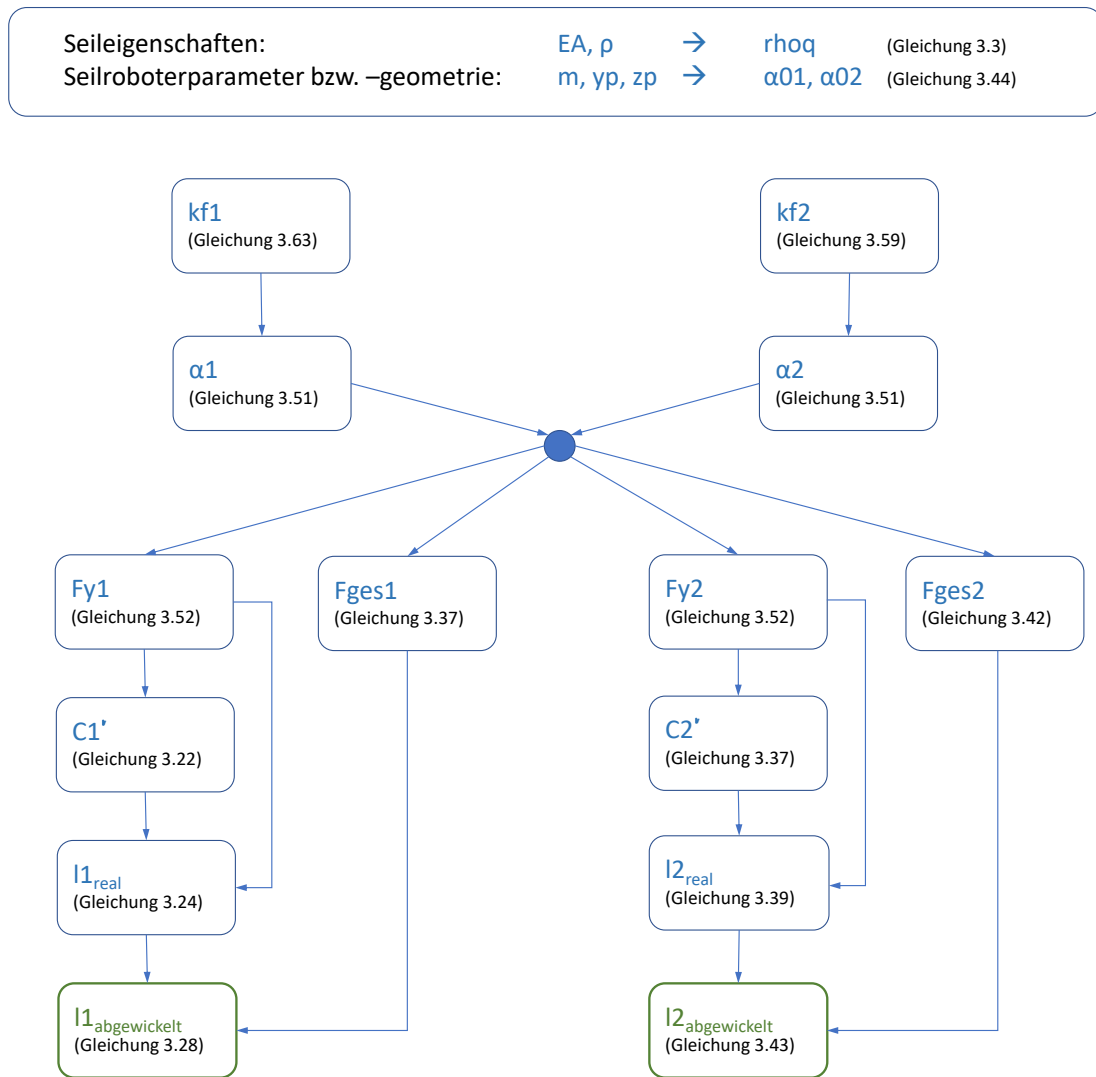


Abbildung 3.11: Struktureller Aufbau der analytischen Berechnungsvorschrift

Die Gleichungen aus Kapitel 3.4 und 3.5 können nicht direkt analytisch mit Variablen und Parametern definiert werden, da sie iterativ und meist durch anschließende Interpolation bestimmt wurden. Dies beinhaltet allerdings, dass die Ergebnisse minimal abweichen können und sich der Fehler durch etwaige mehrmalige Interpolation fortpflanzen wird.

Um die Berechnungsvorschrift dennoch verifizieren und die Abweichungen abschätzen zu können, wird der Seilroboter in den folgenden Kapiteln mit verschiedenen Programmen realitätsnah simuliert.

4 Simulation mit Simscape Multibody

Zur Simulation eines Seiles wird prinzipiell auf die Basisbausteine jeder Mehrkörper-simulation zurückgegriffen: Federn, Dämpfer und Massestäbe werden zu einer Kette verbunden und können mit den richtigen Feder- beziehungsweise Dämpfer-konstanten das reale Verhalten eines Seiles gut abbilden.

Das lässt sich mit vielen Simulationsprogrammen modellieren, unter anderem wurden Openmodelica, Simulink und Simscape Multibody für Versuche herangezogen. Simscape Multibody erwies sich als einfache und effektive Simulationsumgebung, die für den 2D-Versuch vollkommen ausreicht [Mil+17].

4.1 Modellaufbau und Koeffizientenermittlung

Die beiden Seilrollen werden als Punkt dargestellt und als sphärische Gelenke modelliert, ebenso die Punktmasse der Manipulatorplattform (Abbildung 4.1a).

Ein Seilelement besteht aus einem Zylinder mit der korrespondierenden Dichte und einem sphärischen-teleskopischen Gelenk (Abbildung 4.1b).

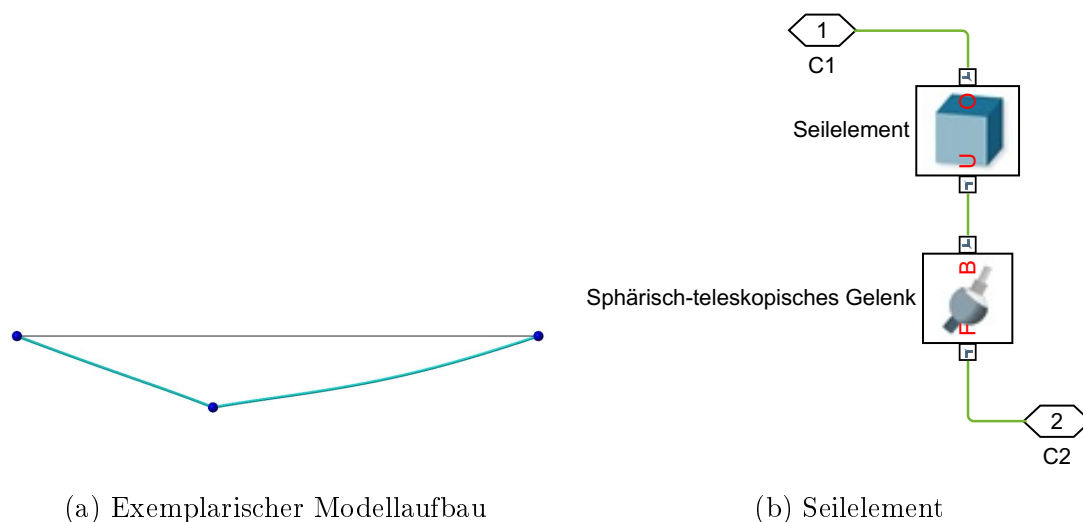


Abbildung 4.1: 2D-Modell in Simscape Multibody

Die teleskopische Federkonstante des Gelenks entspricht dabei der Steifigkeit des realen Seiles umgerechnet auf ein einzelnes Element. Je feiner die Diskretisierung (also je kleiner einzelne Elemente sind) desto höher wird auch die jeweilige Federkonstante, als Resultat der Reihenanzahl von Federn.

Um die teleskopische Dämpfungskonstante und die sphärische Feder- beziehungsweise Dämpfungskonstante möglichst realitätsnahe zu bestimmen, wird sowohl das natürliche Seildurchhang-Verhalten aufgrund des Eigengewichtes als auch die Dauer

und Charakteristik der Einschwingphase berücksichtigt.

Als Ausgangsposition für die Versuche wird das geometrische Dreieck mit den ungedehnten Seillängen als Schenkel verwendet.

4.1.1 Diskretisierung der Seile

Für die Elementlänge eines Seiles gilt wie in jeder Diskretisierung der kontinuierlichen Realität: Desto kleiner der Ansatz desto realer. Gleichzeitig bedeutet eine feinere Diskretisierung mehr Seilelemente, mehr Gelenke und mehr Bedingungen, die während der Simulation zu erfüllen sind, was direkten Einfluss auf den Simulationsaufwand nimmt. Für die großen Seillängen dieses Modells und der erwünschten, kurzen Simulationsdauer werden Elementlängen von 1 m ($t \leq 30$ min) oder 5 m ($t \leq 20$ min) gewählt.

Die Simulationsergebnisse bei so großen Elementen sind kritisch zu bewerten. In lang dauernden Simulationen mit kleinen Elementlängen wurde überprüft, ob große Elementlängen trotzdem zufriedenstellende Simulationsergebnisse liefern. Exemplarisch wird in Abbildung 4.2 und Tabelle 4.1 der Vergleich zwischen den 5 m-Elementen und den 0.5 m-Elementen dargestellt. Dabei werden die Seillängen $l_1 = 51$ m und $l_2 = 50$ m gewählt und die Last auf $m = 1000$ kg festgelegt.

Zwischen den 5 m- und den 0.5 m-Elementen ist der Unterschied in der Endposition verglichen mit der angestrebten Genauigkeit nicht signifikant ($\Delta y = -0.1$ mm und $\Delta z = 3.7$ mm). Die Charakteristik der Einschwingphase ist in guter Näherung vergleichbar, siehe Abbildung 4.2.

Tabelle 4.1: Endposition von verschiedenen Elementlängen

Endposition	y / m	z / m
Simulation mit 5 m-Elementen	50.5052	25.778
Simulation mit 0.5 m-Elementen	50.5053	25.7743

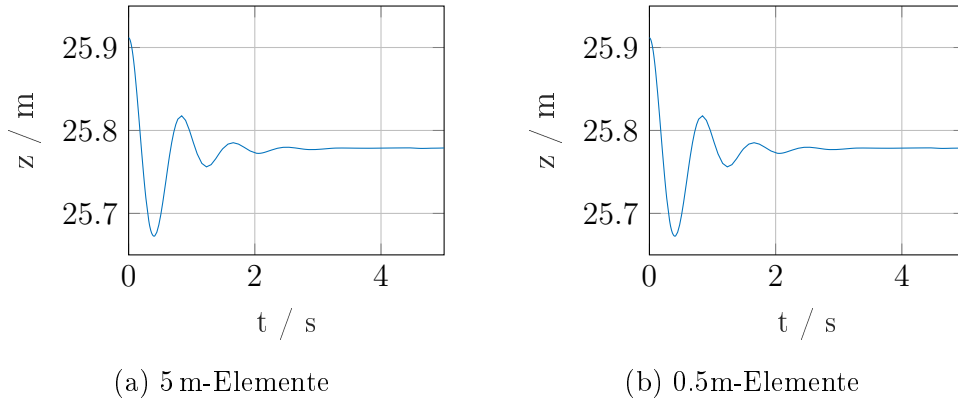


Abbildung 4.2: Endpositionen von verschiedenen Methoden

4.1.2 Ideale Seilkurve

Um die Feder- und Dämpfungskonstante des sphärischen Gelenkes bestimmen zu können, wird das System mit 0.001 kg belastet und die einzelnen Variablen so lange angepasst bis der ideale Seildurchhang (entspricht dem unbelasteten, frei hängenden Seil) erreicht wird [DD11].

Mathematisch lässt sich dieser relativ einfach bestimmen, für die so genannte Seilgleichung (Gleichung 4.1) kann z_0 schnell durch die Randbedingungen ermittelt und der Krümmungsradius a durch die Gleichung 4.2 beschrieben werden. Für die vereinfachte Ermittlung werden die beiden Seile gleich weit abgewickelt ($l_1 = 55 \text{ m}, l_2 = 55 \text{ m} \Rightarrow l_g = 110 \text{ m}$), das Seil links bei $y = 0 \text{ m}, z = 33 \text{ m}$ befestigt und rechts bei $y = 100 \text{ m}$ auf gleicher Höhe $z, w = 100 \text{ m}$ entspricht dabei dem Abstand zwischen den beiden Aufhängungen.

Die für das aktuelle Seilroboter-System ideale Seilgleichung entspricht Gleichung 4.3 und ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

$$z(y) = a \cdot \cosh\left(\frac{y - y_0}{a}\right) + z_0 \quad (4.1)$$

$$l_g = 2 \cdot a \cdot \sinh\left(\frac{w}{2 \cdot a}\right) \quad (4.2)$$

$$z(y) = 65.4964 \cdot \cosh\left(\frac{y - 50}{65.4964}\right) - 58.5265 \quad (4.3)$$

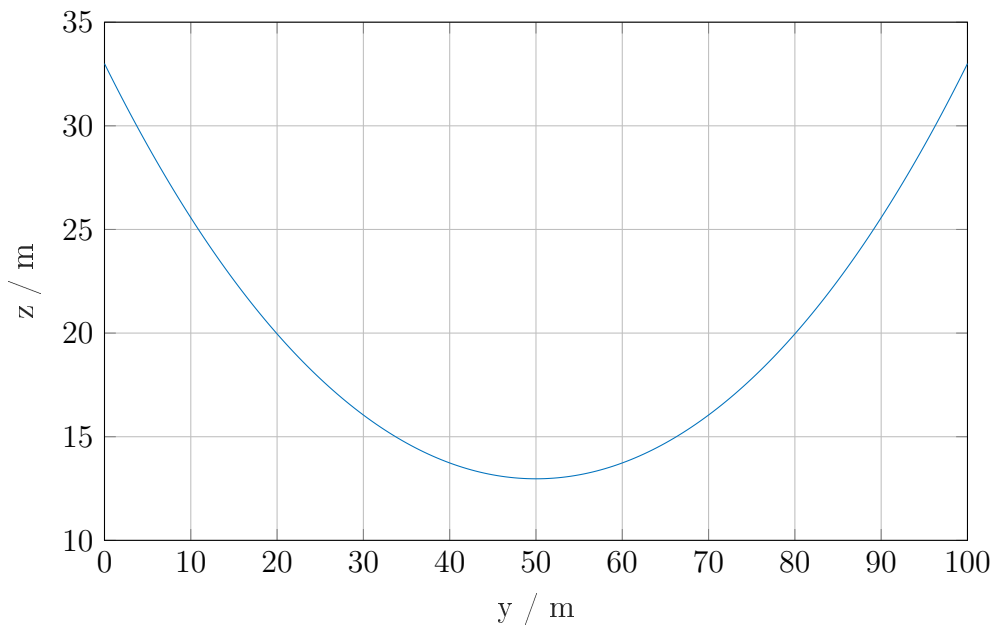


Abbildung 4.3: Ideale Seilkurve (Gleichung 4.3)

Im Gegensatz zum gestreckten Seil, bei dem sich die Manipulatorplattform auf einer Höhe von $z = 10.087$ m befindet, pendelt sich die Plattform für $yp = 50$ m beim durchhängenden Seil auf einer Höhe von $z_p = 12.9899$ m ein. Mit diesem Wert wird die Simulation in Simscape Multibody verglichen und die Dämpfungs- und Federkonstanten so weit angepasst, bis sich das Seilroboter-Modell auch an der errechneten Manipulatorendposition zufriedenstellend annähert.

4.2 Simulationsergebnisse und Vergleich mit der Berechnung

Simscape Multibody ist eine Anwendung von Matlab, das Modell wird dabei in einer eigenen Simulationsumgebung aufgebaut. Die Parameter für die Masse sowie die Feder- und Dämpfungskonstanten werden dem Modell mit Hilfe eines Matlab-Skripts übergeben, auch der Versuchsablauf wird im selben Skript programmiert und die Simulationsergebnisse ausgewertet.

4.2.1 Versuchsanordnung für die Verifizierung der Berechnungsvorschrift

Aus der Berechnung der Seildehnung (Kapitel 2) ist bekannt, dass die Positionsabweichungen zwischen den Manipulatorpositionen mit gedehnten, durchhängenden Seilen zu denen mit ungedehnten und gestreckten Seilen stark von der Position im Arbeitsraum abhängt. In der Nähe der Arbeitsraummitte ($y \sim 50$ m) wird sie größer und ab einer Höhe von $z \geq 25$ m steigt sie exponentiell.

Um geeignete Versuchspositionen für die Verifizierung der Berechnungsvorschrift zu finden wird der gültige Arbeitsraum zuerst halbiert (die beiden Hälften verhalten sich symmetrisch) eine Arbeitsraumhälfte entspricht hier einem Versuchsquadranten. In der linken Hälfte werden dann fünf Positionen gewählt, die möglichst gleichmäßig über den Raum verteilt sind. Für die gewählten Positionen werden die Positionsabweichungen mit Hilfe der Berechnungsvorschrift ermittelt. Treten hier von einer Position zu ihren benachbarten Positionen Sprünge von mehr als 0.15 m auf ($\epsilon = 0.15 \text{ m} \sim 1\%$ der gesamten Arbeitsraumlänge) wurde der Arbeitsraum in zu wenige Quadranten unterteilt und die Versuchsanordnung kann nicht für eine zuverlässige Verifizierung verwendet werden.

Im nächsten Schritt wird der Versuchsquadrant wiederum in vier gleich große Rechtecke unterteilt (siehe Abbildung 4.4). In den neuen Quadranten werden wieder fünf Versuchspositionen gleichmäßig, flächenzentriert verteilt. Die Positionsabweichungen der nun 20 Positionen werden wieder mit Hilfe der Berechnungsvorschrift ermittelt. Sind die Sprünge der Abweichung von Position zu Position noch immer größer als ϵ müssen die vier Quadranten wieder jeweils in vier gleich große Rechtecke unterteilt werden (gesamt 16 Versuchsquadranten). Der Vorgang wird solange wiederholt bis alle Unterschiede zwischen den Positionsabweichungen zweier benachbarter Positionen kleiner als ϵ sind.

Für den behandelten Seilroboter reichen 4 Quadranten und die daraus folgenden 20 Positionen (siehe Abbildung 4.4) aus um die Berechnungsvorschrift aus Kapitel 3 verifizieren zu können. Würden Arbeitsräume von beispielsweise 500 m Länge und 100 m Höhe gewählt, müssten die Quadranten weiter unterteilt werden.

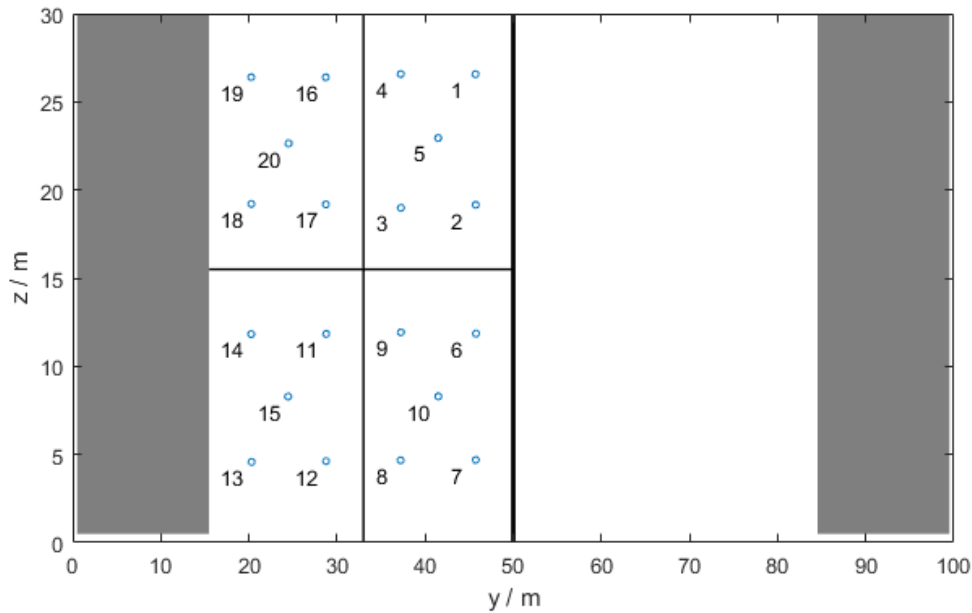


Abbildung 4.4: Ausgangspositionen für die Versuche zum Verifizieren der Berechnung mittels Simulation

Da sich in dem Modell von Simscape Multibody mehrere Seilelemente zu einem Seil zusammensetzen, kann das ganze Seil nur so genau nachgestellt werden wie es das kleinste verwendete Element zulässt. In diesem Fall ist das kleinste Seilelement 0.1 m lang, gleichmäßig über den Raum verteilten Ausgangspositionen aus Abbildung 4.4 können dadurch nicht exakt mit Simscape Multibody simuliert werden (in anderen Simulationsprogrammen besteht dieses Problem nicht). Stattdessen werden die Seillängen zur Erreichung dieser Positionen kurzerhand auf eine Kommastelle gerundet.

In Tabelle 4.2 sind links die exakten, gleichmäßig über die linke Arbeitsraumhälfte verteilten Ausgangspositionen (Abbildung 4.4) aufgelistet und rechts daneben befinden sich die daraus errechneten, exakten Seillängen. Rundet man diese Seillängen auf eine Kommastelle, ergibt das für Simscape Multibody verwendbare Ausgangspositionen die nur leicht von den Exakten abweichen.

Tabelle 4.2: Verwendete Ausgangspositionen für Simscape Multibody

Nr	Exakte Ausgangspositionen / m		Exakte Seillängen / m		Gerundete Seillängen / m		Verwendete Ausgangspositionen / m	
	yp0	zp0	l1	l2	l1	l2	yp0	zp0
1	45.75	26.375	46.2272	54.6530	46.2	54.7	45.7118	26.5675
2	45.75	19.125	47.8077	55.9962	47.8	56.0	45.7442	19.1516
3	37.25	19.125	39.7502	64.2657	39.8	64.3	37.2477	18.9830
4	37.25	26.375	37.8345	63.0988	37.8	63.1	37.2361	26.5752
5	41.50	22.750	42.7471	59.3912	42.7	59.4	41.4747	22.9481
6	45.75	11.875	50.3917	58.2179	50.4	58.2	45.7646	11.8553
7	45.75	4.625	53.8350	61.2226	53.8	61.2	45.7450	4.6914
8	37.25	4.625	46.8263	68.8673	46.8	68.9	37.2151	4.6684
9	37.25	11.875	42.8232	66.2105	42.8	66.2	37.2470	11.9221
10	41.50	8.250	48.3199	63.5202	48.3	63.5	41.5032	8.2889
11	28.75	11.875	35.6767	74.3157	35.7	74.3	28.7700	11.8357
12	28.75	4.625	40.3943	76.6923	40.4	76.7	28.7463	4.6170
13	20.25	4.625	34.8598	84.6475	34.9	84.6	20.3043	4.5756
14	20.25	11.875	29.2631	82.5005	29.3	82.5	20.2612	11.8239
15	24.50	8.250	34.8255	79.4532	34.8	79.5	24.4539	8.2858
16	28.75	26.375	29.5034	71.5573	29.5	71.6	28.7185	26.3903
17	28.75	19.125	31.9230	72.5884	31.9	72.6	28.7343	19.1780
18	20.25	19.125	24.5475	80.9480	24.5	80.9	20.2772	19.2092
19	20.25	26.375	21.3062	80.0247	21.3	80.0	20.2685	26.3949
20	24.50	22.750	26.5577	76.1926	26.6	76.2	24.5056	22.6409

4.2.2 Simulation mit Seildehnung ohne Durchhang

Um die Ergebnisse der iterativen Methode aus Kapitel 2 möglichst genau in der Simulation nachzustellen wird das Modell vorerst ohne Seildurchhang modelliert. Dafür werden die Freiheitsgrade eines Seilelements auf einen translatorischen Freiheitsgrad in Seilrichtung beschränkt. Die Positionsabweichungen der Simulation zu den berechneten Endpositionen sind in Abbildung 4.5 und 4.6, beziehungsweise in Tabelle 4.3 dargestellt. Als Ausgangsposition werden jeweils die geraden, ungedehnten und gerundeten Seillängen aus Tabelle 4.2 verwendet. In den Abbildungen wird jeweils nur die linke Arbeitsraumhälfte dargestellt und die Abweichungen nur für die simulierten Positionen aus Tabelle 4.2 angezeigt.

Schnell wird ersichtlich, dass die Berechnung durchaus legitime Ergebnisse liefert, die Positionsabweichungen in y-Richtung ist bis auf eine vernachlässigbare Ausnahme kleiner als -3.7 mm. In z-Richtung geht die Abweichung von 26 mm bis -28.6 mm, die größeren Sprünge in z-Richtung basieren auf den Einfluss der Dehnung auf die Höhe der Manipulatorplattform. Dehnen sich beide Seile in etwa gleich bleibt die y-Position gleich die z-Position geht aber bedeutend nach unten.

Durch die geringen Standardabweichungen $\sigma_y = 0.88 \text{ mm}$ und $\sigma_z = 3.9 \text{ mm}$, werden die Ergebnisse verifiziert.

Schlussfolgernd können die in Tabelle 4.3 aufgelisteten Positionsabweichungen vernachlässigt werden und die Berechnung aus Kapitel 2.2 erweist sich als vertrauenswürdig.

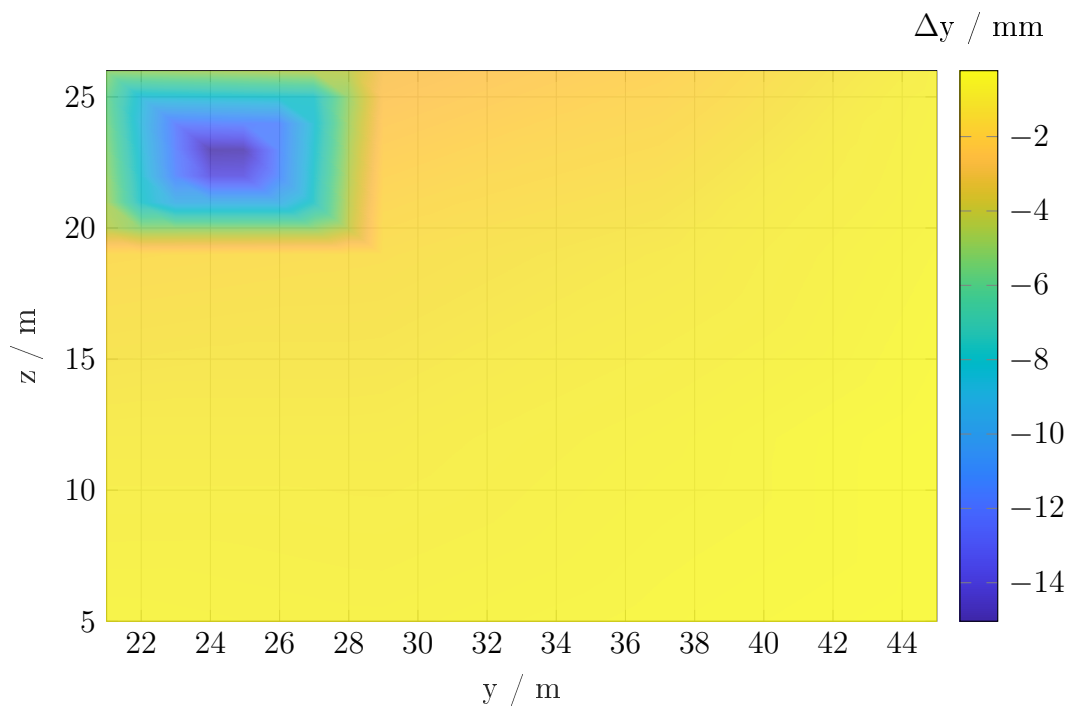


Abbildung 4.5: Positionsabweichung Δy der Simscape-Simulation mit Seildehnung ohne Durchhang zu den berechneten Endpositionen

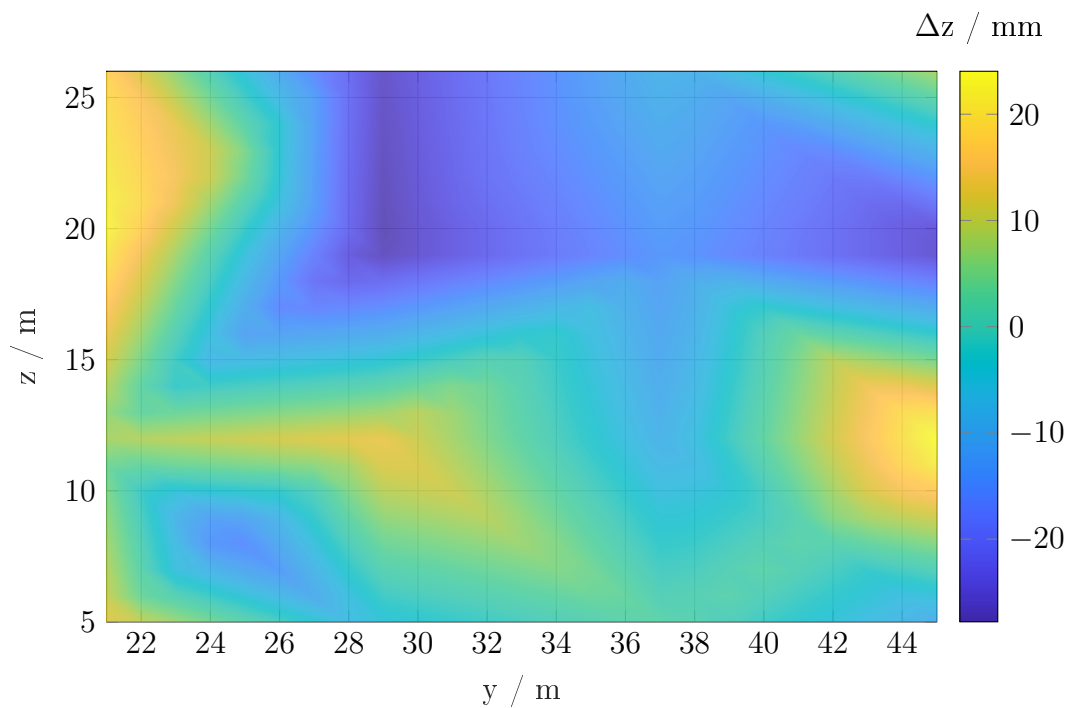


Abbildung 4.6: Positionsabweichung Δz der Simscape-Simulation mit Seildehnung ohne Durchhang zu den berechneten Endpositionen

Tabelle 4.3: Berechnung und Simscape-Simulation mit Seildehnung ohne Durchhang

Nr	Endposition Berechnung / m		Endposition Simulation / m		Pos.-abweichung Simulation / mm	
	ypr	zpr	yps	zps	Δy	Δz
1	45.7081	26.4025	45.7075	26.4152	-0.6	12.8
2	45.7425	19.1110	45.7421	19.0833	-0.4	-27.7
3	37.2429	18.9473	37.2419	18.9338	-1.0	-13.5
4	37.2260	26.4278	37.2239	26.4205	-2.1	-7.3
5	41.4700	22.8789	41.4691	22.8614	-0.9	-17.5
6	45.7635	11.8348	45.7632	11.8623	-0.2	27.5
7	45.7441	4.6775	45.7440	4.6668	-0.2	-10.7
8	37.2127	4.6557	37.2123	4.6576	-0.4	1.9
9	37.2437	11.9035	37.2431	11.8945	-0.6	-9.0
10	41.5013	8.2730	41.5009	8.2753	-0.4	2.3
11	28.7653	11.8208	28.7644	11.8351	-0.9	14.2
12	28.7428	4.6064	28.7422	4.6008	-0.6	-5.6
13	20.3003	4.5678	20.2998	4.5851	-0.5	17.4
14	20.2559	11.8136	20.2550	11.8224	-0.9	8.8
15	24.4495	8.2753	24.4488	8.2578	-0.7	-17.5
16	28.7039	26.2818	28.7011	26.2549	-2.8	-26.8
17	28.7271	19.1494	28.7256	19.1208	-1.5	-28.6
18	20.2693	19.1904	20.2676	19.2165	-1.7	26.0
19	20.2523	26.3259	20.2486	26.3464	-3.7	20.5
20	24.4953	22.6018	24.4788	22.6114	-16.6	9.6

4.2.3 Simulation mit Seildehnung und Durchhang

Zur Simulation des Durchhangs muss das Gelenk des Seilelements (Abbildung 4.1b) alle rotatorischen Freiheitsgrade besitzen und darf nur noch in den beiden translatorischen Richtungen quer zur Seilrichtung gesperrt sein. Um einen realitätsnahen Seildurchhang simulieren zu können, werden die Konstanten aus Kapitel 4.1.2 angewendet.

Trotz einer Last von $m = 1000$ kg beeinflusst der Seildurchhang die Endposition markant, hat ja ein Seil von 50 m Länge ein Eigengewicht von 225 kg. Je länger das Seil ist und je geringer die Seilkräfte sind, desto wichtiger wird die Berücksichtigung des Seildurchhangs. Neben der Höhenänderung wird bei der Simulation mit Seildurchhang auch die Abweichung in horizontaler y-Richtung relevanter.

Die Simulationen werden wieder mit den gleichen Seillängen, beziehungsweise Ausgangspositionen aus Tabelle 4.2 durchgeführt.

Die Positionsabweichungen der Simulation zu den berechneten Endpositionen sind in Abbildung 4.7 und 4.8, sowie in Tabelle 4.4 dargestellt.

Die Abweichungen in y- und in z-Richtung sind etwas größer als bei der Simulation ohne Seildurchhang, wobei sie sich zwischen -72.5 mm und 86.4 mm einpendeln. Die relativ großen Werte verringern die Glaubwürdigkeit der Berechnungsvorschrift.

Die Standardabweichungen ergeben sich aber zu $\sigma_y = 5.95mm$ und $\sigma_z = 10.27mm$, was das Vertrauen in die Berechnung wieder etwas stärkt.

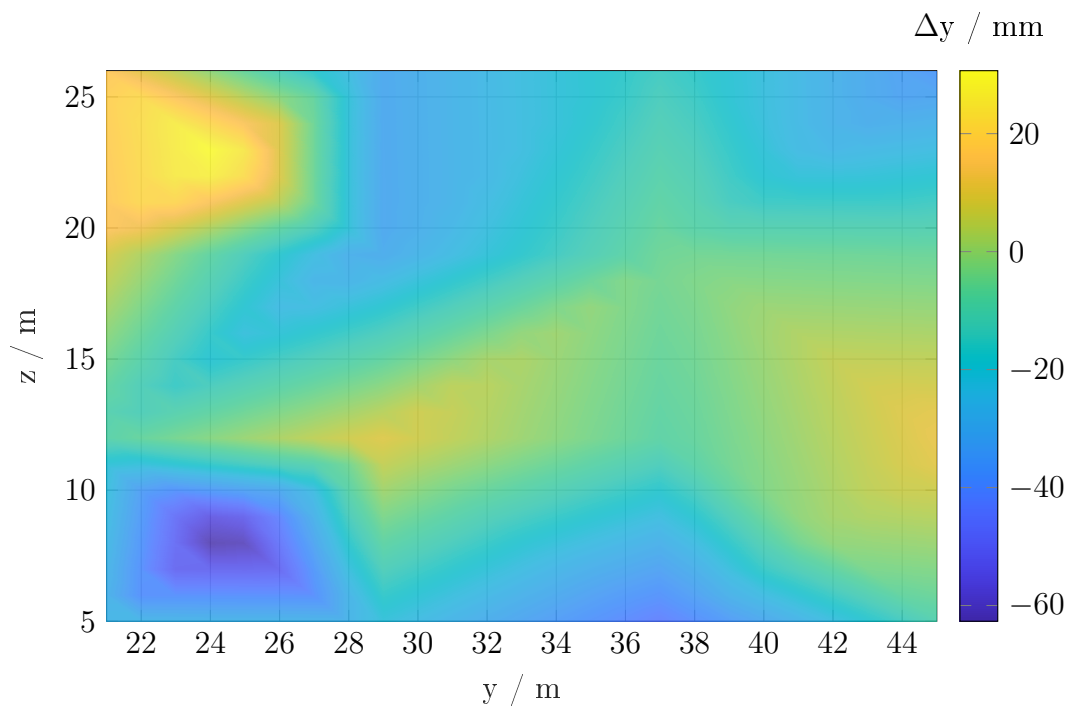


Abbildung 4.7: Positionsabweichung Δy der Simscape-Simulation mit Seildehnung und Durchhang zu den berechneten Endpositionen

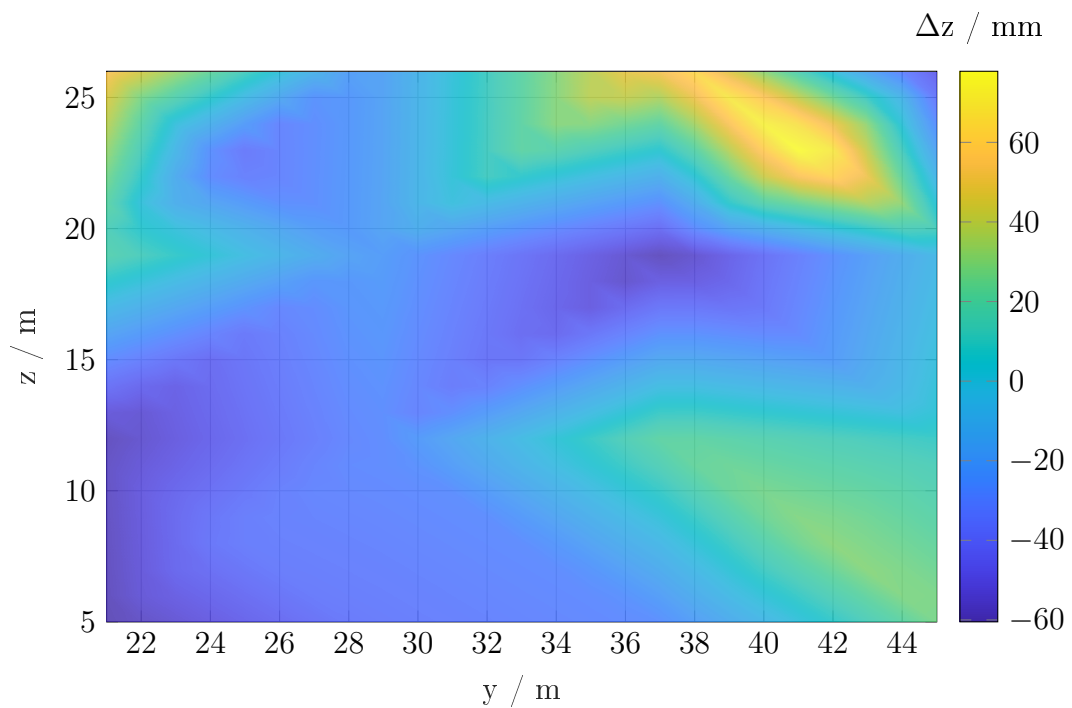


Abbildung 4.8: Positionsabweichung Δz der Simscape-Simulation mit Seildehnung und Durchhang zu den berechneten Endpositionen

Tabelle 4.4: Berechnung und Simscape-Simulation mit Seildehnung und Durchhang

Nr	Endposition Berechnung [m]		Endposition Simulation [m]		Pos.-abweichung Simulation [mm]	
	ypr	zpr	yps	zps	Δy	Δz
1	45.7475	26.2233	45.7092	26.1508	-38.3	-72.5
2	45.7552	19.1545	45.7488	19.1534	-6.4	-1.0
3	37.2704	19.1783	37.2658	19.1182	-4.6	-60.0
4	37.2442	26.2529	37.2296	26.3133	-14.6	60.5
5	41.5032	22.7322	41.4771	22.8186	-26.1	86.4
6	45.7654	11.9650	45.7789	11.9743	13.5	9.3
7	45.7785	4.7640	45.7688	4.7932	-9.8	29.3
8	37.3519	4.8016	37.3062	4.7735	-45.8	-28.0
9	37.3057	11.9986	37.2968	12.0216	-8.9	23.0
10	41.5462	8.3797	41.5461	8.4106	-0.1	30.9
11	28.8852	12.0688	28.8953	12.0413	10.1	-27.5
12	28.9923	4.8892	28.9699	4.8532	-22.4	-36.1
13	20.8427	5.0617	20.8219	4.9970	-20.8	-64.7
14	20.5917	12.2091	20.5820	12.1471	-9.8	-62.0
15	24.7883	8.5456	24.7203	8.5105	-68.0	-35.1
16	28.7471	26.3122	28.7154	26.2914	-31.8	-20.8
17	28.8038	19.2326	28.7718	19.2131	-32.0	-19.5
18	20.3969	19.3381	20.4095	19.3619	12.6	23.9
19	20.2675	26.4066	20.2836	26.4760	16.1	69.4
20	24.5410	22.8357	24.5738	22.7971	32.7	-38.6

Grund für die großen Abweichungen ist unter anderem die empirische Ermittlung der Dämpfer und Federkonstanten des Seiles aus Kapitel 4.1.2. Die charakteristische Einschwingphase, dargestellt in Abbildung 4.2, kann von Position zu Position stark variieren. In Extremfällen befindet sich das System auch nach 20s noch nicht in Ruhelage. In Abbildung 4.9 zum Beispiel steigt die Endposition von 10s bis 20s noch immer langsam aber kontinuierlich (beziehungsweise wandert sie in y-Richtung nach rechts), simuliert wurde hier die Position 15.

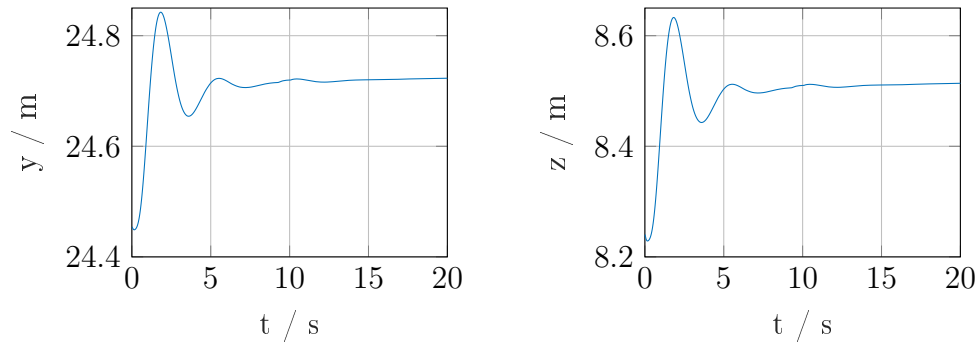


Abbildung 4.9: Einschwingphase des Seilrobotermodells an Position Nr. 15

In anderen Positionen findet kein Überschwingen statt oder das System schwingt auch noch nach 20s weiter. Eine mögliche Begründung sind die variierenden Seillängen je nach Position (unterschiedliche Eigenfrequenzen), welche in Kombination mit den Diskretisierungen der Simulation zu Resonanzen führen. Zusätzlich besteht ein einzelnes Seil grundsätzlich aus unterschiedlich langen Elementen (von 0.1 m bis zu 5 m), was naturgemäß verschiedene Reaktionen und Schwingverhalten zur Folge hat. Verschieden lange Elemente kommen zur Anwendung, da mit dem bevorzugten 5 m - Elementen die erforderlichen Seillängen (Zahlenwerte gerundet auf eine Kommastelle) nicht modelliert werden können.

Die 20 Positionen aus Tabelle 4.4 wurden daher individuell simuliert und die Ergebnisse einzeln betrachtet. Dabei wurden Abweichungen von ± 50 mm in Kauf genommen (in Extremfällen kann die Simulation von 20s bis zu 3 Stunden dauern und das System befindet sich noch immer nicht in Ruhelage).

Als erste Abschätzung, ob die analytische Berechnungsvorschrift aus Kapitel 3 vertrauenswürdige Ergebnisse liefert, kann die Simulation in Simscape Multibody durchaus verwendet werden.

Für die tatsächliche Verifizierung der analytischen Berechnungsvorschrift muss auf eine andere Software zurückgegriffen werden. Im folgenden Kapitel wird die Simulation des Seilroboters mit SimulationX genauer beschrieben.

5 Simulation mit SimulationX

5.1 Programmbeschreibung

SimulationX findet für die Modellierung und Simulation von Komponenten oder Systemen in allen technischen Bereichen Anwendung. Die eingebetteten Bibliotheken sind umfangreich und spezialisiert auf alle wichtigen physikalischen Domänen wie Mechanik, Fluditechnik, Thermik, Elektrotechnik und viele mehr.

Ähnlich wie die meisten Simulationsprogramme, und auch Simscape Multibody, unterstützt die Software den vollen Sprachumfang von Modelica. Alle Modelica-Standard-Bausteine können implementiert und für komplexere Weiterentwicklungen verwendet werden.

Mit der Version 3.8 wurde auch ein neues Element eingeführt, das massebehaftete Seile dreidimensional simulieren kann, was sich für die Anwendung am Seilroboter als ideal erweist [Sim09].

Das Programm ist optimiert komplexe Systeme zeiteffizient zu simulieren und kann daher sehr gut mit dem einfachen Aufbau des Seilroboters umgehen. Die Simulationszeiten sind bis zu 100 mal kürzer als bei Simscape Multibody.

5.2 Modellaufbau

Die Bausteine für Seiltrommeln, Umlenkrollen und allen anderen erforderlichen Komponenten sind im Programm vorhanden und können für die Simulation eines Seilroboters verwendet werden.

Zur Verifizierung der Berechnungen aus Kapitel 3 reicht jedoch ein vereinfachtes Modell.

Das Modell besteht aus einer Bodenplatte mit zwei vertikalen, 33 m hohen Stangen, die einen Abstand von $l = 100$ m zueinander haben. An beiden Stangen wird oben jeweils ein Seil flexibel befestigt, die anderen Enden der Seile werden in der Mitte an der "Manipulatorplattform" fixiert, wobei diese durch einen einfachen Massenpunkt dargestellt wird. Die einzelnen 2D-Elemente werden laut Abbildung 5.1 zum fertigen Modell zusammengebaut.

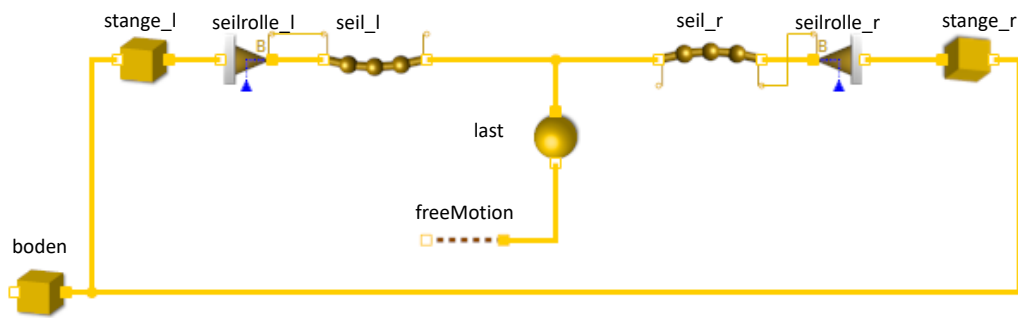


Abbildung 5.1: Modellaufbau der einzelnen Bausteine in SimulationX

Wie in Abbildung 5.2 erkennbar entspricht der Verlauf der Seile Erwartungen aus der Realität.

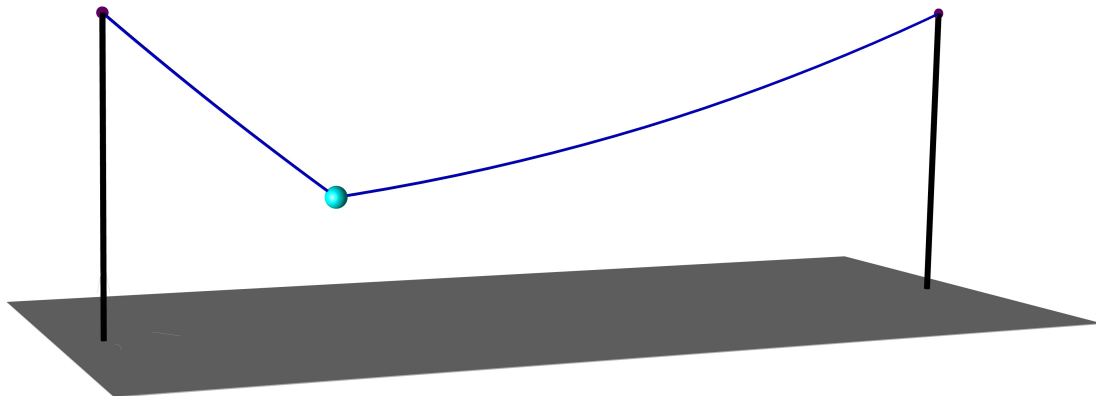


Abbildung 5.2: Dreidimensionaler Modellaufbau in SimulationX

Für die einzelnen Versuche kann die Manipulatorplattform direkt positioniert werden, das heißt die Seile verlaufen anfangs ungedehnt und gestreckt zu der gewünschten Ausgangsposition. Während dem Versuch dehnen sie sich und hängen durch, dadurch verändert sich die Endposition der Manipulatorplattform.

Für die Ansteuerung von mehreren Positionen während eines Simulationsdurchlaufs werden direkt die Seile manipuliert, dafür wird den fiktiven Seilrollen an den Stangenenden die auszuführende Längenänderung der Seile vorgegeben.

5.3 Steuerung des SimX-Modells

Um die Vorzüge von SimulationX voll ausnützen zu können, muss eine Steuerung modelliert werden, die selbstständig dem Modell die Seillängenänderung zum Aus-

gleich der Dehnung und des Seildurchhangs in Abhängigkeit zu den gewünschten Endpositionen übermittelt.

5.3.1 Aufbau der Steuerung

Der Aufbau der Steuerung (Abbildung 5.3) entspricht dem der entwickelten Berechnungsvorschrift aus Kapitel 3.6, dargestellt in Abbildung 3.11.

In Abbildung 5.3 werden links oben die Konstanten definiert, die Erdbeschleunigung g , das längenbezogene Gewicht des Seiles $\rho_q = \rho \cdot g$, der Abstand zwischen den beiden Säulen $l = 100$ m und eine Kennlinie zum Einschalten der Steuerung (um anfängliche Singularitäten zu vermeiden, schwingt sich das Modell zuerst ein bevor die Steuerung nach 2s aktiviert wird). Außerdem werden die Korrekturfaktoren $kf1$ und $kf2$ in den Gleichungen 3.47 und 3.48 definiert.

Die Kennlinienschar Pos übernimmt die Positionssteuerung, dabei wird eine zeitabhängige Kurve für den Verlauf der y- beziehungsweise der z-Position erstellt. Wichtig dabei ist, dass der Seilroboter lange genug in der gewünschten Position verharren kann, da es etwa 10 Sekunden dauert bis sich das System eingeschwungen hat. Außerdem muss der Mittelwert über einen Zeitraum von mindestens 20 s gebildet werden um numerische Fehler zu vermeiden. Die jeweiligen Verweilzeiten ergeben sich dann zu 30 s pro Position.

Auch für den Positionswechsel muss genug Zeit eingeplant werden, um hohe Beschleunigungen zu unterbinden. Die Zeitspanne hängt dabei von der zurückzulegenden Distanz ab (für Distanzen < 30 m sind 10 s ausreichend).

Der mittlere Teil der Steuerung beschreibt im Grunde die Formeln für $l1_{abgewickelt}$ und $l2_{abgewickelt}$ (siehe Gleichung 3.28 und 3.43), wobei SimulationX die Areafunktion von $C1'$ beziehungsweise $C2'$ (Gleichung 3.22 beziehungsweise 3.37) nicht direkt berechnen kann, sondern diese mit Hilfe des Logarithmus Naturalis in einem Zwischenschritt (Definition laut Gleichung 5.1) bestimmen muss.

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (5.1)$$

Die beiden Ausgangslängen zu Beginn der Simulation l_{1-0} beziehungsweise l_{2-0} werden jeweils auf 50 m festgelegt, wobei auch andere Längen in Abhängigkeit der Lastausgangsposition gewählt werden können.

Je nach gewünschter Position (Kurvenschar Pos) ergeben sich Längenänderungen ($\Delta l_1 = l_{1-0} - l_{1abgew}$), die zur Glättung der Unstetigkeitsstellen, beziehungsweise sprunghaften Änderungen von Pos über ein PT_1 -Glied (ein zur Zeit proportionales

Regelglied 1. Ordnung) dem Modell übermittelt werden.

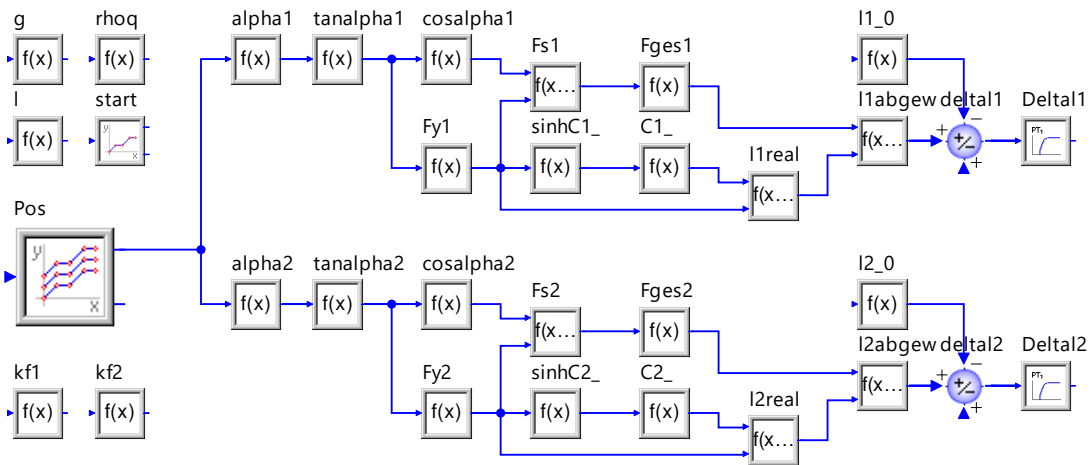


Abbildung 5.3: Simulationssteuerung

5.3.2 Ergebnisse der Simulation und Verifizierung der analytischen Berechnungsvorschrift

Mit Hilfe dieser Steuerung können die 20 exakten Ausgangspositionen aus Tabelle 4.2 angefahren werden. Die Ergebnisse werden dann in eine Text-Datei exportiert, die von Matlab zur Mittelwertbildung der Endpositionen ausgewertet wird.

Die Positionsabweichung des SimX-Modells in y- und z-Richtung von den berechneten Endpositionen wird in Abbildung 5.4 und 5.5 dargestellt. Dabei wird wieder nur die linke Arbeitsraumhälfte betrachtet und die Abweichungen nur bei den simulierten Positionen angezeigt.

In Tabelle 5.1 werden die Mittelwerte mit den, mit Hilfe der Berechnungsvorschrift aus Kapitel 3.2 berechneten, Endpositionen verglichen.

Die Positionsabweichung in y-Richtung erreicht nur links unten signifikante Größen, wobei sie selbst dort maximal 20.1 mm beträgt. In z-Richtung ist 16.2 mm der größte Wert und befindet sich auch wieder im linken unteren Bereich, im restlichen Arbeitsraum ist die Abweichung vernachlässigbar gering. Die Abweichungen links unten sind auf die extreme Position mit einhergehenden Durchhang zurückzuführen, das rechte Seil ist dort länger als 75 m, hängt bedeutend durch und die Schwingungsneigung des Systems steigt.

Mit den minimalen Standardabweichungen $\sigma_y = 1.4 \text{ mm}$ und $\sigma_z = 1.5 \text{ mm}$ kann die analytische Berechnungsvorschrift aus Kapitel 3 als verifiziert betrachtet werden.

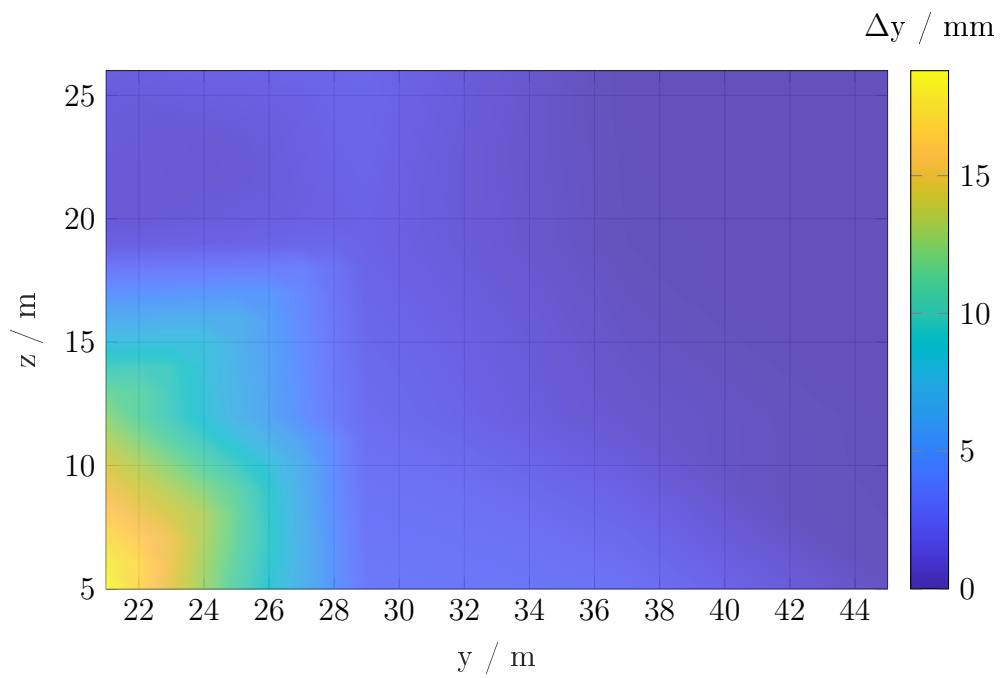


Abbildung 5.4: Positionsabweichung Δy des SimX-Modells mit Steuerung zu den berechneten Endpositionen

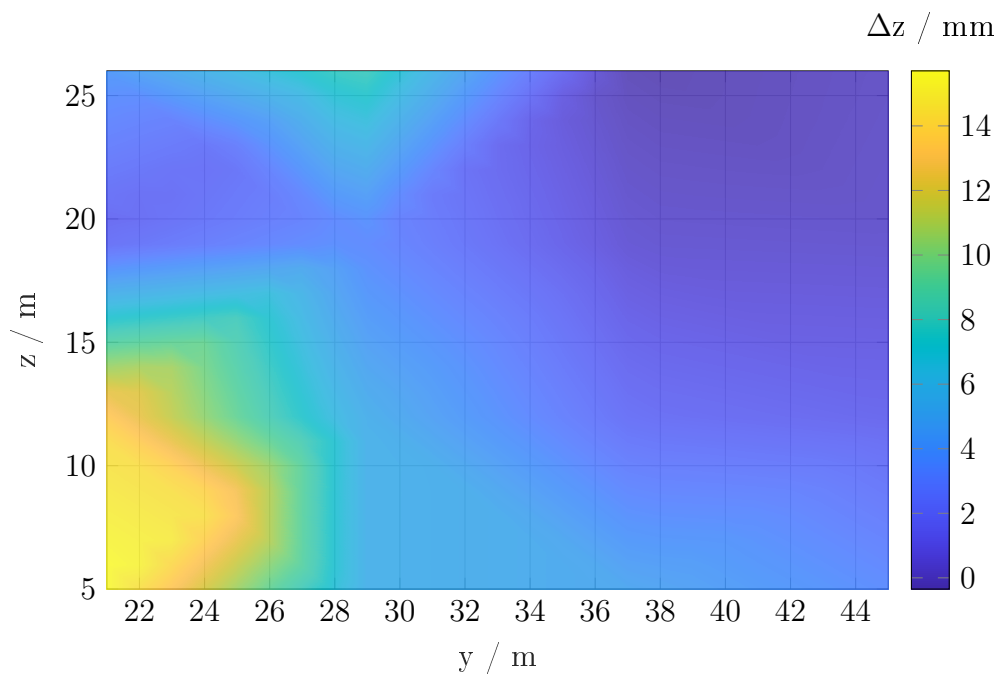


Abbildung 5.5: Positionsabweichung Δz des SimX-Modells mit Steuerung zu den berechneten Endpositionen

Tabelle 5.1: Vergleich der Ergebnisse aus Berechnung und SimulationX (Steuerung)

Nr	Endposition Berechnung / m		Endposition Simulation / m		Pos.-abweichung Simulation / mm	
	ypr	zpr	yps	zps	Δy	Δz
1	45.750	26.375	45.7500	26.3751	0.0	0.1
2	45.750	19.125	45.7500	19.1253	0.0	0.3
3	37.250	19.125	37.2501	19.1254	0.1	0.4
4	37.250	26.375	37.2500	26.3746	0.0	-0.4
5	41.500	22.750	41.5000	22.7499	0.0	-0.1
6	45.750	11.875	45.7500	11.8764	0.0	1.4
7	45.750	4.625	45.7502	4.6284	0.2	3.4
8	37.250	4.625	37.2526	4.6300	2.6	5.0
9	37.250	11.875	37.2506	11.8769	0.6	1.9
10	41.500	8.250	41.5003	8.2533	0.3	3.3
11	28.750	11.875	28.7523	11.8806	2.3	5.6
12	28.750	4.625	28.7532	4.6306	3.2	5.6
13	20.250	4.625	20.2701	4.6412	20.1	16.2
14	20.250	11.875	20.2634	11.8893	13.4	14.3
15	24.500	8.250	24.5127	8.2643	12.7	14.3
16	28.750	26.375	28.7519	26.3836	1.9	8.6
17	28.750	19.125	28.7516	19.1284	1.6	3.4
18	20.250	19.125	20.2509	19.1265	0.9	1.5
19	20.250	26.375	20.2514	26.3792	1.3	4.2
20	24.500	22.750	24.5008	22.7520	0.8	2.0

5.4 Regelung des SimX-Modells unter Berücksichtigung veränderlicher Massen

Die Steuerung wurde bisher nur mit der konstanten Last von $m = 1000 \text{ kg}$ getestet. Die Korrekturfaktoren $kf1$ und $kf2$ können zwar laut Kapitel 3.5 lastabhängig formuliert werden, dazu muss die Last an der Manipulatorplattform zu jeder Zeit bekannt sein.

Unter der Annahme, dass sich die Last zufällig und oft in unbekannter Weise ändern kann, muss ein flexibleres Konzept erstellt werden.

5.4.1 Kraftmessung

Grundvoraussetzung für dieses Konzept ist dabei eine zuverlässige Messung der Seilkräfte. Werner Kraus hat dafür drei Anordnungen in seiner Dissertation “Force Control of Cable-Driven Parallel Robots“ [Kra15] vorgestellt, abgebildet in Abbildung 5.6. Methode (a) verwendet eine Kraftsensor an der Manipulatorplattform, für welchen ein Signalkabel entlang der Seile verlegt oder eine Funkübertragung mit einer unzuverlässigeren Energieversorgung, Akkus oder Batterien, verwendet werden muss. Die zweite und dritte Anordnung sind sehr ähnlich und können einfach verwendet werden.

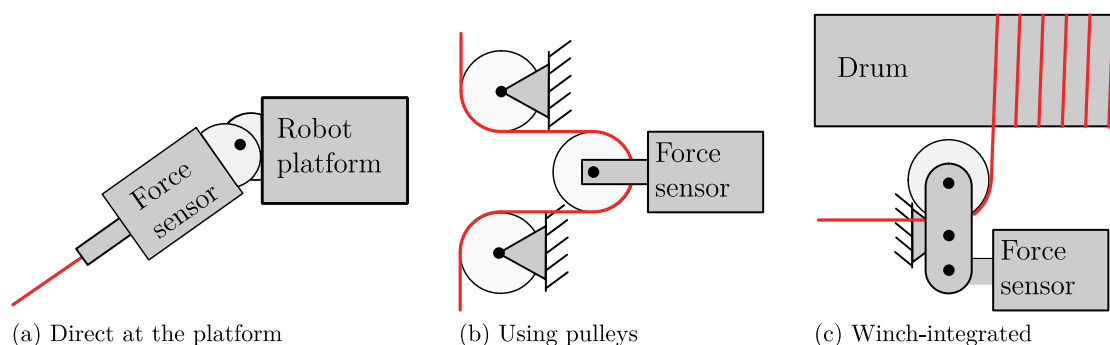


Abbildung 5.6: Konzepte zur Kraftmessung [Kra15]

Da die Kräfte in den oberen Arbeitsbereich rasant steigen, muss angenommen werden, dass die Kraftmessung dort ungenau wird und damit die Positionsgenauigkeit nicht mehr garantiert ist. In Kapitel 2.2 wird der Verlauf der Seilkraft erörtert, dabei wird ersichtlich, dass sich die Seilkraft bis zu einer Höhe $z = 25$ m von ca. 10 kN auf 30 kN erhöht, auf den letzten 5 Metern von $z = 25$ m bis $z = 30$ m springt sie aber von 30 kN auf die maximale Seilkraft 68.49 kN. Die Genauigkeit der Kraftmessensensoren bei Kräften > 30 kN oder den hohen Gradienten der Kraft für geringe Positionsänderungen lassen vermuten, dass die Regelung im Realfall für Höhen > 25 m nur schwer zu realisieren ist. In den meisten Fällen ist die Positionsgenauigkeit in großer Höhen für den Normalbetrieb nicht signifikant.

Für die Simulation der Regelung sind diese Einschränkungen nicht maßgebend, da die Kraft direkt im Seilelement unter idealen Bedingungen gemessen wird.

5.4.2 Aufbau der Regelung

Der Regelkreis zur Berechnung der Seillängenänderung zum Ausgleich der Dehnung und des Seildurchhangs basiert auf der Wiederverwendung der berechneten Winkel (α_1 und α_2) beim nächsten Durchlauf der Seilkurvenberechnung. Dabei werden die

Kraftangriffswinkel am Ende jeder Berechnung neu ermittelt und dadurch an die gemessene Seilkraft angepasst. Nach ca. 20 Wiederholungen stimmen die berechneten Winkel mit denen aus der Simulation näherungsweise überein (Abweichung $\alpha_i < 0.0001^\circ$).

Im Prinzip wird die iterative Berechnung der Seilkurven aus Kapitel 3.2 mit Bausteinen in SimulationX nachgebildet. Im Gegensatz zur iterativen Berechnung wird die Regelung nicht nach 100 Berechnungsdurchläufen beendet, sondern ist dauerhaft aktiv um etwaige Änderungen der Last ausgleichen zu können.

Der Aufbau der Regelung (Abbildung 5.7) basiert wieder auf dem der Berechnungsvorschrift aus Kapitel 3.6, dargestellt in Abbildung 3.11.

Links oben befinden sich wieder die Konstanten und die Kennlinie zum Einschalten der Regelung (vergleichbar mit Kapitel 5.3.1). Die Korrekturfaktoren entfallen, genauso wie die anfängliche Winkelberechnung. Die Winkel α_1 und α_2 werden erst im letzten Schritt des Regelkreises berechnet (\sin_1 und \sin_2). Durch den Baustein *start*, der eine zeitversetzte Aktivierung der Regelung ermöglicht, sind auch keine Startwerte notwendig und der Einschwingvorgang wird von der Regelung ignoriert.

Die Bausteine *Fges01* und *Fges02* verkörpern die Sensoren zur Kraftmessung in den Seilen, da sich in der Simulation die Kraft sehr sprunghaft ändert, wird jeweils ein *PT₁ – Glied* angehängt, um die Spitzen zu glätten.

Neu sind auch die Bausteine *last_zeit* und *last_vorgabe*, dabei handelt es sich um den Verlauf der Last über die gesamte Simulationsdauer. Implementiert sind diese wiederum als *PT₁ – Glieder* die reales Verhalten der Laständerung simulieren sollen. Ein Meilenstein für die reelle Anwendung ist der Baustein *Last_berechnet*: Dieser kann die tatsächliche an der Manipulatorplattform wirkende Last zu jedem Zeitpunkt und jeder Position im Arbeitsraum bestimmen. Dafür wird die gemessene Seilkraft *Fges1* abzüglich des Eigengewichtsanteils mit den aktuellen Winkeln kombiniert (siehe Gleichung 5.2 bis 5.4).

$$Fs1 = Fges1 - Fg1 \quad (5.2)$$

$$Fg1 = \rho_q \cdot (h - zp) \quad (5.3)$$

$$Last_berechnet = \frac{Fs1 \cdot \sin(\alpha_1) + Fs2 \cdot \sin(\alpha_2)}{g} \quad (5.4)$$

Im Gegensatz zu Gleichung 3.26 ist das für die Regelung relevante Eigengewicht (Gleichung 5.3) doppelt so groß, weil die Formeln aus Kapitel 3.1.1 für die Seildehnung erstellt worden sind. Das Seil dehnt sich über die gesamte Länge. Oben wirkt das gesamte Eigengewicht, weiter unten wirkt nur noch der untere Teil des Seiles. Ganz unten wirkt kein Eigengewicht, das heißt das Seil erfährt dort keine Dehnung. Der, zur Dehnung beitragende, Eigengewichtsanteil ist daher oben am größten und wird unten zu null (entspricht einer dreieckigen Streckenlast), für die Berechnung der Dehnung wird der Mittelwert verwendet.

Die für die Seilkurve relevante Kraft ist aber die tatsächlich wirkende Kraft an der Manipulatorplattform, dafür muss von der gemessenen Kraft am oberen Ende des Seiles das gesamte Eigengewicht subtrahiert werden.

Für die Berechnung der Gewichtskraft wird der Seildurchhang wieder vernachlässigt, weil die Abweichungen durch die Gewichtskraftvereinfachung wesentlich kleiner sind als die Abweichungen bei der Kraftmessung. Auch bei großen Seilkräften (für Höhen von $z_p > 25\text{ m}$), spielt die Gewichtskraftvereinfachung keine relevante Rolle, weil der Seildurchhang vernachlässigbar klein wird.

Am Schluss wird die berechnete Seillänge wieder mit der Ausgangslänge ($l_{1-0} = 50\text{ m}$ und $l_{2-0} = 50\text{ m}$) verglichen, die Längenänderung nochmals geglättet ($PT_1 - \text{Glied}$) und dem Modell übermittelt.

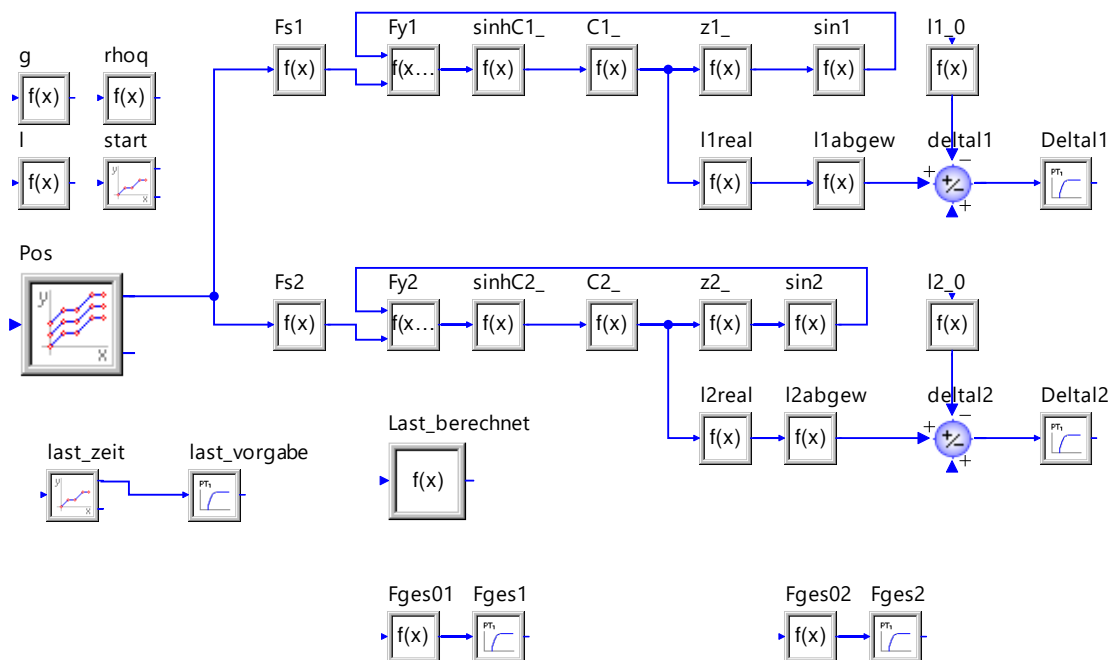


Abbildung 5.7: Simulationsregelung

Die Kennlinienschar *Pos* übernimmt wieder die Positionssteuerung, der zeitliche

Ablauf muss aber etwas angepasst werden. Da mehrere PT_1 – *Glieder* in Reihe geschaltet werden, wird das System träger und reagiert langsamer auf einen Befehl zur Positionsänderung. Um einen gültigen Mittelwert bilden zu können, wird die Einschwingzeit auf 20 s erhöht, wodurch sich die minimalen Verweilzeiten an den jeweiligen Positionen auf 40 s verlängern.

Die benötigte Zeit für den Positionswechsel bleibt gleich und ist wieder distanzabhängig (für Distanzen < 30 m sind 10 s ausreichend).

5.4.3 Ergebnisse der Simulation mit Kraftmessung

Mit Hilfe dieser Regelung können wieder die exakten 20 Ausgangspositionen aus Tabelle 4.2 angefahren werden. Die Ergebnisse werden dann wieder in einer Text-Datei exportiert, die von Matlab, zur Mittelwertbildung der Endpositionen, ausgewertet wird.

Der Vergleich der Mittelwerte mit den Endpositionen aus Kapitel 3.2 wird in Tabelle 5.2 aufgelistet und in Abbildung 5.8 sowie 5.9 über die linke Arbeitsraumhälfte grafisch dargestellt.

Die Positionsabweichungen sind im Vergleich zur Steuerung minimal kleiner, was unter anderem auf die längere Einschwingdauer und die dreifache Glättung durch PT_1 – *Glieder* zurückzuführen ist.

Die größten Abweichungen passieren, wie in Kapitel 5.3, wieder im linken unteren Bereich.

Wie genau die Regelung in der Realität funktioniert, kann nur durch Versuche eruiert werden, wahrscheinlich sind größere Fehler zu erwarten, nicht zuletzt durch die Ungenauigkeit der Kraftmessung. Im idealen Fall der Simulation sind die Ergebnisse jedoch eindeutig: Die größten Abweichungen beträgt 8.8 mm in y- beziehungsweise 6.0 mm in z-Richtung, was zu den Standardabweichungen $\sigma_y = \mathbf{0.64\ mm}$ und $\sigma_z = \mathbf{0.7\ mm}$ führt.

Außerdem wurden versuchsweise die gleichen Positionen mit variierender Last angefahren (an Pos 7 wird die Last auf 1500 kg erhöht und an Pos 13 auf 500 kg verringert). Die Positionsabweichungen aus Tabelle 5.2 wurden dennoch nicht überschritten.

Wendet man die entwickelte Berechnungsvorschrift am SimulationX-Modell an können die gewünschten Positionen mit vernachlässigbaren Abweichungen angefahren werden. Damit wird die Berechnungsvorschrift erneut verifiziert.

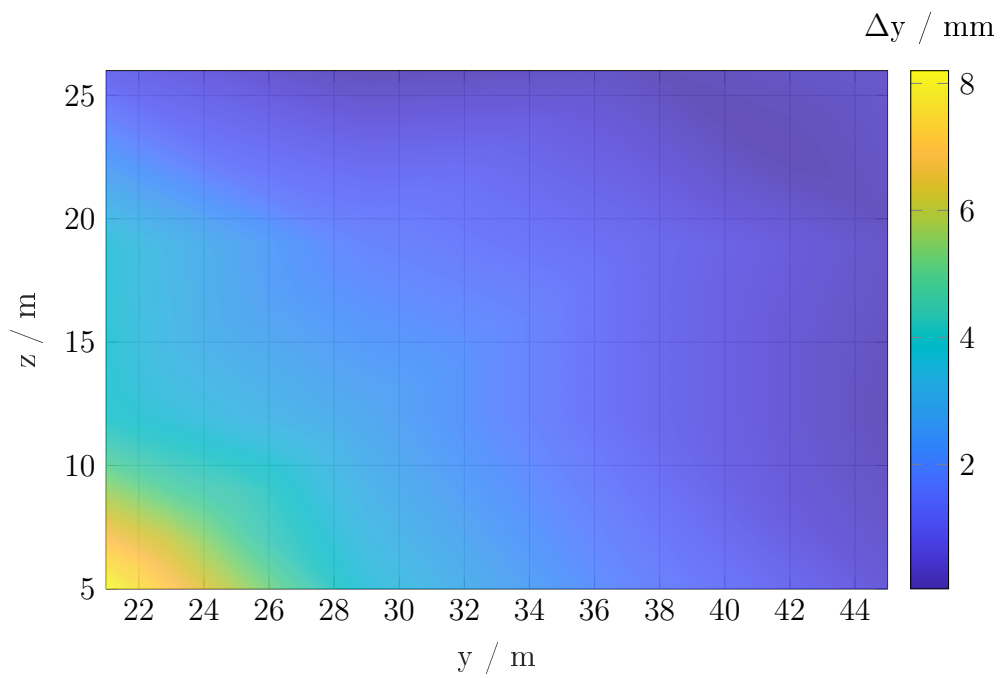


Abbildung 5.8: Positionsabweichung Δy des SimX-Modells mit Kraftmessung zu den berechneten Endpositionen

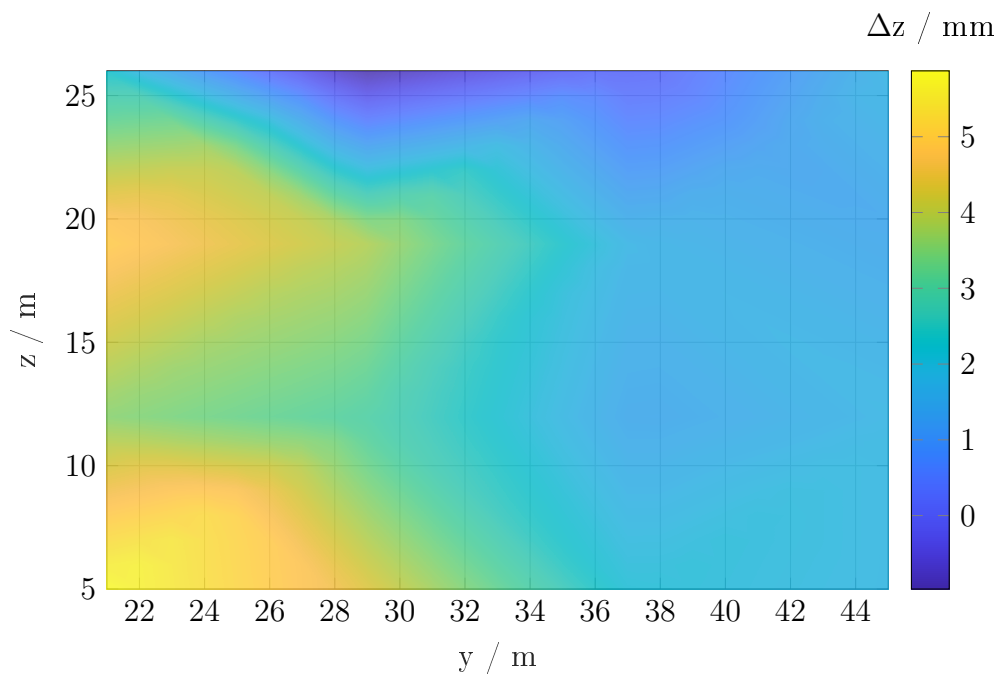


Abbildung 5.9: Positionsabweichung Δz des SimX-Modells mit Kraftmessung zu den berechneten Endpositionen

Tabelle 5.2: Vergleich der Ergebnisse aus Berechnung und SimulationX (Steuerung)

Nr	Endposition Berechnung / m		Endposition Simulation / m		Pos.-abweichung Simulation / mm	
	ypr	zpr	yps	zps	Δy	Δz
1	45.750	26.375	45.7504	26.3769	0.4	1.9
2	45.750	19.125	45.7502	19.1264	0.2	1.4
3	37.250	19.125	37.2510	19.1267	1.0	1.7
4	37.250	26.375	37.2501	26.3749	0.1	-0.1
5	41.500	22.750	41.5000	22.7513	0.0	1.3
6	45.750	11.875	45.7500	11.8768	0.0	1.8
7	45.750	4.625	45.7504	4.6268	0.4	1.8
8	37.250	4.625	37.2518	4.6271	1.8	2.1
9	37.250	11.875	37.2510	11.8764	1.0	1.4
10	41.500	8.250	41.5006	8.2520	0.6	2.0
11	28.750	11.875	28.7528	11.8780	2.8	3.0
12	28.750	4.625	28.7538	4.6295	3.8	4.5
13	20.250	4.625	20.2588	4.6310	8.8	6.0
14	20.250	11.875	20.2541	11.8786	4.1	3.6
15	24.500	8.250	24.5047	8.2552	4.7	5.2
16	28.750	26.375	28.7500	26.3737	0.0	-1.3
17	28.750	19.125	28.7517	19.1290	1.7	4.0
18	20.250	19.125	20.2539	19.1301	3.9	5.1
19	20.250	26.375	20.2509	26.3772	0.9	2.2
20	24.500	22.750	24.5013	22.7539	1.3	3.9

5.5 Vergleich zu Simscape Multibody

Im Vergleich zu Simscape Multibody ist bei SimulationX das Seil ein Element, das beliebig die Länge ändern kann (die Länge ist nicht mehr an die Anzahl der Elemente gebunden). Als Diskretisierung werden für den Seilroboter 20 Elemente pro Seil gewählt (versuchswise wurden auch 100 Elemente probiert, was den Rechenaufwand erhöhte, aber zum gleichen Ergebnis führte), die Seillänge kann nun von außen geändert werden, ohne die Anzahl der Elemente zu beeinflussen.

Das erleichtert das Programmieren des Versuchsablaufs, in nur einem Simulationsdurchgang können alle gewünschten Positionen angesteuert werden (bei Simscape Multibody musste das Programm für jede Position einzeln angepasst und neu gestartet werden). Die Zeit, die für jede Position gebraucht wurde, um die Seile in die

gewünschte Länge zu bringen, fällt hier weg. Außerdem ist das Seilelement auf die Software abgestimmt, was die Simulationsdauer weiter verkürzt.

Bei Simscape Multibody kann man für jede Position, inklusive manueller Seillängenänderung, mindestens 5 min Prozessdauer annehmen (in Extremfällen 3 Stunden), bei SimulationX wird der gesamte Simulationsprozess (20 Positionen) innerhalb von etwa 18min durchgerechnet und der Bediener muss nur anfangs die gewünschten Positionen in einer Liste eintragen.

Simscape Multibody erweist sich daher als eher ungeeignet für diese Anwendung, in dieser Arbeit wird die Software jedoch nur für eine qualitative Verifizierung der Ergebnisse von SimulationX, bzw. der Berechnungsvorschrift, verwendet, wobei die Ineffizienz des Modells für einen einmaligen Versuchsdurchlauf nebensächlich ist.

Die Ergebnisse vom SimulationX-Modell werden abschließend noch mit den Ergebnissen aus Kapitel 4 (Simscape Multibody) verglichen, dafür werden die angepassten Ausgangspositionen aus Tabelle 4.2 verwendet um einen direkten Vergleich zu ermöglichen.

In Tabelle 5.3 stehen sich die Endpositionen aus den beiden Simulationsprogrammen gegenüber. Der Vergleich wird außerdem in Abbildung 5.10 und 5.11 über die linke Arbeitsraumhälfte grafisch dargestellt.

Die Abbildungen bzw. die Werte aus der Tabelle sind denen aus Kapitel 4 (Abbildung 4.7 und 4.8, bzw. Tabelle 4.4) sehr ähnlich. Die Abweichungen können hauptsächlich durch die Ungenauigkeit des Simscape-Multibody-Modells begründet werden, die genaue Erklärung zur Ungenauigkeit findet sich in Kapitel 4.2.3.

Die größte Abweichung zwischen den beiden Simulationsprogrammen beläuft sich auf 83.0 mm und die Standardabweichungen betragen $\sigma_y = 6.67mm$ und $\sigma_z = 11.03mm$, was bei dem verwendeten Arbeitsraum und Gewicht, nicht besonders viel ist.

Für die tatsächliche Verifizierung der Berechnungsvorschrift wird auf das Seilrobotermodell von SimulationX vertraut.

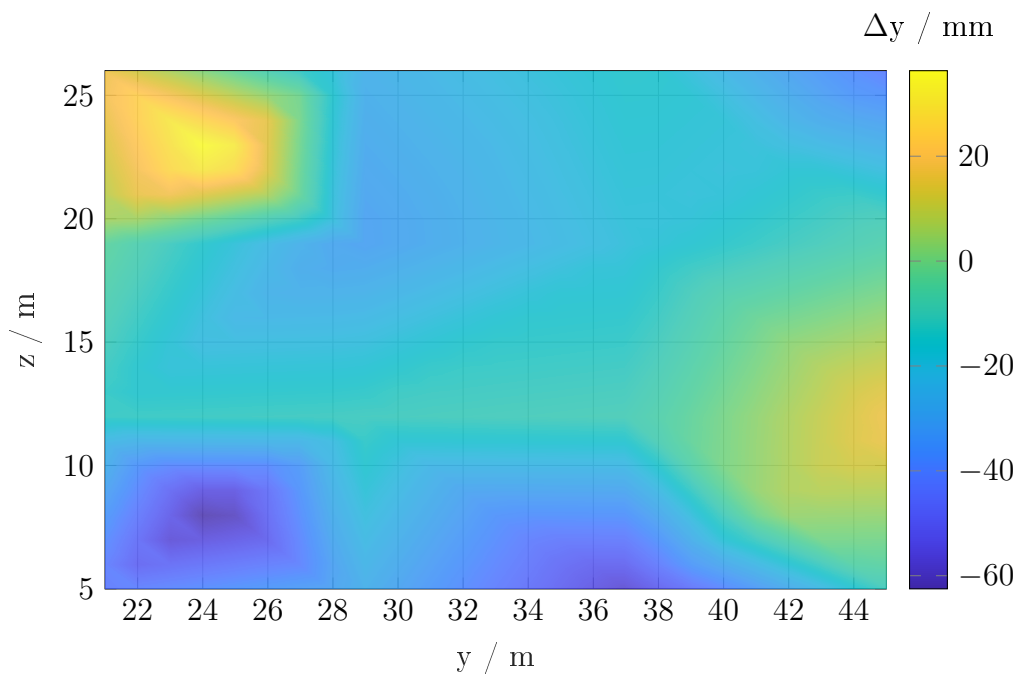


Abbildung 5.10: Positionsabweichung Δy des Simscape-Modells zum SimX-Modell mit Kraftmessung

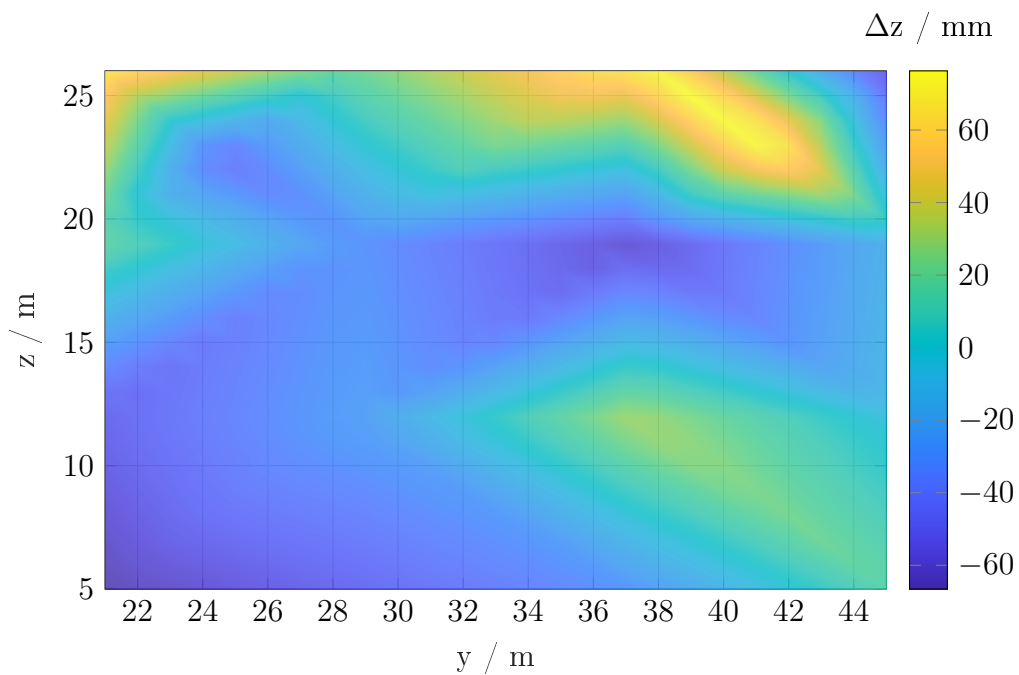


Abbildung 5.11: Positionsabweichung Δz des Simscape-Modells zum SimX-Modell mit Kraftmessung

Tabelle 5.3: Vergleich von SimulationX mit Simscape Multibody

Nr	Endposition SimulationX [m]		Endposition Simscape [m]		Pos.-abweichung Simscape [mm]	
	yps	zps	yps	zps	Δy	Δz
1	45.7555	26.2297	45.7092	26.1508	-46.3	-78.9
2	45.7552	19.1643	45.7488	19.1534	-6.4	-10.9
3	37.2846	19.1783	37.2658	19.1182	-18.9	-60.1
4	37.2442	26.2387	37.2296	26.3133	-14.6	74.6
5	41.4965	22.7372	41.4771	22.8186	-19.5	81.5
6	45.7588	11.9805	45.7789	11.9743	20.1	-6.2
7	45.7789	4.7770	45.7688	4.7932	-10.2	16.3
8	37.3663	4.8044	37.3062	4.7735	-60.1	-30.9
9	37.3062	11.9885	37.2968	12.0216	-9.4	33.1
10	41.5405	8.3868	41.5461	8.4106	5.6	23.8
11	28.9064	12.0646	28.8953	12.0413	-11.1	-23.3
12	28.9960	4.9043	28.9699	4.8532	-26.1	-51.1
13	20.8626	5.0671	20.8219	4.9970	-40.7	-70.1
14	20.5945	12.2001	20.5820	12.1471	-12.5	-53.1
15	24.7859	8.5547	24.7203	8.5105	-65.7	-44.2
16	28.7414	26.2686	28.7154	26.2914	-26.0	22.8
17	28.8039	19.2428	28.7718	19.2131	-32.1	-29.7
18	20.4104	19.3383	20.4095	19.3619	-0.9	23.6
19	20.2676	26.3930	20.2836	26.4760	16.0	83.0
20	24.5345	22.8411	24.5738	22.7971	39.3	-44.0

6 Zusammenfassung und Diskussion

6.1 Diskussion der Ergebnisse

Eine der bedeutendsten Erkenntnisse dieser Arbeit ist wohl die Erfassung der Wichtigkeit des Seildurchhangs. Hängende Seilroboter, die nicht nach unten mit zusätzlichen Seilen verspannt sind, erfahren eine Positionsabweichung aufgrund der Seildehnung und des Seildurchhangs, wobei der Seildurchhang meist den größeren Anteil bildet.

In Tabelle 6.1 wird die einfache inverse Kinematik, basierend auf ungedehnten, geraden Seilen (Tabelle 4.2), mit den Endpositionen unter Berücksichtigung der Seildehnung (Kapitel 2) und den Endpositionen unter Berücksichtigung der Dehnung und des Durchhangs (Kapitel 3) verglichen.

Tabelle 6.1: Vergleich der einfachen inversen Kinematik mit den Endpositionen

Nr	Einfache inverse Kinematik / m		Mit Dehnung ohne Durchhang / mm		Mit Dehnung und Durchhang / mm	
	yp	zp	Δy	Δz	Δy	Δz
1	45.75	26.375	-3.5	-156.3	-2.5	-151.4
2	45.75	19.125	-1.7	-40.5	5.3	29.5
3	37.25	19.125	-4.9	-36.3	20.3	53.4
4	37.25	26.375	-9.9	-139.4	-5.8	-122.1
5	41.5	22.75	-4.5	-66.9	3.2	-17.8
6	45.75	11.875	-1.1	-20.5	15.4	93.4
7	45.75	4.625	-0.9	-13.9	28.5	138.9
8	37.25	4.625	-2.4	-12.7	101.9	176.6
9	37.25	11.875	-3.2	-18.5	55.7	123.6
10	41.5	8.25	-1.9	-15.9	46.2	129.7
11	28.75	11.875	-4.8	-14.9	135.2	193.8
12	28.75	4.625	-3.6	-10.5	242.3	264.2
13	20.25	4.625	-3.9	-7.8	592.7	436.7
14	20.25	11.875	-5.3	-10.3	341.7	334.1
15	24.5	8.25	-4.4	-10.5	288.3	295.6
16	28.75	26.375	-14.5	-108.3	-2.9	-62.5
17	28.75	19.125	-7.1	-28.4	53.8	107.6
18	20.25	19.125	-7.9	-18.5	146.9	213.1
19	20.25	26.375	-16.1	-68.5	17.5	31.6
20	24.5	22.75	-10.4	-39.9	41.0	85.8

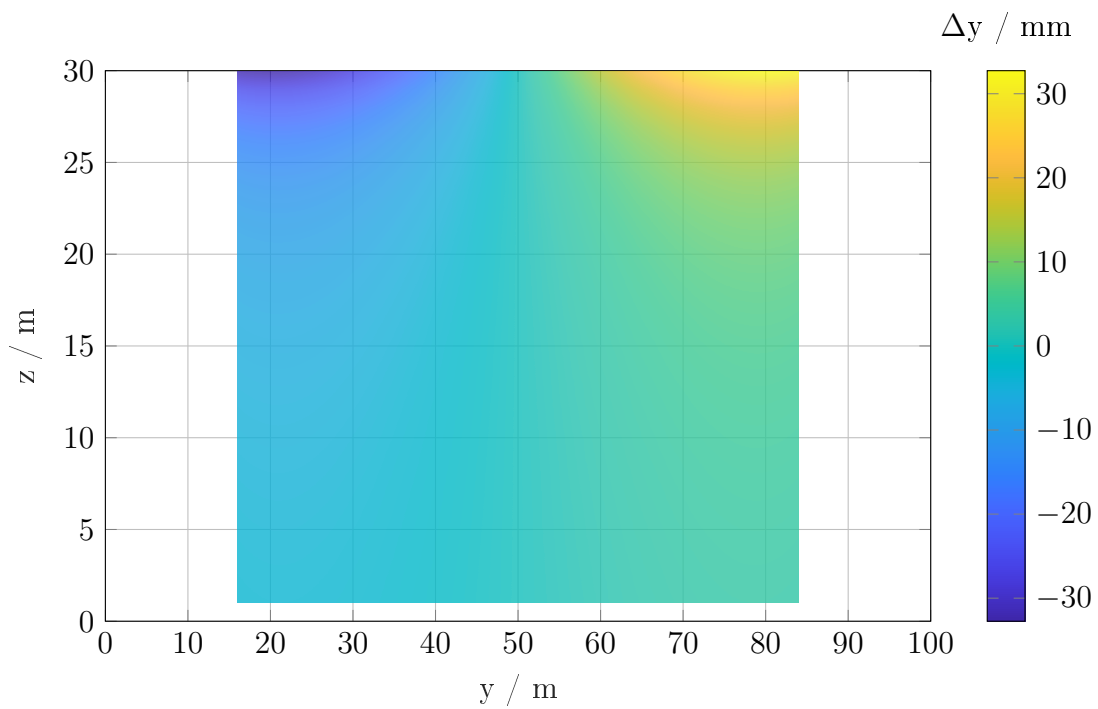
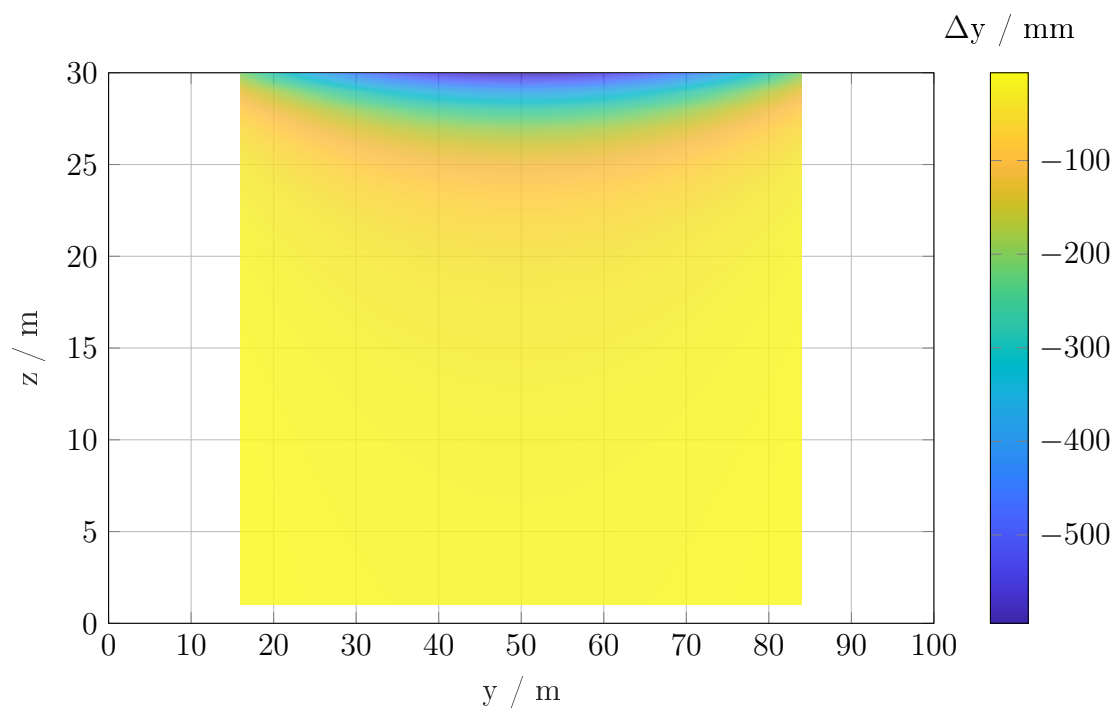
Zur Veranschaulichung werden die Abweichungen in y - und z -Richtung für die Endpositionen mit Dehnung ohne Durchhang in Abbildung 6.1 und 6.2 dargestellt. Dabei werden nicht nur die gewählten Positionen aus Tabelle 6.1 grafisch veranschaulicht, sondern alle erreichbaren Positionen im Arbeitsraum.

Bei der **Berechnung mit Dehnung ohne Durchhang** befinden sich alle Endpositionen in der linken Arbeitsraumhälfte weiter links und weiter unten als die der einfachen inversen Kinematik (die rechte Arbeitsraumhälfte verhält sich bei der y -Abweichung genau antisymmetrisch). Das linke Seil ist in der linken Arbeitsraumhälfte immer kürzer als das Rechte, somit ist die absolute Dehnung des linken Seiles kleiner als die des Rechten und die Plattform bewegt sich nach links.

Die y -Abweichungen sind hier noch vernachlässigbar klein, $\Delta y_{max-} = -32.7 \text{ mm}$ bei $y_p = 20 \text{ m}$ und $z_p = 30 \text{ m}$, beziehungsweise $\Delta y_{max+} = 32.7 \text{ mm}$ bei $y_p = 80 \text{ m}$ und $z_p = 30 \text{ m}$.

Da sich beide Seile dehnen und noch immer als Gerade gerechnet werden, muss sich die Endposition auch an tieferer Stelle als die Ausgangsposition befinden (dabei verhält sich die z -Abweichungen in den beiden Arbeitsraumhälften symmetrisch).

Die Größe der z -Abweichung lässt sich direkt mit der Position im Raum korrelieren (je höher desto größer die Abweichung), die größte Abweichung $\Delta z_{max} = -594.5 \text{ mm}$ passiert bei $y_p = 50 \text{ m}$ beziehungsweise $z_p = 30 \text{ m}$.

Abbildung 6.1: Abweichung Δy der Endpositionen mit Dehnung ohne DurchhangAbbildung 6.2: Abweichung Δz der Endpositionen mit Dehnung ohne Durchhang

Die Abweichungen der Endpositionen berechnet mit Dehnung und Durchhang werden in Abbildung 6.3 und 6.4 als Funktion über den Arbeitsraum dargestellt.

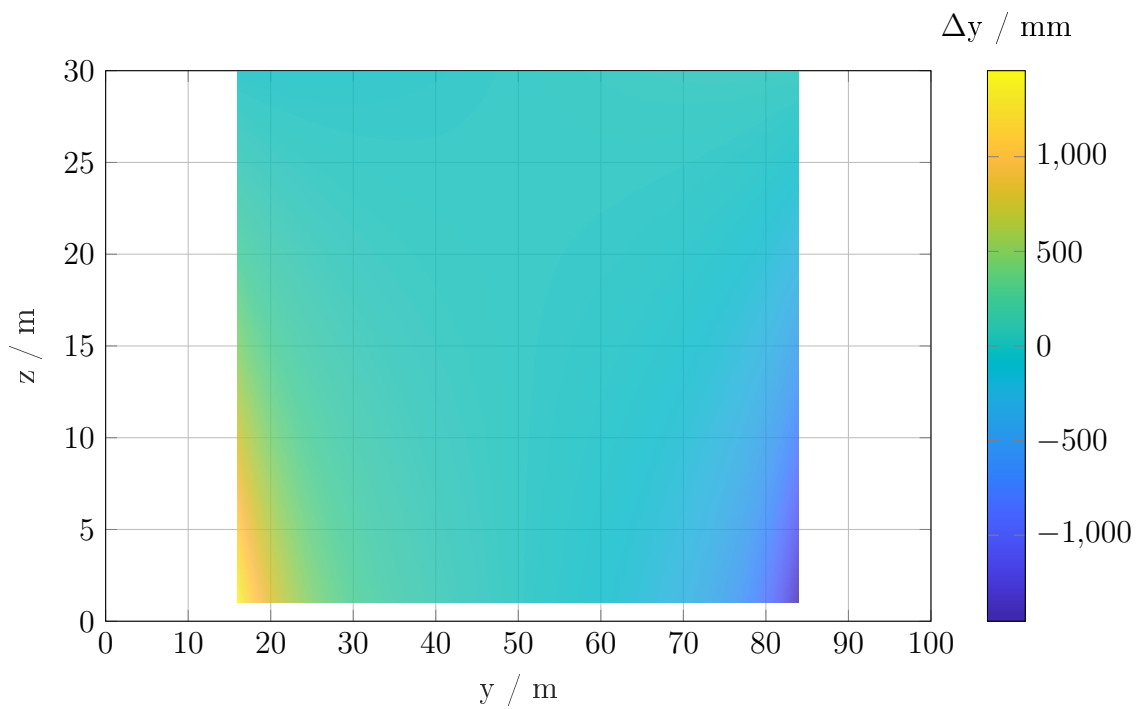
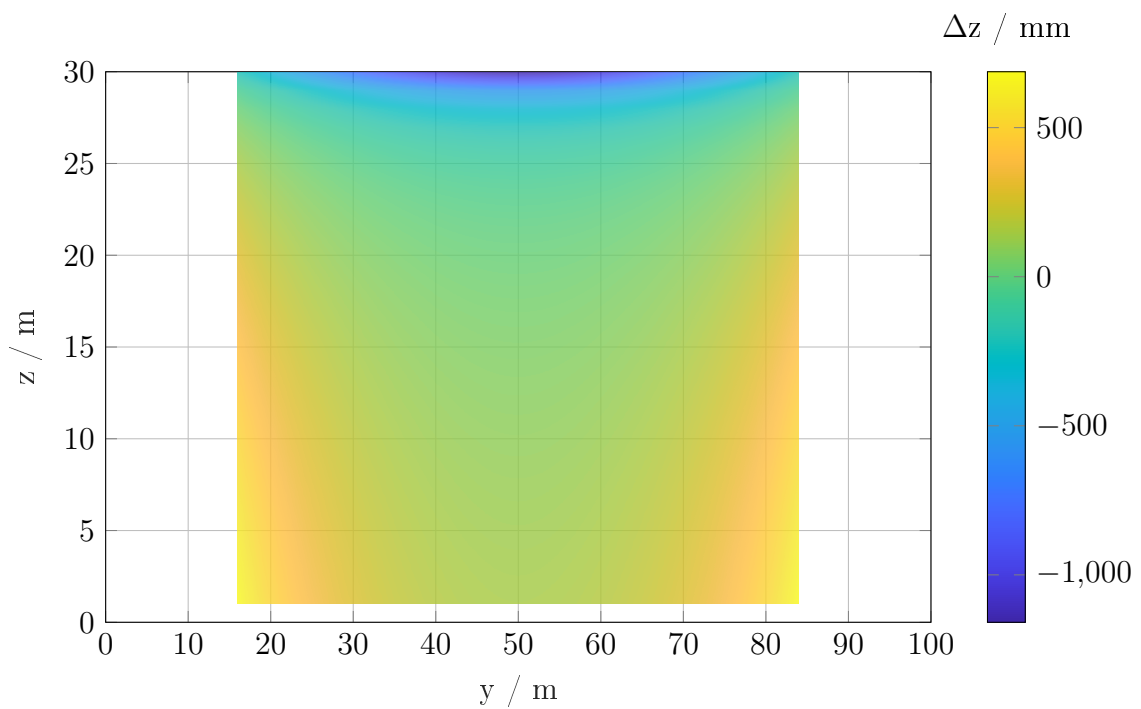
Für die **Berechnung mit Dehnung und Durchhang** treffen andere Gesetzmäßigkeiten zu. Die Abweichungen Δy aus Tabelle 6.1 sind tendenziell positiv (gilt nur für die linke Arbeitsraumhälfte). Das beruht auf der Tatsache, dass das längere rechte Seil mehr durchhängt und dadurch die Manipulatorplattform nach rechts zieht. Negative Werte können als numerische Abweichung von 0 interpretiert und daher vernachlässigt werden. Die maximale y-Abweichung tritt an der Arbeitsraumgrenze auf ($y_p = 16$ m und $z_p = 1$ m) und beträgt $\Delta y_{max} = 1454.9$ mm (die rechte Arbeitsraumhälfte verhält sich wieder antisymmetrisch). Für den Großteil des Arbeitsraums ist die y-Abweichung jedoch kaum relevant. Je tiefer die Plattform hängt, desto geringer werden die Seilkräfte. Je weiter außerhalb der Mitte sie sich befindet, desto ungleicher wird die Last auf die beiden Seile aufgeteilt. Das linke Seil nimmt im linken, unteren Bereich den Großteil der Kraft auf und erfährt kaum einen Durchhang, das rechte Seil wird relativ wenig belastet, hängt daher tief durch.

Für die z-Abweichung ist die Kombination der y- beziehungsweise z-Position der Manipulatorplattform ausschlaggebend.

Im größeren Teil des Arbeitsraums ist die Endposition mit Berücksichtigung der Dehnung und des Durchhangs höher als die der einfachen Kinematik, weil der Durchhang den direkten Abstand zwischen den Seilrollen und der Plattform verkürzt. Ausnahmen sind Positionen von $z_p \geq 25$ m, hier verschiebt sich die Plattform nach unten. Grund dafür ist die große Höhe (beide Kraftangriffswinkel sind ähnlich, geometrisch flach, es ergeben sich dadurch große Seilkräfte, beziehungsweise einen relativ geringer Durchhang), das bedeutet die Positionsabweichung hängt bei großen Höhen fast ausschließlich von der Seildehnung ab und nicht vom Durchhang.

Bei der negativen Richtung der z-Abweichung ($\Delta z_{max(negativ)} = -554$ mm), passiert die Maximalabweichung, wie bei der Dehnung, bei $y_p = 50$ m und $z_p = 30$ m und nimmt auch einen ähnlichen Wert an.

Die größte positive z-Abweichung ($\Delta z_{max} = 687.5$ mm) kann gleich wie die y-Abweichung begründet werden ($y_p = 16$ m und $z_p = 1$ m). Die größte Verschiebung nach oben passiert bei einem langen, tief durchhängenden rechten Seil und einem relativ straff gespannten linken Seil (die rechte Arbeitsraumhälfte verhält sich bei der Abweichung in z-Richtung wieder symmetrisch).

Abbildung 6.3: Abweichung Δy der Endpositionen mit Dehnung und DurchhangAbbildung 6.4: Abweichung Δz der Endpositionen mit Dehnung und Durchhang

6.1.1 Schaubeispiel der Simulation anhand zweier Positionen

Zur Veranschaulichung der Regelung des SimX-Modells unter Berücksichtigung veränderlicher Massen dient dieses konkrete Fallbeispiel. Dabei soll sich der Seilroboter anfangs auf Position 1 befinden ($yp = 25\text{ m}$ und $zp = 3\text{ m}$), dort nimmt er zusätzliche Last auf (von $m = 700\text{ kg}$ auf $m = 1200\text{ kg}$), im Anschluss fährt er zu Position 2 ($yp = 80\text{ m}$ und $zp = 25\text{ m}$), wo die Last wieder auf $m = 1000\text{ kg}$ verringert wird. In Abbildung 6.5 werden die berechneten Seilkurven für die beiden Positionen dargestellt.

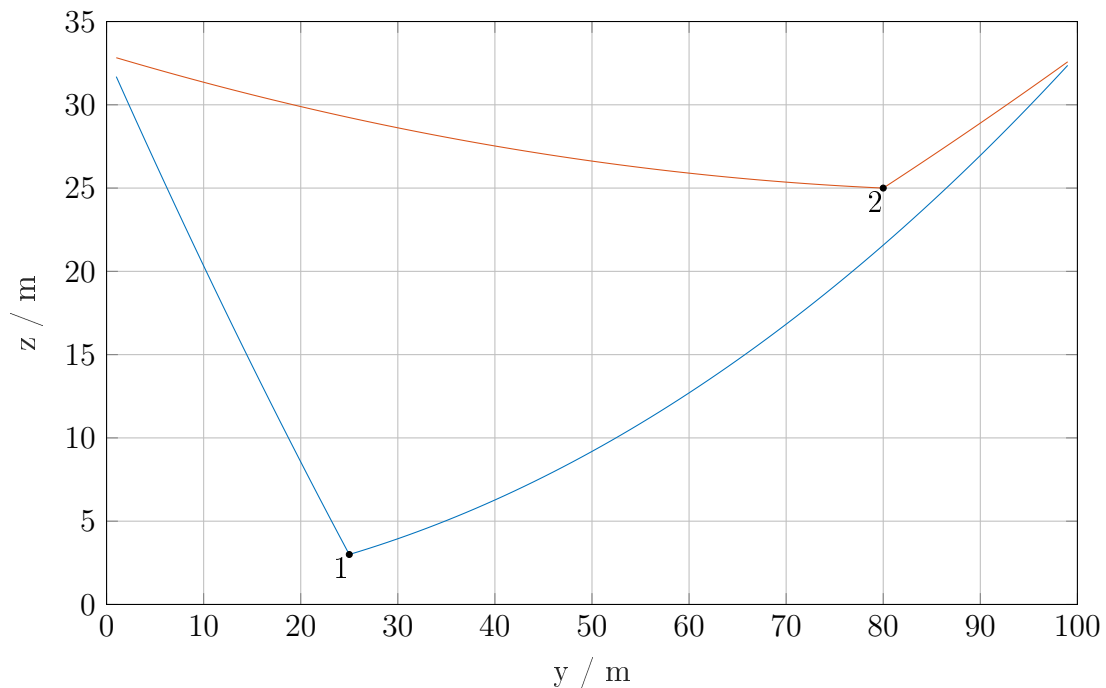


Abbildung 6.5: Seilkurven für die zwei unterschiedliche Positionen im Arbeitsraum

Der von der Simulationsregelung vorgegebene Positionsverlauf wird in Abbildung 6.6 in grün über die Zeit dargestellt (die Positionsänderung findet von 80 s bis 100 s statt). Leicht zeitverzögert folgt das Seilrobotermodell der vorgegebenen Position (rote Linie). Sind die Positionen einmal eingenommen, ändern sie sich praktisch nicht mehr, auch wenn die Last in den jeweiligen Positionen stark variiert.

Prinzipiell starten die Verläufe erst bei 40 s, vorher finden nur der Einschwingvorgang und das Einschalten der Regelung statt.

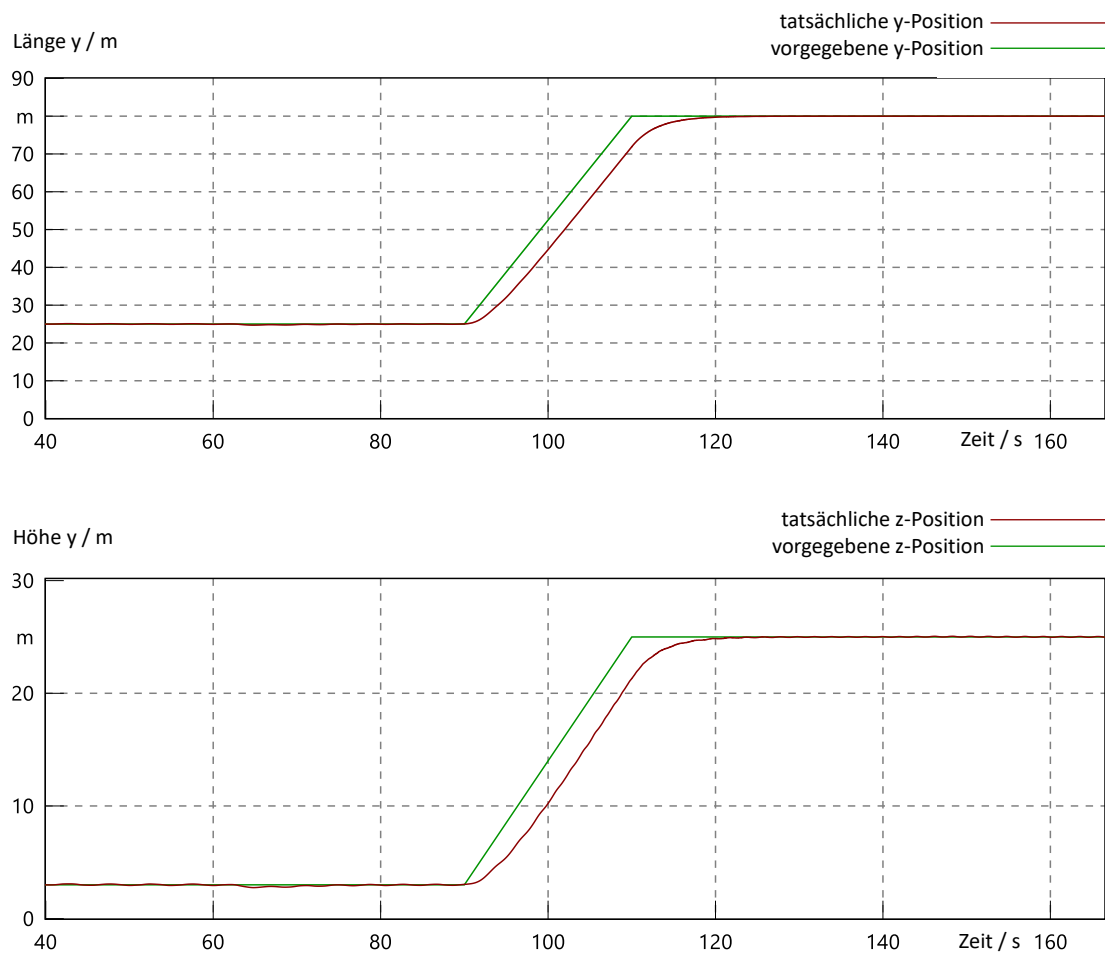


Abbildung 6.6: Positionsverlauf der Manipulatorplattform (tatsächlich zu vorgegeben)

In Abbildung 6.7 wird die tatsächlich auf die Plattform wirkende Last in grün dargestellt (von 50 s bis 55 s ändert sich die Last von 700 kg auf 1200 kg, von 120 s bis 125 s geht sie wieder zurück auf 1000 kg). Die Berechnung der Last (rote Linie) braucht bei einer Laständerung ca. 20 s bis sie wieder den korrekten Wert annimmt (Grund dafür ist die Trägheit des Systems, verursacht durch die PT_1 – Glieder). Während der Bewegung des Roboters zwischen 80 s und 100 s wird die Plattform beschleunigt und die Lastberechnung weicht deutlich ab. Verharrt der Manipulator wieder länger an einer Position (ab 100 s) entspricht die berechnete Last, nach Ablauf der vorhin erwähnten 20 s, wieder der tatsächlichen Masse.

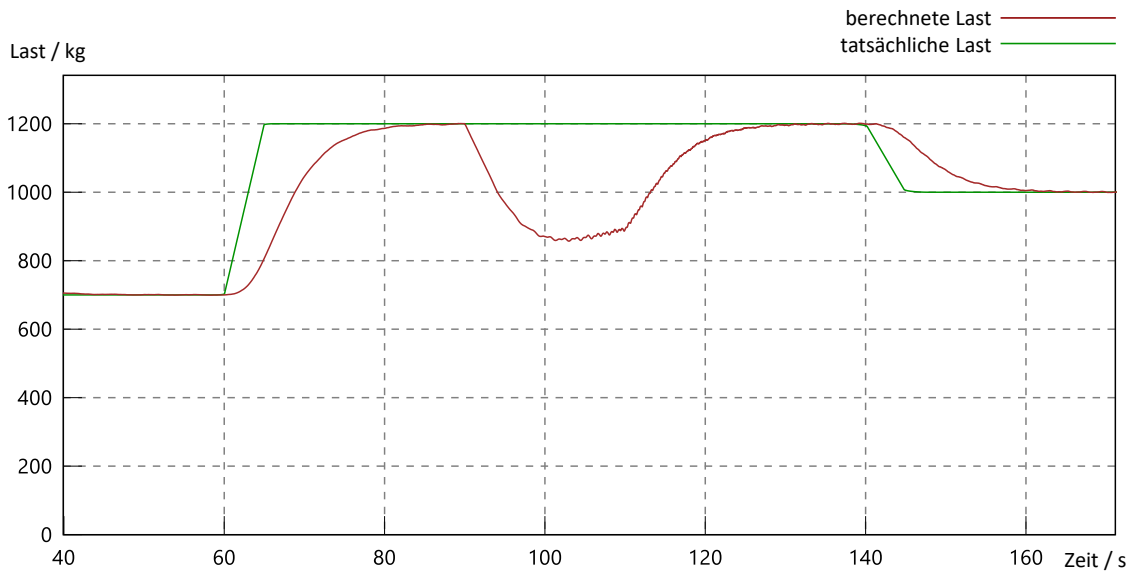


Abbildung 6.7: Lastverlauf (tatsächlich zu berechnet)

In Tabelle 6.2 werden die Mittelwerte der Simulationsergebnisse zu den jeweiligen Positionen und Lasten aufgelistet. Die Endpositionen können je nach Last unterschiedlich vom Idealwert abweichen, die maximale Positionsabweichung von $\Delta Pos_{max} = -13 \text{ mm}$ ist jedoch erstaunlich klein.

Tabelle 6.2: Mittelwerte der Positionen mit verschiedenen Lasten

Pos	Last / kg	Positions- vorgabe / m		Endposition Simulation / m		Pos.-abweichung Simulation / mm	
	m	yp	zp	yps	zps	Δy	Δz
1	700	25	3	25.0108	3.0096	10.8	9.6
1	1200	25	3	24.9870	2.9887	-13.0	-11.3
2	1200	80	25	79.9880	24.9944	-12.0	-5.6
2	1000	80	25	79.9988	25.0020	-1.2	2.0

Zusammenfassend kann behauptet werden, dass die Positionsregelung trotz Laständerung hervorragend funktioniert und die tatsächlich auftretende Last am Manipulator exakt berechnet werden kann (vorausgesetzt der Roboter bleibt mindestens 15 s an einer Position).

6.2 Conclusio

Die Positionsabweichungen aufgrund der Dehnung sind schlussendlich ein wichtiger Teil der Gesamtabweichung, über weite Teile des Arbeitsraums ist die Ab-

weichung auf Grund des Durchhangs jedoch höher. Er darf bei Gewichtsverhältnissen (Last im Verhältnis zur Summe der Seilmassen) von $m = 1000 \text{ kg}$ zu ca. $m_{\text{EigengewichtSeil}1/2} = 450 \text{ kg}$ auf keinen Fall vernachlässigt werden.

Für die Berücksichtigung der Seildehnung und des Durchhangs, das heißt für die exakte Berechnung der Inversen Kinematik des Seilroboters, wurden die hergeleiteten Formeln aus Kapitel 3 mehrfach durch Simulationen verifiziert (siehe beispielsweise Tabelle 5.2).

Zusammenfassend kann also die Richtigkeit der Berechnungsvorschrift aus Kapitel 3 bestätigt sowie die Steuerung und Regelung aus Kapitel 5 für eine reelle Anwendung freigegeben werden.

6.3 Ausblick

Für die Anwendung im dreidimensionalen Fall muss das Modell in x-Richtung erweitert werden (siehe Abbildung 6.8). Bei der Positionsregelung laut Kapitel 5.4 sollten sich kaum Probleme ergeben, für die Steuerung aus Kapitel 5.3 müssten die Korrekturfaktoren um eine Dimension erweitert werden.

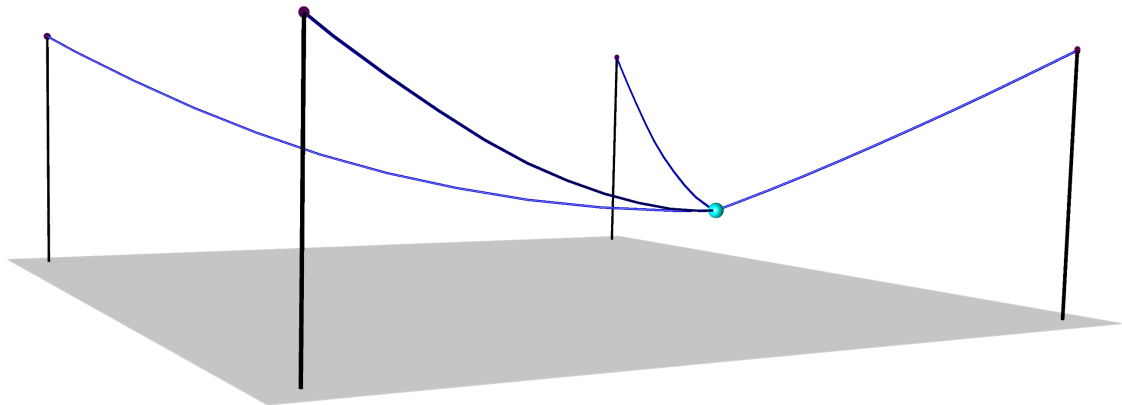


Abbildung 6.8: Modell eines dreidimensionalen Seilroboters

Abbildungsverzeichnis

1.1	Beispiele der Anwendung von Seilrobotern [Yua15]	1
1.2	Regalbediengerät auf Basis der STEWART-GOUGH-Plattform	3
1.3	Struktureller Aufbau der Masterarbeit	6
1.4	Arbeitsraum des 2D-Modells	7
2.1	Kraftaufteilung auf beide Seile	9
2.2	Verlauf der Seilkraft 1 über y beziehungsweise z (Inverse Kinematik) .	10
2.3	Verlauf der Seilkraft 2 über y beziehungsweise z (Inverse Kinematik) .	11
2.4	Positionsabweichung durch Seildehnung über den Arbeitsraum	11
2.5	Positionsabweichung durch Seildehnung (Vorwärtskinematik)	12
2.6	Verlauf der Seilkraft 1 über y beziehungsweise z (Vorwärtskinematik) .	13
2.7	Verlauf der Seilkraft 2 über y beziehungsweise z (Vorwärtskinematik) .	13
2.8	Positionsabweichung aufgrund der Seildehnung (Vorwärtskinematik) .	13
2.9	Verlauf der Gesamtkraft im Seil 1	14
2.10	Verlauf der Positionsabweichung	15
2.11	Verlauf der Gesamtkraft im Seil 1 bei verschiedenen Höhen und konstanter Last $m=1000$ kg	16
2.12	Verlauf der Positionsabweichung bei verschiedenen Höhen und konstanter Last $m=1000$ kg	16
2.13	Kurvenanpassung durch Polynome: F_{ges1} bei $z=10$ m	17
2.14	Interpolation durch Polynome 4.Grades: F_{ges1} bei $z=25$ m beziehungsweise $z=30$ m	18
2.15	Kraftverlauf über y und z mit einem angenäherten Polynom 4.Grades .	19
3.1	Kraftaufteilung auf beide Seile	20
3.2	Infinitesimales Element des linken Seiles	21
3.3	Infinitesimales Element des rechten Seiles	25
3.4	Die Seilkurve nach verschiedenen vielen Iterationen	27
3.5	Verlauf von α_2 über den Raum	29
3.6	Eingeschränkter Arbeitsraum mit den Kraftangriffswinkeln als Vektorfeld	29
3.7	Möglicher Verlauf des Schuttgutberges für zwei Positionen	31
3.8	Verlauf des Korrekturfaktors 2 über den Arbeitsraum	32
3.9	Verlauf von kf_2 und der mathematischen Annäherung über den Arbeitsraum	33
3.10	Struktureller Aufbau der analytischen Berechnung der Seilkurven mit Hilfe der Korrekturfaktoren	35
3.11	Struktureller Aufbau der analytischen Berechnungsvorschrift	39

4.1	2D-Modell in Simscape Multibody	40
4.2	Endpositionen von verschiedenen Methoden	42
4.3	Ideale Seilkurve (Gleichung 4.3)	43
4.4	Ausgangspostionen für die Versuche zum Verifizieren der Berechnung mittels Simulation	45
4.5	Positionsabweichung Δy der Simscape-Simulation mit Seildehnung ohne Durchhang zu den berechneten Endpositionen	48
4.6	Positionsabweichung Δz der Simscape-Simulation mit Seildehnung ohne Durchhang zu den berechneten Endpositionen	48
4.7	Positionsabweichung Δy der Simscape-Simulation mit Seildehnung und Durchhang zu den berechneten Endpositionen	51
4.8	Positionsabweichung Δz der Simscape-Simulation mit Seildehnung und Durchhang zu den berechneten Endpositionen	51
4.9	Einschwingphase des Seilrobotermodells an Position Nr. 15	53
5.1	Modellaufbau der einzelnen Bausteine in SimulationX	55
5.2	Dreidimensionaler Modellaufbau in SimulationX	55
5.3	Simulationssteuerung	57
5.4	Positionsabweichung Δy des SimX-Modells mit Steuerung zu den be- rechneten Endpositionen	58
5.5	Positionsabweichung Δz des SimX-Modells mit Steuerung zu den be- rechneten Endpositionen	58
5.6	Konzepte zur Kraftmessung [Kra15]	60
5.7	Simulationsregelung	62
5.8	Positionsabweichung Δy des SimX-Modells mit Kraftmessung zu den berechneten Endpositionen	64
5.9	Positionsabweichung Δz des SimX-Modells mit Kraftmessung zu den berechneten Endpositionen	64
5.10	Positionsabweichung Δy des Simscape-Modells zum SimX-Modell mit Kraftmessung	67
5.11	Positionsabweichung Δz des Simscape-Modells zum SimX-Modell mit Kraftmessung	67
6.1	Abweichung Δy der Endpositionen mit Dehnung ohne Durchhang . . .	71
6.2	Abweichung Δz der Endpositionen mit Dehnung ohne Durchhang . . .	71
6.3	Abweichung Δy der Endpositionen mit Dehnung und Durchhang . . .	73
6.4	Abweichung Δz der Endpositionen mit Dehnung und Durchhang . . .	73
6.5	Seilkurven für die zwei unterschiedliche Positionen im Arbeitsraum . .	74
6.6	Positionsverlauf der Manipulatorplattform (tatsächlich zu vorgegeben)	75

6.7	Lastverlauf (tatsächlich zu berechnet)	76
6.8	Modell eines dreidimensionalen Seilroboters	77
A.1	Infinitesimales Element des linken Seiles	82
A.2	Infinitesimales Element des rechten Seiles	86

Tabellenverzeichnis

1.1	Seileigenschaften [Fat19]	7
2.1	Maximas zu den Abbildungen 2.9 und 2.10 von Seilkraft 1 und Positionsabweichung bei verschiedenen Lasten und konstanter Höhe $z=25$ m	15
2.2	Maximas zu den Abbildungen 2.11 und 2.12 von Seilkraft 1 und Positionsabweichung bei verschiedenen Höhen und konstanter Last $m=1000$ kg	17
2.3	Parameter für die Polynome 4.Grades	18
4.1	Endposition von verschiedenen Elementlängen	41
4.2	Verwendete Ausgangspositionen für Simscape Multibody	46
4.3	Berechnung und Simscape-Simulation mit Seildehnung ohne Durchhang	49
4.4	Berechnung und Simscape-Simulation mit Seildehnung und Durchhang	52
5.1	Vergleich der Ergebnisse aus Berechnung und SimulationX (Steuerung)	59
5.2	Vergleich der Ergebnisse aus Berechnung und SimulationX (Steuerung)	65
5.3	Vergleich von SimulationX mit Simscape Multibody	68
6.1	Vergleich der einfachen inversen Kinematik mit den Endpositionen . .	69
6.2	Mittelwerte der Positionen mit verschiedenen Lasten	76

Literaturverzeichnis

- [Fat19] Fatzer. *Seilbau - Structural Ropes*. 2019. URL: <http://www.fatzer.com/wp-content/uploads/2018/02/FATZER-Seilbau-Structural-Ropes-Brochure-inch-DE-EN.pdf>. Accessed: 01.09.2016.
- [Nan06] Rendong Nan. „Five hundred meter aperture spherical radio telescope (FAST)“. In: *Science in China series G 49.2* (2006), S. 129–148.
- [Sim09] SimulationX. *Handbuch SimX3*. 3. Aufl. ITI GmbH Dresden. Webergasse 1, 01067 Dresden, 2009.
- [Bru10] Tobias Bruckmann. „Auslegung und Betrieb redundanter paralleler Seilroboter“. Diss. Universität Duisburg-Essen, 2010.
- [DD11] J. Dankert und H. Dankert. „Technische Mechanik“. In: Vieweg+Teubner, 2011. Kap. 11, S. 157–166.
- [BP13] Tobias Bruckmann und Andreas Pott. *Cable-driven Parallel Robots*. Berlin: Springer Verlag, 2013.
- [Lal13] Wildan Lalo. „Ein Beitrag zur Entwicklung von Assistenzsystemen für serielle und parallele Roboter am Beispiel von Autobetonpumpen und seilbasierten Regalbediengeräten“. Diss. Universität Duisburg-Essen, 2013.
- [Kra15] Werner Kraus. „Force Control of Cable-Driven Parallel Robots“. Diss. Fraunhofer Institut, 2015.
- [Yua15] Han Yuan. „Static and dynamic stiffness analysis of cable-driven parallel robots“. Diss. INSA Rennes, 2015.
- [Haa17] Franz Haas. „Industrieroboter“. In: Institut für Fertigungstechnik TU Graz, 2017. Kap. 4, S. 56–62.
- [Mil+17] S. Miller, T. Soares, Y. Van Weddingen und J. Wendlandt. *Modeling Flexible Bodies with Simscape Multibody Software*. Techn. Ber. 1. Mathworks, 2017.

Anhang

A Herleitung der Seilstatik

Die in Kapitel 3 präsentierte Zusammenfassung der Seilkurve wird hier nochmal Schritt für Schritt hergeleitet.

Dafür dienen die berechneten Seilkräfte (jeweils die y- und z-Komponenten) aus den Gleichungen A.1 bis A.4 als Grundlage für die Berechnung des Seilverlaufs für das linke und rechte Seil.

$$Fy1 = \frac{F}{\tan(\alpha1) + \tan(\alpha2)} \quad (\text{A.1})$$

$$Fz1 = Fy1 \cdot \tan(\alpha1) \quad (\text{A.2})$$

$$Fy2 = Fy1 \quad (\text{A.3})$$

$$Fz2 = Fy2 \cdot \tan(\alpha2) \quad (\text{A.4})$$

A.1 Linkes Seil (Seil 1)

Für die Berechnung der sogenannten Seilkurve wird ein infinitesimales Element freigeschnitten, siehe Abbildung A.1.

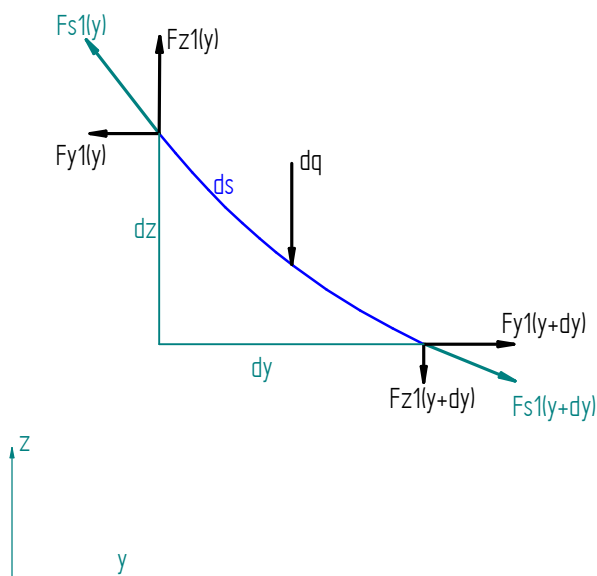


Abbildung A.1: Infinitesimales Element des linken Seiles

Für das Eigengewicht des Seiles wird die Streckenlast $\rho_q = \rho * g$ mit der Länge dieses

Seilelementes multipliziert.

$$dq = \rho_q \cdot ds \quad (\text{A.5})$$

Infinitesimal kann die Länge ds laut Gleichung A.6 mit dem Satz des Pythagoras beschrieben werden. Mit Hilfe der Gleichungen A.6 bis A.9 wird das Seilelement durch $z1'$ und dy definiert.

$$ds = \sqrt{dy^2 + dz^2} \quad (\text{A.6})$$

$$z1' = -\frac{dz}{dy} \quad (\text{A.7})$$

$$dz^2 = z1'^2 \cdot dy^2 \quad (\text{A.8})$$

$$ds = \sqrt{1 + z1'^2} \cdot dy \quad (\text{A.9})$$

Aus der Summe der Kräfte in y-Richtung wird ersichtlich, dass die y-Komponente der Seilkraft über das gesamte Seil konstant ist ($Fy1(y + dy) = Fy1(y)$).

$$\Sigma Fy = 0 = Fy1(y + dy) - Fy1(y) \quad (\text{A.10})$$

Die Summe der Kräfte in z-Richtung ergibt sich zu Gleichung A.11. Unter Verwendung der Gleichungen A.5 und A.9 lässt sie sich zu Gleichung A.12 umformen.

$$\Sigma Fz = Fz1(y) - dq \cdot ds - Fz1(y + dy) \quad (\text{A.11})$$

$$\Sigma Fz = Fz1(y) - \rho_q \cdot \sqrt{1 + z1'^2} \cdot dy - Fz1(y + dy) \quad (\text{A.12})$$

Die erste Ableitung der z-Komponente der Seilkraft $Fz1'$ kann durch den Grenzwert der Kraftänderung dargestellt werden. Wird der Zähler durch die Gleichung A.12 ersetzt, lässt sich dy kürzen und der Limes wird überflüssig (Gleichung A.14).

$$Fz1' = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{Fz1(y + dy) - Fz1(y)}{dy} = \lim_{dy \rightarrow 0} -\frac{\rho_q \cdot \sqrt{1 + z1'^2} \cdot dy}{dy} \quad (\text{A.13})$$

$$Fz1' = -\rho_q \cdot \sqrt{1 + z1'^2} \quad (\text{A.14})$$

Aus den physikalischen Eigenschaften eines Seiles ist bekannt, dass die Seilkraft immer in Seilrichtung verläuft, das heißt die erste Ableitung der Seilkurve kann auch durch das Kräfteverhältnis dargestellt werden siehe Gleichung A.15. Die zweite

Ableitung ergibt sich zu Gleichung A.16, weil Fy_1 über das Seil konstant bleibt.

$$z_1' = -\frac{dz}{dy} = \frac{Fz_1}{Fy_1} \quad (\text{A.15})$$

$$z_1'' = \frac{Fz_1'}{Fy_1} \quad (\text{A.16})$$

Lösung der Differentialgleichung 2.Ordnung

Kombiniert man die Gleichung A.14 mit Gleichung A.16, ergibt sich eine Differentialgleichung 2. Ordnung.

$$z_1'' = -\frac{\rho_q}{Fy_1} \cdot \sqrt{1 + z_1'^2} \quad (\text{A.17})$$

Die erste Ableitung der Kurve wird durch $u = z_1' = -\frac{dz}{dy}$ substituiert, daraus folgt $z_1'' = \frac{du}{dy}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt das Gleichung A.18.

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\rho_q}{Fy_1} \cdot \sqrt{1 + u^2} \quad (\text{A.18})$$

Im Anschluss folgt die Trennung der Variablen (Gleichung A.19) und eine unbestimmte Integration (Gleichung A.20).

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{\rho_q}{Fy_1} \cdot dy \quad (\text{A.19})$$

$$a \sinh(u) = -\frac{\rho_q}{Fy_1} \cdot y + C_1' \quad (\text{A.20})$$

Durch die Rücksubstitution von $u = z_1'$ ergibt sich die erste Ableitung z_1' und durch anschließende Integration berechnet sich die Funktion der gesuchten, linken Seilkurve (Gleichung A.22 und A.23).

$$z_1' = \sinh\left(-\frac{\rho_q}{Fy_1} \cdot y + C_1'\right) = -\frac{dz}{dy} \quad (\text{A.21})$$

$$dz = -\sinh\left(-\frac{\rho_q}{Fy_1} \cdot y + C_1'\right) \cdot dy \quad (\text{A.22})$$

$$z_1(y) = \frac{Fy_1}{\rho_q} \cdot \cosh\left(-\frac{\rho_q}{Fy_1} \cdot y + C_1'\right) + C_1 \quad (\text{A.23})$$

Zur Berechnung der Integrationskonstanten werden die geometrischen Randbedingungen eingesetzt. Die Erste (Gleichung A.24) setzt voraus, dass das Seil 1 bei $y = 0$ auf der Höhe h befestigt ist (Umlenkrolle links) und die zweite Randbedingung fixiert

das Seil an der Manipulatorplattform (Gleichung A.25).

$$z1(0) = h \quad (\text{A.24})$$

$$z1(y_p) = z_p \quad (\text{A.25})$$

Aus der ersten Randbedingung ergibt sich die Integrationskonstante $C1$ zu Gleichung A.26.

$$C1 = h - \frac{Fy1}{\rho_q} \cdot \cosh(C1') \quad (\text{A.26})$$

Eingesetzt in die zweite Randbedingung und mit Hilfe der Definition des Cosinus-Hyperbolikus (Gleichung A.27) lässt sich $C1'$ ermitteln (Gleichung A.28 bis A.32).

$$\cosh(x) - \cosh(y) = 2 * \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (\text{A.27})$$

$$z_p = \frac{Fy1}{\rho_q} \cdot \cosh\left(-\frac{\rho_q}{Fy1} \cdot y_p + C1'\right) + h - \frac{Fy1}{\rho_q} \cdot \cosh(C1') \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\rho_q}{Fy1} \cdot (z_p - h) = \cosh\left(C1' - \frac{\rho_q}{Fy1} \cdot y_p\right) - \cosh(C1') \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\rho_q}{Fy1} \cdot (z_p - h) = 2 \cdot \sinh\left(\frac{-\frac{\rho_q}{Fy1} \cdot y_p}{2}\right) \cdot \sinh\left(2 \cdot C1' - \frac{\rho_q}{Fy1} \cdot y_p\right) \quad (\text{A.30})$$

$$C1' - \frac{\rho_q \cdot y_p}{2 \cdot Fy1} = \operatorname{asinh}\left(\frac{\rho_q \cdot (z_p - h)}{2 \cdot Fy1 \cdot \sinh\left(-\frac{\rho_q \cdot y_p}{2 \cdot Fy1}\right)}\right) \quad (\text{A.31})$$

$$C1' = \operatorname{asinh}\left(\frac{\rho_q \cdot (z_p - h)}{2 \cdot Fy1 \cdot \sinh\left(-\frac{\rho_q \cdot y_p}{2 \cdot Fy1}\right)}\right) + \frac{\rho_q \cdot y_p}{2 \cdot Fy1} \quad (\text{A.32})$$

Seillängen

Für die gedehnte, reale Seillänge $l1_{real}$ muss nur noch das infinitesimale Element über den y -Bereich des linken Seiles integriert werden, ds wird durch Gleichung A.9 ersetzt.

$$l1_{real} = \int_0^{y_p} ds \cdot dy = \int_0^{y_p} \sqrt{1 + z1'^2} \cdot dy \quad (\text{A.33})$$

Durch das Einsetzen der Differentialgleichung A.17 ergibt sich Gleichung A.34 und durch die Integration A.35.

$$l1_{real} = \int_0^{y_p} -\frac{Fy1}{\rho_q} \cdot z1'' \cdot dy \quad (\text{A.34})$$

$$l1real = - \left[\frac{Fy1}{\rho_q} * z1' \right]_0^{yp} \quad (A.35)$$

Mithilfe der Gleichung A.21 ergibt sich $l2real$ zu:

$$l1real = - \frac{Fy1}{\rho_q} \cdot \left[\sinh \left(- \frac{\rho_q}{Fy1} \cdot y + C1' \right) \right]_0^{yp} \quad (A.36)$$

Die Länge des linken Seiles abhängig von der Manipulatorposition kann schlussendlich mit der Gleichung A.37 beschrieben werden.

$$l1real = - \frac{Fy1}{\rho_q} \cdot \left(\sinh \left(- \frac{\rho_q}{Fy1} \cdot yp + C1' \right) - \sinh(C1') \right) \quad (A.37)$$

A.2 Rechtes Seil (Seil 2)

Die Berechnung der Seilcurve des rechten Seils verläuft analog.

Die y-Komponente der Seilkraft 2 (Gleichung A.38) muss gleich groß sein, wie die der Seilkraft 1 (Manipulatorplattform befindet sich im Gleichgewicht).

$$Fy2 = Fy1 \quad (A.38)$$

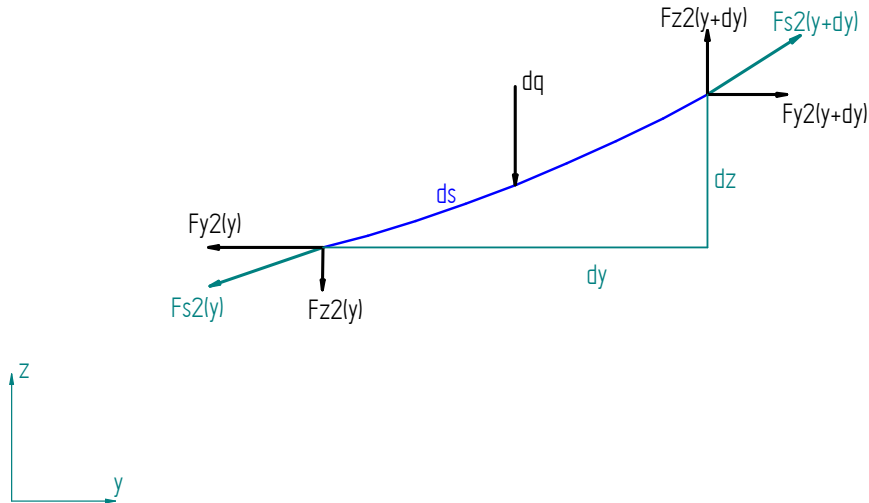


Abbildung A.2: Infinitesimales Element des rechten Seiles

Aus Abbildung A.2 wird ersichtlich, dass sich bei der Steigung $z2'$ des infinitesimalen Elementes (Gleichung A.7 beim linken Seil) das Vorzeichen umkehrt. Infinitesimal kann die Länge ds wieder laut Gleichung A.39 mit dem Satz des Pythagoras beschrieben werden. Mit Hilfe der Gleichungen A.39 bis A.42 wird das Seilelement

durch $z2'$ und dy definiert.

$$ds = \sqrt{dy^2 + dz^2} \quad (\text{A.39})$$

$$z2' = \frac{dz}{dy} \quad (\text{A.40})$$

$$dz^2 = z2'^2 \cdot dy^2 \quad (\text{A.41})$$

$$ds = \sqrt{1 + z2'^2} \cdot dy \quad (\text{A.42})$$

Aus der Summe der Kräfte in y-Richtung wird ersichtlich, dass die y-Komponente der Seilkraft über das gesamte Seil konstant ist ($Fy2(y + dy) = Fy2(y)$).

$$\Sigma Fy = 0 = Fy2(y + dy) - Fy2(y) \quad (\text{A.43})$$

Die Summe der Kräfte in z-Richtung ergibt sich zu Gleichung A.44. Unter Verwendung der Gleichungen A.5 und A.42 lässt sie sich zu Gleichung A.45 umschreiben.

$$\Sigma Fz = Fz2(y + dy) - dq \cdot ds - Fz(y) \quad (\text{A.44})$$

$$\Sigma Fz = Fz2(y + dy) - \rho_q \cdot \sqrt{1 + z2'^2} \cdot dy - Fz2(y) \quad (\text{A.45})$$

Die erste Ableitung der z-Komponente der Seilkraft $Fz1'$ kann durch den Grenzwert der Kraftänderung dargestellt werden. Wird der Zähler durch die Gleichung A.45 ersetzt, lässt sich dy kürzen und der Limes wird überflüssig (Gleichung A.47).

$$Fz2' = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{Fz2(y + dy) - Fz2(y)}{dy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{\rho_q \cdot \sqrt{1 + z2'^2} \cdot dy}{dy} \quad (\text{A.46})$$

$$Fz2' = \rho_q \cdot \sqrt{1 + z2'^2} \quad (\text{A.47})$$

Aus den physikalischen Eigenschaften eines Seiles ist bekannt, dass die Seilkraft immer in Seilrichtung verläuft. Das bedeutet die erste Ableitung der Seilkurve kann auch durch das Kräfteverhältnis dargestellt werden, siehe Gleichung A.48. Die zweite Ableitung ergibt Gleichung A.49, weil $Fy2$ über das Seil konstant bleibt.

$$z2' = \frac{dz}{dy} = \frac{Fz2}{Fy2} \quad (\text{A.48})$$

$$z2'' = \frac{Fz2'}{Fy2} \quad (\text{A.49})$$

Lösung der Differentialgleichung 2.Ordnung

Kombiniert man die Gleichung A.47 mit Gleichung A.49, erhält man eine Differentialgleichung 2. Ordnung.

$$z2'' = \frac{\rho_q}{Fy2} \cdot \sqrt{1 + z2'^2} \quad (\text{A.50})$$

Die erste Ableitung der Kurve wird durch $u = z2' = \frac{dz}{dy}$ substituiert, daraus folgt $z2'' = \frac{du}{dy}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt das Gleichung A.51.

$$\frac{du}{dy} = \frac{\rho_q}{Fy2} \cdot \sqrt{1 + u^2} \quad (\text{A.51})$$

Im Anschluss folgt die Trennung der Variablen (Gleichung A.52) und eine unbestimmte Integration (Gleichung A.53).

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\rho_q}{Fy2} \cdot dy \quad (\text{A.52})$$

$$\operatorname{asinh}(u) = \frac{\rho_q}{Fy2} \cdot y + C2' \quad (\text{A.53})$$

Durch die Rücksubstitution von $u = z2'$ ergibt sich die erste Ableitung $z2'$ und durch anschließende Integration berechnet sich die Funktion der gesuchten, linken Seilkurve (Gleichung A.55 und A.56).

$$z2' = \sinh\left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot y + C2'\right) = \frac{dz}{dy} \quad (\text{A.54})$$

$$dz = \sinh\left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot y + C2'\right) \cdot dy \quad (\text{A.55})$$

$$z2(y) = \frac{Fy2}{\rho_q} \cdot \cosh\left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot y + C2'\right) + C2 \quad (\text{A.56})$$

Zur Berechnung der Integrationskonstanten werden die geometrischen Randbedingungen eingesetzt. Die erste Randbedingung (Gleichung A.57) setzt voraus, dass Seil 2 bei $y = yp$ an der Manipulatorplattform befestigt ist. Die Zweite fixiert das andere Ende des Seiles an der rechten Umlenkrolle (Gleichung A.58).

$$z2(yp) = zp \quad (\text{A.57})$$

$$z2(l) = h \quad (\text{A.58})$$

Aus der ersten Randbedingung ergibt sich die Integrationskonstante $C2$ zu Glei-

chung A.59.

$$C2 = zp - \frac{Fy2}{\rho_q} \cdot \cosh\left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot yp + C2'\right) \quad (\text{A.59})$$

Eingesetzt in die zweite Randbedingung und mit Hilfe der Definition des Cosinus-Hyperbolicus (Gleichung A.60) lässt sich $C2'$ ermitteln (Gleichung A.61 bis A.65).

$$\cosh(x) - \cosh(y) = 2 \cdot \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (\text{A.60})$$

$$h = \frac{Fy2}{\rho_q} \cdot \cosh\left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot l + C2'\right) + zp - \frac{Fy2}{\rho_q} \cdot \cosh\left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot yp + C2'\right) \quad (\text{A.61})$$

$$\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot (h - zp) = \cosh\left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot l + C2'\right) - \cosh\left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot yp + C2'\right) \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot (h - zp) = 2 \cdot \sinh\left(\frac{\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot (l - yp)}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot (l + yp) + 2 \cdot C2'}{2}\right) \quad (\text{A.63})$$

$$\frac{\rho_q \cdot (l + yp)}{2 \cdot Fy2} + C2' = \operatorname{asinh}\left(\frac{\rho_q \cdot (h - zp)}{2 \cdot Fy2 \cdot \sinh\left(\frac{\rho_q \cdot (l - yp)}{2 \cdot Fy2}\right)}\right) \quad (\text{A.64})$$

$$C2' = \operatorname{asinh}\left(\frac{\rho_q \cdot (h - zp)}{2 \cdot Fy2 \cdot \sinh\left(\frac{\rho_q \cdot (l - yp)}{2 \cdot Fy2}\right)}\right) - \frac{\rho_q \cdot (l + yp)}{2 \cdot Fy2} \quad (\text{A.65})$$

Seillängen

Für die gedehnte, reale Seillänge $l2real$ muss nur noch das infinitesimale Element über den y -Bereich des rechten Seiles integriert werden, ds wird durch Gleichung A.42 ersetzt.

$$l2real = \int_{yp}^l ds \cdot dy = \int_{yp}^l \sqrt{1 + z2'^2} \cdot dy \quad (\text{A.66})$$

Durch das Einsetzen der Differentialgleichung A.50 ergibt sich Gleichung A.67 und durch die Integration A.68.

$$l2real = \int_0^{yp} \frac{Fy2}{\rho_q} \cdot z2'' \cdot dy \quad (\text{A.67})$$

$$l2real = \left[\frac{Fy2}{\rho_q} * z2' \right]_{yp}^l \quad (\text{A.68})$$

Mithilfe der Gleichung A.54 ergibt sich $l2real$ zu:

$$l2real = \frac{Fy2}{\rho_q} \cdot \left[\sinh\left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot y + C2'\right) \right]_{yp}^l \quad (\text{A.69})$$

Die Länge des linken Seiles abhängig von der Manipulatorposition kann schlussendlich mit der Gleichung A.70 beschrieben werden.

$$l_{2real} = \frac{Fy2}{\rho_q} \cdot \left(\sinh \left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot l + C2' \right) - \sinh \left(\frac{\rho_q}{Fy2} \cdot yp + C2' \right) \right) \quad (\text{A.70})$$