

Michael Berr

Origami mit Kegel- und Zylinderflächen

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Mag. rer. nat.

Lehramtstudium Darstellende Geometrie und Mathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Univ.-Prof.i.R. Mag.rer.nat. Dr.techn. Otto Röschel

Institut für Geometrie

Graz, Februar 2020

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich gerne bei einigen Personen bedanken, die mich während meiner Studienzeit und während des Verfassens dieser Arbeit unterstützt haben.

Zuerst möchte ich mich bei meinem Betreuer Univ.-Prof.i.R. Mag.rer.nat. Dr.techn. Otto Röschel bedanken. Nicht nur dafür, dass er mich bei dieser Arbeit unterstützt und Zeit für meine Fragen gefunden hat, sondern auch, weil er geholfen hat, das eine oder andere ambitionierte Vorhaben in dieser Arbeit tatsächlich zu verwirklichen.

Weiterer Dank gebührt natürlich auch meinen Freunden und Studienkollegen, besonders Georg und Robert, für eine schöne Studienzeit und interessante Gespräche.

Aber der größte Dank gilt meiner Familie, in erster Linie meinen Eltern Karoline und Andreas Berr, dafür, dass sie meine Ausbildung schon von klein auf unterstützt haben. Danke, dass ihr mir dieses Studium ermöglicht habt!

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Diplomarbeit identisch.

Datum

Unterschrift

Kurzfassung

Bei der Origamitechnik des *curved folding* wird aus einem ebenen Blatt Papier eine aus zwei abwickelbaren Flächen bestehende räumliche Konfiguration erzeugt. Diese Flächen stoßen entlang einer scharfen Faltkante \mathbf{c} zusammen und können dabei auch Kegel- oder Zylinderflächen sein. Ziel dieser Arbeit ist es jene Raumkurven \mathbf{c} zu charakterisieren, die bei curved folding mit Kegel- und Zylinderflächen auftreten. Damit werden sowohl die beiden von Röschel behandelten Fälle von Paaren von Kegeln und Zylindern, als auch der noch nicht in der Literatur vorkommende Fall eines Kegels und eines Zylinders mit der gleichen Methode vereinheitlicht.

Im ersten Teil dieser Arbeit werden wichtige Begriffe und Eigenschaften definiert und hergeleitet. Diese finden bei der Betrachtung der durch curved folding entstandenen Raumkurven im zweiten Teil Anwendung.

Der zweite Abschnitt lässt sich in drei Teile gliedern:

Zuerst wird der Fall, dass längs \mathbf{c} zwei Kegelflächen auftreten, untersucht. Es stellt sich heraus, dass die Schmiegebenen σ der Faltkante \mathbf{c} , bis auf triviale Fälle, stets tangential an eine Drehquadrik Φ liegen. Die Drehquadrik zeichnet sich dadurch aus, dass die Kegelspitzen den Brennpunkten der Quadrik entsprechen. Damit ist Φ i.A. ein Drehellipsoid bzw. ein zweisechaliges Drehhyperboloid.

Im zweiten Fall treffen eine Kegel- und eine Zylinderfläche entlang von \mathbf{c} aufeinander. Es wird erkannt, dass die gleiche Vorgehensweise wie im ersten Fall auch hier ein Ergebnis liefert. Die Kegelspitze und die Erzeugendenrichtung der Zylinderfläche sind i.A. der Brennpunkt sowie die Achsenrichtung eines Drehparaboloids. Die Schmiegebenen σ von \mathbf{c} sind auch in diesem Fall tangential an das Drehparaboloid.

Der dritte Fall betrachtet Zylinderflächen, die sich entlang von \mathbf{c} schneiden. Die Raumkurve \mathbf{c} zeichnet sich diesmal dadurch aus, dass ihre Tangentenvektoren den Erzeugendenrichtungen eines quadratischen Kegels entsprechen. Die Erzeugendenrichtungen der Zylinderflächen sind dabei die Richtungen der Brennstrahlen des Kegels.

Zu guter Letzt werden noch ein paar Beispiele für curved folding mit Kegel- und Zylinderflächen angegeben. Dabei wird eine Kurve auf einem Drehparaboloid bestimmt. Die Tangentialebenen entlang dieser Kurve hüllen eine Torse ein. Die Gratlinie dieser Torse ist die gesuchte Faltlinie \mathbf{c} . Der Brennpunkt des Paraboloids, sowie seine Achsenrichtung liefern die Kegelspitze und die Erzeugendenrichtung der beteiligten Flächen.

Abstract

The starting point of *curved folding* is a planar sheet of paper with some curved line drawn on it. The origami technique of curved folding yields a spatial configuration where the curved line turns into a spatial crease \mathbf{c} and the parts of paper to the left and right of \mathbf{c} morph into two developable surfaces meeting in the sharp edge \mathbf{c} . It may happen that the two developable surfaces turn out to be cones or cylinders. The aim of this thesis is to identify the preconditions for spatial curves \mathbf{c} when this case emerges. The cases of pairs of cones and pairs of cylinders have been addressed and published by Röschel. Hitherto, the case where one of the surfaces is a cone while the other one is a cylinder appears to be missing in literature. This thesis covers this case together with the cases of two cylinders or two cones.

The first part of this thesis commits to important basics principles. These basics prove beneficial further on, when we take a closer look at spatial curves c appearing in curved folding.

The second part examines the following three cases:

As for the case of two cones we can show that there exists some quadric of revolution Φ such that the osculation planes σ of \mathbf{c} are among the tangent planes of Φ . The vertices of the cones are the two real focal points of Φ . Consequently, the quadric Φ is, in general, either an ellipsoid or a two-sheet hyperboloid.

In the second case \mathbf{c} is the intersection curve of a cone and a cylinder. In this case the osculation planes of \mathbf{c} are tangent to a paraboloid Φ . In general, the vertex of the cone will be the focal point of Φ and the generators of the cylinder will be parallel to the axis of Φ .

The third case presents two surfaces through \mathbf{c} that both happen to be cylinders with generators \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 . The tangent vectors of \mathbf{c} are the generators of a quadratic cone. Two of its focal lines are parallel to the directions of \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 .

The concluding section of the thesis contains some examples of curved folding with cones and cylinders. A curve on a paraboloid of revolution Φ determines a family of tangent planes to Φ along that curve. According to the preceding results we can be sure that the edge of regression of this family of planes is a curve \mathbf{c} that is, in theory, perfectly suited for curved folding with a cone and a cylinder. The vertex of that cone is the focal point of Φ and the direction of cylinder generators is parallel to the axis of revolution of Φ .

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	13
1 Begriffserklärungen und Grundlagen	15
1.1 Distanzmessung in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	15
1.1.1 Die Abstandsfunktion	15
1.1.2 Der Lotfußpunkt	16
1.2 Die Parabel	17
1.2.1 Tangenten an die Parabel	18
1.3 Das Drehparaboloid	22
1.3.1 Tangentialebenen an das Drehparaboloid	23
1.4 Die Ellipse	25
1.4.1 Tangenten an die Ellipse	29
1.5 Das Drehellipsoid	33
1.5.1 Tangentialebenen an das Drehellipsoid	34
1.6 Die Hyperbel	36
1.6.1 Tangenten an die Hyperbel	41
1.7 Das zweischalige Drehhyperboloid	45
1.7.1 Tangentialebenen an das zweischalige Drehhyperboloid	46
1.8 Raumkurven	48
1.8.1 Tangenten und Schmiegeebenen an eine Kurve	49
1.8.2 Das begleitende Dreibein	52
1.9 Abwickelbare Flächen	54
1.9.1 Zylinderflächen	54
1.9.2 Kegelflächen	56
1.9.3 Tangentenflächen	57
1.9.4 Die Gratlinie einer Torse	58
1.10 Die geodätische Krümmung	61
1.11 Ein Hauch projektiver Geometrie	64
2 Origami mit Kegel- und Zylinderflächen	67
2.1 Die geodätische Krümmung einer Kurve auf zwei abwickelbaren Flächen	67
2.2 Origami mit Kegelpaaren	69
2.2.1 Der Lotfußpunkt einer Kegelspitze auf der Schmiegeebene	70
2.2.2 Charakterisierung des Falls A	72
2.2.3 Charakterisierung des Falls B	72

2.2.4	Charakterisierung eines $(\mathbf{c}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ -Tripels	75
2.3	Origami mit Kegel und Zylinder	76
2.3.1	Der Lotfußpunkt der Kegelspitze auf der Schmiegeebene	76
2.3.2	Charakterisierung des Falls C	77
2.3.3	Charakterisierung des Falls D	77
2.3.4	Charakterisierung eines $(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{e})$ -Tripels	80
2.4	Origami mit Zylinderpaaren	81
2.4.1	Die an der Schmiegeebene gespiegelte Erzeugendenrichtung	82
2.4.2	Charakterisierung des Falls E	83
2.4.3	Charakterisierung des Falls F	84
2.4.4	Charakterisierung eines $(\mathbf{c}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ -Tripels	86
3	Konstruktion von Tripeln für Origami mit Kegel- und Zylinderflächen	89
3.1	Beispiele von $(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{e})$ -Tripeln	89
3.1.1	Ebene Schnitte	91
3.1.2	Beispiel 1	92
3.1.3	Beispiel 2	94
3.1.4	Beispiel 3	96
3.1.5	Beispiel 4	98
4	Conclusio	101
	Literaturverzeichnis	103

Einleitung

Wenn man den Begriff Origami hört, denkt man zuallererst an die alte japanische Kunst des Papierfaltens, gerade Kanten und klare Strukturen, ohne das Blatt zu schneiden oder einzureißen. Kraniche und Frösche aus buntem Papier zählen zu den Motiven, an denen sich so manche schon versucht haben, aber auch einige weniger künstlerisch anmutende Objekte, wie ein Papierflieger, fallen schon in dieses Gebiet. Es ist naheliegend, den ursprünglich spielerischen aber gleichermaßen künstlerischen Ablauf in konkrete Faltanleitungen zu übersetzen, um Erklärungen und Reproduktionen der Motive zu erleichtern. Dabei ermöglicht genau diese präzise Beschreibung des Faltvorgangs eine geometrische Behandlung dieses Themas. Wie in [1], [2] und [6] kann eine Faltlinie, oder auch eine Seitenkante des Blattes als Gerade der euklidischen Ebene interpretiert werden. Welche Lagebeziehung diese Gerade zu anderen Punkten oder Geraden auf dem Blatt haben kann, kann den ebendort angeführten Huzita–Hatori Axiomen entnommen werden.

Auf dieser Struktur aufbauend, hielt auch die Mathematik Einzug in dieses Gebiet, die hier nun Lösungen für Aufgaben findet, die auf den ersten Blick gar nichts mit Origami zu tun haben, wie z.B. das Lösen von Gleichungen dritten Grades, oder Problemstellungen, die oft leicht verständlich, aber nicht leicht zu lösen sind, worauf von Demaine et al. in [6] aufmerksam gemacht wird. So ist es beispielsweise einfach zu verstehen, dass man einen Airbag, oder Fallschirm so zusammenlegen will, dass er sich möglichst schnell und verlässlich wieder entfalten kann. Allerdings ist es nicht so einfach, diese Faltung nur durch Verständnis dieses Problems zu finden.

In den letzten Jahren gewann auch das Falten entlang von Kurven von Bedeutung, da elegante räumliche Formen nur durch Falten aus ebenen Ausgangsflächen gewonnen werden können, womit Origami eine Renaissance in der Kunst erlebt und u.a. auch in Design und Architektur Fuß fasst - siehe [5], [12] und [15]. Dabei spielt man mit dem Gedanken, die ursprüngliche Idee des Faltens, also das Falten entlang von Geraden, hinter sich zu lassen und faltet, wie schon der Name verrät, entlang von Kurven. Es scheint der Grundidee des Origami zu widersprechen, aber der Leser kann sich, wie von Fuchs et al. in [9] vorgeschlagen, mit einem Experiment selbst davon überzeugen, dass es doch möglich ist: Man zeichne eine Kurve auf ein Blatt Papier und falte es locker entlang dieser eingezeichneten Kurve. Es sei noch darauf hingewiesen, dass es leichter geht, wenn man fest mit dem Stift aufdrückt, da dann die Kurve leichter nachzufalten ist. Weiters sollte man nur mit einer kleinen Umgebung der Kurve arbeiten, also überschüssiges Papier wegschneiden, da ein zu großes Blatt den Faltvorgang erschwert und so auch Selbstdurchdringungen des Papiers vermieden werden.

Nach diesem Experiment kann man nach Eigenschaften dieser an der Kurve hängenden Flächen suchen. Da das Papier nur durch Falten, also ohne es zu schneiden oder zu dehnen, in diesen Zustand gebracht wurde, folgt das Blatt nach Konstruktion einer abwickelbaren Fläche, siehe [11], [22] und [24].

Nun stellt sich auch noch die Frage der Umkehrung dieses Sachverhalts: Ist eine Raumkurve mit zwei an ihr hängenden abwickelbaren Flächen auch wieder als Origami realisierbar? Zwar ist offensichtlich klar, dass jede Fläche einzeln für sich abwickelbar ist, aber das bedeutet noch lange nicht, dass beide Flächen, abgewickelt auf dasselbe Blatt Papier, nahtlos aneinander passen.

Es ist aus [11], [22] und [24] bekannt, dass abwickelbare Flächen aus Stücken von Ebenen, Kegel-, Zylinder- und Tangentenflächen bestehen. Dabei ist es naheliegend diese Fälle einzeln zu betrachten, weil jede dieser Flächenklassen besondere Eigenschaften besitzt. So wurden von Röschel bereits der Fall von zwei Zylinderflächen[19][20] und zwei Kegelflächen[21] betrachtet, diese werden in dieser Diplomarbeit genauer betrachtet. Besondere Aufmerksamkeit wird aber dem bisher noch nicht in der Literatur genauer ausgeführten Fall, dass die eine eine Kegelfläche und die andere eine Zylinderfläche ist, gewidmet. Ziel ist es, Charakteristika solcher Raumkurven, die als Schnitt von Kegel- und Zylinderflächen auftreten, zu finden, sodass die räumliche Konstellation theoretisch als Origami faltbar ist.

Um aber Aussagen über Kurven machen zu können, muss zuerst geklärt werden, was eigentlich eine Kurve im mathematischen Sinn ist. Weiters müssen Objekte und andere Begriffe hergeleitet werden, mit deren Hilfe diese Kurven beschrieben werden können. Kurzgefasst heißt das: Erst kommt die Arbeit des Definierens und dann das Vergnügen, Ergebnisse zu finden.

Zuerst wird der Abstand zwischen Punkten definiert und damit werden Kegelschnitte als Punktfolgen mit besonderen Eigenschaften hergeleitet¹. Mithilfe dieser Kegelschnitte werden Eigenschaften von Tangentialebenen an Drehquadriken hergeleitet. Diese haben zwar bei erster Betrachtung nichts mit diesem Thema zu tun, sie werden aber im Laufe dieser Arbeit noch essenziell zum Ergebnis beitragen.

Weiters werden Frenetkurven und deren Begleitbein definiert, und es wird die geodätische Krümmung als wichtige Eigenschaft von Kurven auf Zylinder- und Kegelflächen für die ebene Konfiguration der Faltung erkannt.

Zu guter Letzt werden noch ein paar Begriffe aus der projektiven Geometrie erwähnt, die kurz zum Einsatz kommen werden.

Erst mit all diesen Hilfsmitteln ist es möglich, die Suche nach Eigenschaften von Kurven, die bei Origami mit Kegeln und Zylindern auftreten, zu beginnen.

¹Die Kegelschnittsdefinition von Apollonius, sowie die Gärtnerkonstruktion sind in [10] zu finden.

1 Begriffserklärungen und Grundlagen

Es gibt die verschiedensten Varianten Kegelschnitte zu definieren. Die Möglichkeiten reichen vom Schnitt eines Drehkegels, daher der Name Kegelschnitt, über die Gärtnerkonstruktion, bis hin zum Schnitt zweier Strahlbüschel in einer projektiven Ebene, siehe [10], [17] und [18]. Ob man einen dieser angeführten Zugänge, oder doch einen völlig anderen wählt, hängt ganz klar von der beabsichtigten Verwendung ab. Mehr über die unterschiedlichen Zugänge zu Kegelschnitten und ihren Eigenschaften geben Gläser et al. in [10] an, woran sich großteils auch dieser Abschnitt orientiert. In dieser Arbeit wird besonderes Augenmerk auf die Parabel gelegt, die in den nächsten Sätzen und Definitionen genauer betrachtet wird. Degenerierte Kegelschnitte, wie z.B. Doppelgeraden, sind hier von geringerem Interesse, daher genügt die Definition einer Parabel als Menge von Punkten, die den gleichen Abstand von einem festen Punkt und einer festen Geraden besitzen. Um diese Punktmenge zu definieren ist es aber vorerst noch notwendig den Begriff des Abstandes festzulegen. Eine Vertiefung in die angeführten Sätze und Definitionen zum Thema Abstand bieten [4],[11] und [13].

1.1 Distanzmessung in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

1.1.1 Die Abstandsfunktion

Definition 1.1. In \mathbb{R}^n , mit $n \in \mathbb{N}$, seien zwei Punkte \mathbf{p} und \mathbf{q} gegeben. Dann heißt

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle}$$

Abstand von \mathbf{p} und \mathbf{q} .

In dieser Arbeit sind nur die Abstände zwischen Punkten in der Ebene oder Punkten im Raum gefragt. Das sind die Fälle mit $n = 2$ oder $n = 3$. Aber um doppelte Definitionen zu vermeiden, genauer gesagt Definitionen, die sich nur in der Dimension der beteiligten Vektoren unterscheiden, bleiben wir hier bei der Notation $n \in \mathbb{N}$.

Auch der Abstand von Punkten zu Geraden ist für die Definition von Parabeln wichtig. Da eine Gerade als Menge von Punkten verstanden werden kann, wird der Abstand mithilfe der gerade eingeführten Abstandsfunktion definiert.

Definition 1.2. In \mathbb{R}^n seien ein Punkt \mathbf{p} und eine Menge von Punkten M gegeben. Dann ist der Abstand von \mathbf{p} zu M durch

$$d(\mathbf{p}, M) = \inf \{d(\mathbf{p}, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in M\}$$

definiert.

Ist die eben genannte Menge M eine Gerade, so liefert diese Abstandsfunktion den gesuchten Abstand von Punkt und Gerade. Analoges gilt, falls es sich bei M um eine Ebene handelt.

1.1.2 Der Lotfußpunkt

Definition 1.3. In \mathbb{R}^n seien ein Punkt \mathbf{p} und eine Menge von Punkten M gegeben. Ein Punkt $\mathbf{q} \in M$ heißt Lotfußpunkt von \mathbf{p} auf M , wenn die Gleichung

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d(\mathbf{p}, M)$$

erfüllt ist.

Satz 1.4. Der Lotfußpunkt \mathbf{q} von \mathbf{p} auf eine Gerade $g = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{r}$, mit $\|\mathbf{r}\| = 1$, lässt sich als

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} + \langle \mathbf{p} - \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle \mathbf{r}$$

darstellen.

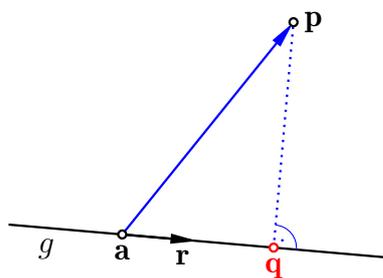


Abbildung 1.1: Lotfußpunkt \mathbf{q} von Punkt \mathbf{p} auf Gerade g .

Beweis. Das Skalarprodukt $\langle \mathbf{p} - \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle$ liefert, wie in Abb. 1.1 ersichtlich, die Länge der Strecke von \mathbf{a} nach \mathbf{q} . Folgt man nun von \mathbf{a} aus dem Richtungsvektor \mathbf{r} für eine Strecke dieser Länge, gelangt man zum gesuchten Lotfußpunkt \mathbf{q} . Dieser liegt nach Konstruktion auf der Geraden g .

Dass es sich bei \mathbf{q} um ein Minimum handelt, ist wegen der Dreiecksungleichung klar. Jeder andere Punkt auf der Geraden g besitzt einen größeren Abstand von \mathbf{p} als \mathbf{q} . \square

Aus

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{r}, \mathbf{p} - \mathbf{a} - \langle \mathbf{p} - \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{r}, \mathbf{p} \rangle - \langle \mathbf{r}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{p} - \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle = 0$$

ergibt sich

Bemerkung 1.1. Der Vektor $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ von einem Punkt \mathbf{p} zu seinem Lotfußpunkt $\mathbf{q} \in g$ ist orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden g . Also schneidet das Lot durch \mathbf{p} , wie man es sich vom Namen her erwarten kann, die Gerade g im Lotfußpunkt \mathbf{q} .

Diese Bemerkung gibt auch Anlass zu folgendem Satz. Hierbei ist es wichtig, dass die Punkte in \mathbb{R}^3 liegen. Nur dort ist das Kreuzprodukt definiert.

In \mathbb{R}^3 gilt:

Satz 1.5. Der Lotfußpunkt \mathbf{q} von \mathbf{p} auf eine Ebene $\varepsilon = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{r}_1 + \mu \mathbf{r}_2$, mit $\|\mathbf{r}_1\| = \|\mathbf{r}_2\| = 1$, $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ linear unabhängig und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, lässt sich als

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} - \langle \mathbf{p} - \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n},$$

wobei $\mathbf{n} := \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ darstellen.

Beweis. Zuerst ist zu zeigen, dass $\mathbf{q} \in \varepsilon$. Es gilt folgende Überlegung:

$$\mathbf{q} \in \varepsilon \Leftrightarrow \exists \lambda_q, \mu_q \text{ mit } \mathbf{q} - \mathbf{a} = \lambda_q \mathbf{r}_1 + \mu_q \mathbf{r}_2 \Leftrightarrow \mathbf{q} - \mathbf{a} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \langle \mathbf{q} - \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

Setzt man nun für \mathbf{q} die oben behauptete Darstellung in das Skalarprodukt ein, ergibt sich

$$\langle \mathbf{q} - \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{p} - \langle \mathbf{p} - \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} - \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{p} - \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{p} - \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

Damit liegt \mathbf{q} tatsächlich in ε . Der restliche Beweis verläuft analog zu dem von Satz 1.4. \square

1.2 Die Parabel

Mit der oben angeführten Abstandsfunktion ist es nun möglich, die Parabel über die Kegelschnittsdefinition von Apollonius [10] einzuführen. Im Allgemeinen orientiert sich dieser Abschnitt stark an [10] von Gläser et al.

Definition 1.6. Seien \mathbf{f} ein Punkt und l eine Gerade in \mathbb{R}^2 , mit $d(\mathbf{f}, l) \neq 0$. Dann heißt

$$\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{p}, \mathbf{f}) = d(\mathbf{p}, l)\}$$

Parabel mit Brennpunkt \mathbf{f} und Leitgerade l .

Zur Veranschaulichung dieser Definition dient Abb. 1.2.

Ohne die Allgemeinheit dieser Definition einzuschränken, kann man das Koordinatensystem so wählen, dass die x -Achse parallel zur Leitgeraden l verläuft und der Brennpunkt \mathbf{f} auf der x -Achse liegt. Verschiebt und skaliert man noch, so lässt sich l durch die Gleichung $y = -\frac{1}{4}$ und der Brennpunkt durch die Koordinaten $(0, \frac{1}{4})^T$ darstellen. In dieser nicht unabsichtlich gewählten Darstellung fällt direkt für alle Punkte

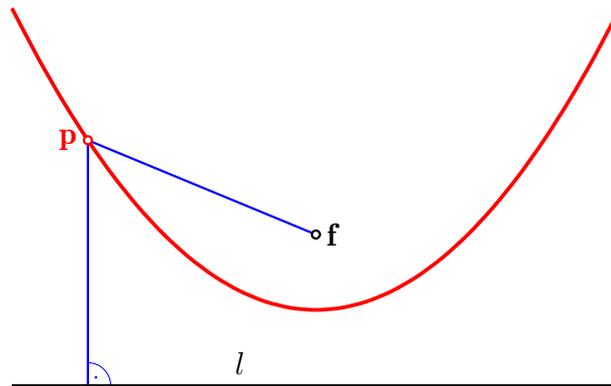


Abbildung 1.2: Die Parabel als Menge von Punkten \mathbf{p} gleichen Abstands zu Brennpunkt \mathbf{f} und Leitgerade l .

$\mathbf{p} = (x, y)^T$ der Parabel auf, dass ihre Koordinaten eine quadratische Gleichung erfüllen:

Einerseits ist

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}) = d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2},$$

andererseits ist

$$d(\mathbf{p}, l) = d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(y + \frac{1}{4}\right)^2}.$$

Damit die Wurzeln verschwinden, werden die Quadrate der Abstände betrachtet. Durch Gleichsetzen der quadrierten Distanzen erhält man

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f})^2 = d(\mathbf{p}, l)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} \Leftrightarrow x^2 = y.$$

Somit handelt es sich beim Graphen der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ um die oben definierte Parabel. In dieser Darstellung ist auch die Symmetrie der Parabel ersichtlich: Wenn ein Punkt $(x, y)^T$ auf der Parabel liegt, trifft dasselbe auch auf $(-x, y)^T$ zu. Die Symmetrieachse ist hier die y -Achse, die normal zur Leitgeraden l verläuft.

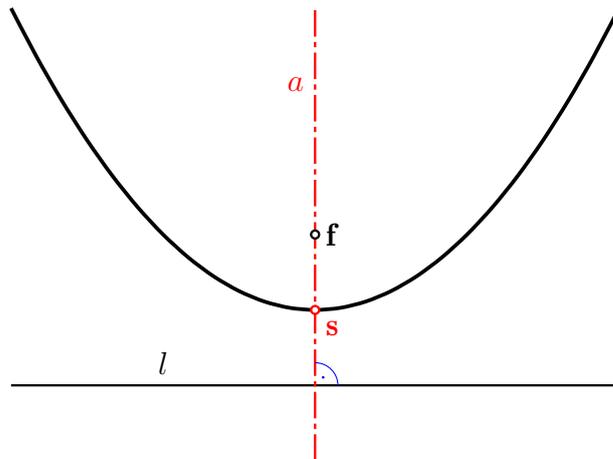
Definition 1.7. *Der Schnittpunkt einer Parabel mit ihrer Achse heißt Scheitel.*

Achse und Scheitel der Parabel sind in Abb. 1.3 visualisiert.

1.2.1 Tangenten an die Parabel

Wie in [14] nachzulesen ist, ist

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Abbildung 1.3: Parabel mit Achse a und Scheitel s .

die Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle x_0 . $f'(x_0)$ ist hier die wohlbekanntete Ableitung von f .

Angewandt auf die Gleichung $y = x^2$ liefert das die Gleichung einer Tangente an die Parabel.

Definition 1.8.

$$y = 2x_0x - x_0^2$$

ist die Gleichung der Tangente an den Graphen der Parabel $y = x^2$ im Punkt $(x_0, x_0^2)^T$.

Definition 1.9. Die Tangente an die Parabel durch den Scheitel heißt Scheiteltangente.

Es gibt viele Varianten, Tangenten an die Parabel zu bestimmen, aber die folgende ist später noch von essenzieller Bedeutung, daher wird sie hier noch einmal für den Leser genauer betrachtet.

Satz 1.10. t ist Tangente an die Parabel mit Brennpunkt \mathbf{f} und Leitgerade $l \Leftrightarrow t$ schneidet die zu t orthogonale, durch \mathbf{f} gehende Gerade $t_{\mathbf{f}}^{\perp}$ in einem Punkt. Dieser liegt auf der Scheiteltangente.

In Abb. 1.4 wird dieser Satz veranschaulicht.

Beweis. O.B.d.A. besitze die Parabel wieder die Darstellung $y = x^2$. Dann ist $t : y = 2x_0x - x_0^2$ ihre Tangente im Punkt $(x_0, x_0^2)^T$. Die zu dieser Gerade orthogonale Gerade, die durch den Brennpunkt verläuft, besitzt die Form $t_{\mathbf{f}}^{\perp} : y = -\frac{1}{2x_0}x + \frac{1}{4}$. Der Schnittpunkt beider Geraden wird durch Gleichsetzen der Geradengleichungen berechnet.

$$2x_0x - x_0^2 = -\frac{1}{2x_0}x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x_0x + \frac{1}{2x_0}x = x_0^2 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(2x_0 + \frac{1}{2x_0}\right)x = x_0^2 + \frac{1}{4}$$

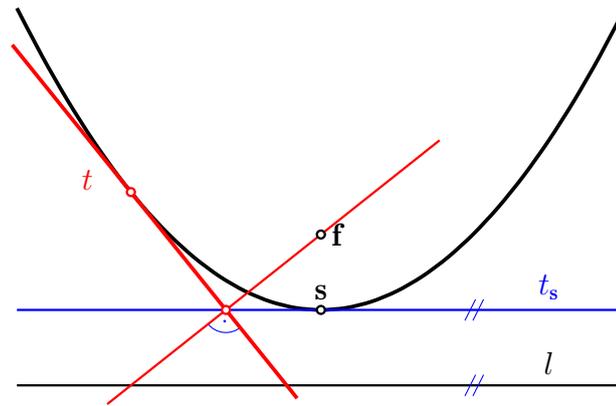


Abbildung 1.4: Der Schnittpunkt einer Tangente t mit ihrer Normalen durch den Brennpunkt f liegt auf der Scheiteltangente t_s .

Damit ergibt sich

$$x = \frac{x_0^2 + \frac{1}{4}}{2x_0 + \frac{1}{2x_0}} = \frac{4x_0^2 + 1}{4} = \frac{(4x_0^2 + 1)2x_0}{4(4x_0^2 + 1)} = \frac{x_0}{2}$$

für die x -Koordinate des Schnittpunktes. Da im Scheitel der Parabel $x_0 = 0$ ist, muss dieser in dieser Rechnung ausgenommen werden und einzeln betrachtet werden.

Für alle anderen Punkte der Parabel liefert Rückeinsetzen des x -Wertes in die Tangentengleichung die y -Koordinate des Schnittpunktes.

$$y = 2x_0x - x_0^2 = 2x_0 \frac{x_0}{2} - x_0^2 = 0$$

Der Schnittpunkt der Scheiteltangente $t_s : y = 0$ und $t_s^\perp : x = 0$ ist der Scheitel $s = (0, 0)^T$ selbst.

Damit besitzt der Schnittpunkt von t und t_f^\perp für jeden Punkt $(x_0, x_0^2)^T$ der Parabel $(\frac{x_0}{2}, 0)^T$ als Koordinaten und liegt damit auf der y -Achse, welche der Scheiteltangente entspricht.

Die Umkehrung der Aussage gilt, da es sich bei der Rechnung um Äquivalenzumformungen handelt. \square

Aus Satz 1.10 und dessen Beweis folgt eine wohlbekanntere Tangentenkonstruktion in einem Punkt der Parabel, wie sie auch in [10] zu finden ist. Diese wird in Abb. 1.5 veranschaulicht.

Satz 1.11. g sei der Schnittpunkt der Leitgerade l einer Parabel mit einer Gerade l_p^\perp , die durch den Punkt p dieser Parabel verläuft und l orthogonal scheidet. Die Tangente t_p im Punkt p schneidet die Gerade durch den Brennpunkt f und g orthogonal.

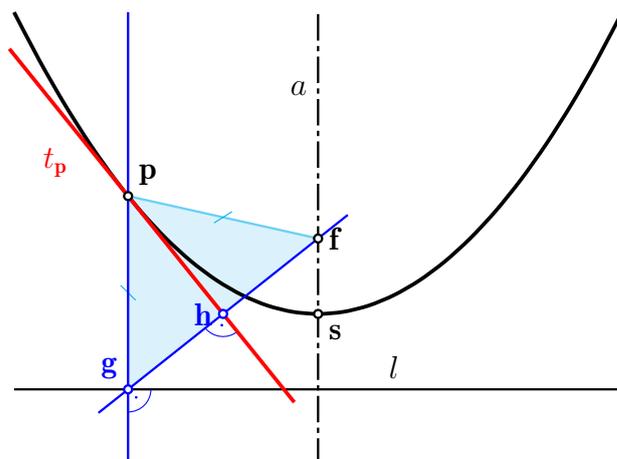


Abbildung 1.5: Konstruktion der Tangente t_p in Punkt \mathbf{p} an die Parabel. t_p steht orthogonal auf die Gerade, die durch den Brennpunkt \mathbf{f} und den Gegenpunkt \mathbf{g} verläuft.

Beweis. $d(\mathbf{p}, \mathbf{g}) = d(\mathbf{p}, l)$, weil \mathbf{g} der Lotfußpunkt von \mathbf{p} auf l ist. Das in Abb. 1.5 blau hinterlegte Dreieck \mathbf{gpf} ist damit gleichschenkelig. Die Gerade t_p ist nun die Höhe des Dreiecks durch den Punkt \mathbf{p} und schneidet damit die Gerade durch \mathbf{g} und \mathbf{f} im rechten Winkel. Der dabei auftretende Schnittpunkt \mathbf{h} halbiert dabei sogar die Strecke \mathbf{gf} , weil \mathbf{gpf} gleichschenkelig ist.

Besitzt \mathbf{p} die Koordinaten $(x_0, x_0^2)^T$, so gilt $\mathbf{g} = (x_0, -\frac{1}{4})^T$. Der Halbpunkt \mathbf{h} der Strecke von \mathbf{g} bis $\mathbf{f} = (0, \frac{1}{4})^T$ besitzt daher die Koordinaten

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} + \mathbf{f}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x_0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 1.10 ist t_p also eine Tangente. Da t_p nach Konstruktion durch \mathbf{p} geht, ist mit \mathbf{p} damit auch ihr Berührungspunkt an die Parabel bestimmt. \square

Ist zu Brennpunkt und Leitgerade lediglich eine Tangente an die Parabel gegeben, ist durch die Umkehrung dieser Konstruktion also auch die Rekonstruktion des Berührungspunkts dieser Tangente möglich.

Diese Konstruktion kann noch zu einer sehr schnellen Version der Konstruktion einer Tangente umgebaut werden.

Korollar 1.12. *Sei eine Parabel durch Brennpunkt \mathbf{f} und Leitgerade l gegeben. Eine Gerade g durch \mathbf{f} , die nicht parallel zur Leitgerade ist, schneidet Die Scheiteltangente in einem Punkt. Die Normale zu g durch diesen Schnittpunkt ist Tangente an die Parabel.*

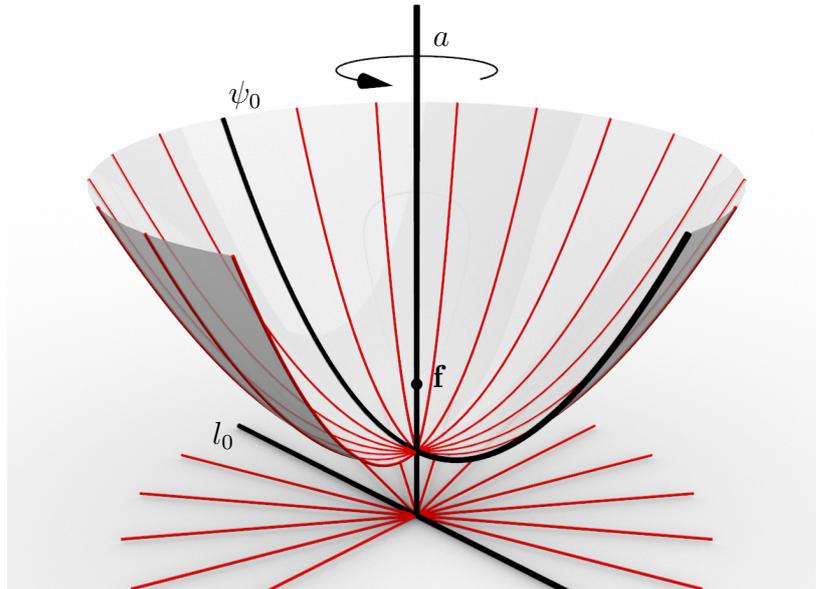


Abbildung 1.6: Das Drehparaboloid als Rotationsfläche, die von der Parabel ψ_0 mit Brennpunkt \mathbf{f} und Leitgerade l_0 überstrichen wird. Die Achse a der Parabel ist dabei auch die Drehachse des Paraboloids.

1.3 Das Drehparaboloid

Es sei ψ_0 eine Parabel in \mathbb{R}^2 gegeben. Wird die Ebene, in der die Parabel definiert ist, nun in den \mathbb{R}^3 eingebettet, so ist die Parabel eine ebene Kurve im Raum. Dreht man ψ_0 um ihre Achse, dann wird dabei von ihr eine Fläche überstrichen. Diese Fläche, wie in Abb. 1.6 angedeutet, ist rotationssymmetrisch und wird Drehparaboloid Ψ genannt. Der Brennpunkt der Parabel bleibt bei Drehungen um die Achse der Parabel fix. Die Leitgerade der Parabel hingegen ändert bei diesen Rotationen ihre Position, aber liegt dabei stets in einer zur Achse orthogonalen Ebene. Diese von der Leitgeraden überstrichene Ebene soll Leitebene heißen.

Die Achse der Parabel schneidet die Leitgerade orthogonal. Das ist die gleiche Richtung wie das Lot auf die Leitgerade im Punkt \mathbf{p} . Da die ebene Konfiguration um die Achse der Parabel gedreht wird, ist die Richtung des Lots auf die Leitgerade auch die Richtung des Lots auf die Leitebene. Damit entspricht der Abstand eines Punktes \mathbf{p} auf der Parabel zur Leitgeraden dem Abstand zur Leitebene.

Die analoge Überlegung ist auch für Punkte auf Parabeln ψ zulässig, wobei diese Parabeln und Leitgeraden aus der Rotation der Parabel ψ_0 um ihre Achse hervorgehen. Diese Punkte liegen nach Konstruktion ebenfalls auf dem Drehparaboloid.

Nach diesen Überlegungen, die auch in [25] zu finden sind, ist es möglich das Drehparaboloid auf die gleiche Weise wie die Parabel zu definieren.

Definition 1.13. Seien \mathbf{f} ein Punkt und ε eine Ebene in \mathbb{R}^3 , wobei $d(\mathbf{f}, \varepsilon) \neq 0$ gelte.

Dann heißt

$$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathbf{p}, \mathbf{f}) = d(\mathbf{p}, \varepsilon)$$

Drehparaboloid mit Brennpunkt \mathbf{f} und Leitebene ε .

Definition 1.14. Die Symmetrieachse des Paraboloids heißt Achse.

1.3.1 Tangentialebenen an das Drehparaboloid

In [4], [8], [7], [11] und [23] finden sich weitaus tiefergehende Zugänge zum Gebiet der Tangentialebenen. Diese Exaktheit erfordert allerdings weitere Definitionen und Überlegungen, die aufgrund ihres Umfangs nicht in dieser Arbeit angeführt werden. Die Ähnlichkeit einer Tangente in der Ebene zur Tangentialebene einer räumlichen Situation soll hier also ausreichen, um ein Gefühl für den Umgang mit dem Begriff der Tangentialebene zu entwickeln.

Analog zur Parabel wird die Tangentialebene als lineare Approximation des Drehparaboloids in einem Punkt \mathbf{p} verstanden. Die Parabel, auf der \mathbf{p} liegt, besitzt die Tangente $t_{\mathbf{p}}$, welche die lineare Approximation der Parabel ist.

Diese Analogie motiviert die folgende Definition:

Definition 1.15. Sei ein Drehparaboloid Ψ gegeben. \mathbf{p} sei ein Punkt auf dem Drehparaboloid.

Die lineare Approximation von Ψ in \mathbf{p} heißt Tangentialebene an das Paraboloid Ψ im Punkt \mathbf{p} .

Definition 1.16. Die Tangentialebene im Scheitel des Paraboloids heißt Scheiteltangentialebene.

Ist \mathbf{p} der Scheitel der Parabel ψ_0 , so rotiert die Tangente in diesem Punkt ebenfalls um die Achse der Parabel. Die Ebene, die von dieser Tangente überstrichen wird, ist bereits die Tangentialebene, weil sich jede Scheiteltangente in dieser Ebene wiederfindet.

Für Punkte, die nicht der Scheitel sind, ist es aber ebenso möglich die Tangentialebene zu bestimmen.

Rotiert die Parabel ψ um ihre Achse, so beschreibt jeder Punkt $\mathbf{p}_0 \in \psi_0$ eine Kreisbahn. Jeder Punkt \mathbf{p} des Paraboloids besitzt so ein Urbild $\mathbf{p}_0 \in \psi_0$. Diese Kreisbahn liegt in einer Ebene orthogonal zur Achse, siehe Abb. 1.7. Außerdem ändert \mathbf{p} den Abstand zur Achse nicht. Damit gilt, dass die Tangente an diesen Kreis in \mathbf{p} orthogonal auf jene Ebene steht, in der die rotierte Parabel ψ liegt. Die Parabel ψ ist diejenige, die den Punkt \mathbf{p} enthält.

Die Ebene durch die Achse des Paraboloids und den Punkt \mathbf{p} heiße ε_{ψ} . Der Schnitt des Paraboloids mit ε_{ψ} ist die Parabel ψ .

Die Ebene durch die Tangente an ψ im Punkt \mathbf{p} normal auf ε_{ψ} ist dann die Tangentialebene von Ψ in \mathbf{p} .

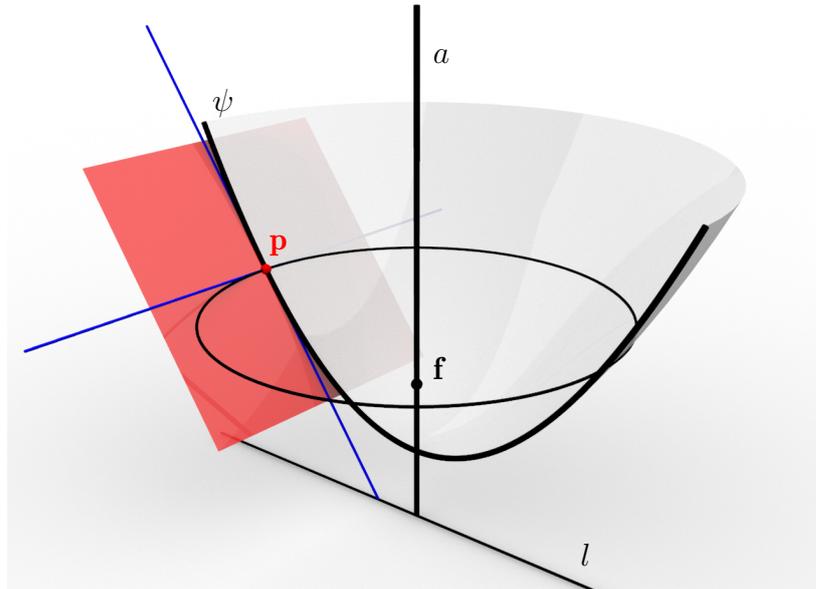


Abbildung 1.7: Schnitt des Drehparaboloids mit der Ebene ε_ψ . Die Schnittkurve ist die Parabel ψ . Die Tangente an ψ , sowie die Tangente an die Bahn von \mathbf{p} sind in blau dargestellt und spannen die Tangentialebene in \mathbf{p} auf.

Da die Tangentialebene an ein Drehparaboloid Ψ stets die Tangente an eine in Ψ enthaltene Parabel enthält, können die Konstruktionen von Tangenten an Parabeln auch auf die Konstruktionen von Tangentialebenen von Drehparaboloiden übertragen werden. Drehparaboloide, die also aus einer einparametrischen Schar rotierender Parabeln bestehen, erben damit einige Eigenschaften dieser Parabeln. In Abb. 1.8 ist die Ähnlichkeit der Konstruktion von Tangentialebenen zu der von Tangenten ersichtlich.

Satz 1.17. *Sei eine Ebene ε' und ein Punkt \mathbf{f} in \mathbb{R}^3 mit $d(\mathbf{f}, \varepsilon') \neq 0$ gegeben. Jede nicht zu ε' parallele Gerade g durch \mathbf{f} schneidet ε' in einem Punkt. Die Ebene τ durch diesen Schnittpunkt orthogonal zu g ist Tangentialebene an das Drehparaboloid mit Brennpunkt \mathbf{f} und Leitebene ε . Es gilt: ε' ist die Scheiteltangentialebene des Drehparaboloids.*

Beweis. Betrachtet man die Ebene ε_ψ durch g orthogonal zu ε' , so schneidet diese aus der räumlichen Situation einen ebenen Ausschnitt heraus:

Der Punkt \mathbf{f} und die Gerade g liegen in dieser Ebene.

ε' wird von ε_ψ orthogonal geschnitten. Diese Schnittgerade heiße l' .

Der Schnitt von ε' mit τ sei die Gerade t .

Diese ebene Konfiguration entspricht nun aber genau der Konstruktion einer Tangente an eine Parabel ψ , wie in Korollar 1.12. Der Brennpunkt ist dabei der Punkt \mathbf{f} , und

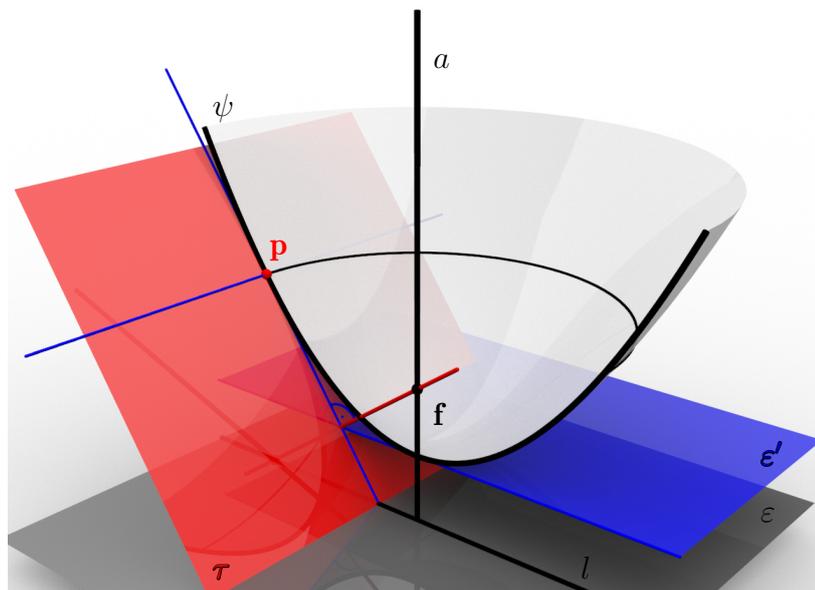


Abbildung 1.8: Eine beliebige Gerade in rot verläuft durch den Punkt \mathbf{f} . Die Normalebene τ , die durch den Schnittpunkt der Geraden mit ε' geht, ist Tangentialebene an das Drehparaboloid mit Brennpunkt \mathbf{f} und Leitebene ε . Der Schnitt des Drehparaboloids mit ε_ψ liefert die Parabel ψ .

die Leitgerade l ist parallel zu l' . Die Gerade l' geht durch den Scheitel der Parabel, womit l' die Scheiteltangente von ψ ist.

Im Raum geht die Tangentialebene an das durch Rotation von ψ_0 erzeugte Paraboloid durch die Tangente t an ψ und ist orthogonal zu ε_ψ . Diese Bedingungen werden von τ erfüllt. Die Ebene ε , die durch l geht und orthogonal auf ε_ψ ist, ist parallel zu ε' . Damit handelt es sich bei ε und ε' um die Leitebene und die Scheiteltangentialebene des Drehparaboloids. \square

1.4 Die Ellipse

Das Paraboloid allein reicht für diese Arbeit nicht aus, da Röschel in [21] auf Eigenschaften von Tangentialebenen von Drehellipsoiden und Drehhyperboloiden aufbaut. Diese Eigenschaften erben diese analog zu Drehparaboloiden wieder von Ellipsen bzw Hyperbeln. Daher werden auch die für diese Arbeit essenziellen Eigenschaften der Ellipse kurz wiederholt. Obwohl es andere effiziente Möglichkeiten gibt, um zu den hier gebrachten Sätzen und Definitionen zu gelangen, wird im Hinblick auf die Konsistenz ein analoger Zugang zum vorhergehenden Kapitel gewählt. In [10] finden sich auch hierzu die wichtigsten Aussagen dieses Kapitels großteils wieder.

Mithilfe der Abstandsfunktion kann die Ellipse mit der Gärtnerkonstruktion, siehe Abb. 1.9, definiert werden. Diese baut auf den Brennpunkteigenschaften von Kegel-

schnitten auf.

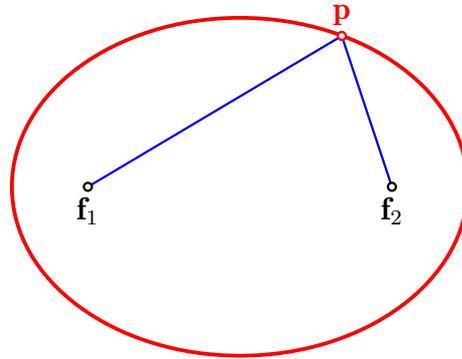


Abbildung 1.9: Die Ellipse als Menge von Punkten \mathbf{p} , deren Summe der Abstände zu den Brennpunkten \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 konstant ist.

Definition 1.18. Seien zwei Punkte \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 in \mathbb{R}^2 gegeben. Dann heißt die Menge der Punkte $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) + d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) = 2a, \text{ mit } 2a > d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)\}$ Ellipse mit Brennpunkten \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 .

Das Koordinatensystem kann ohne die Allgemeinheit dieser Definition einzuschränken so gewählt werden, dass beide Brennpunkte \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 auf der x -Achse liegen und der Ursprung \mathbf{o} der Mittelpunkt dieser Brennpunkte ist. Daher gilt in Koordinatendarstellung $\mathbf{f}_1 = (e, 0)^T$ mit $e \in \mathbb{R}^+$ und $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1$. Die Koordinateneinträge der Punkte $\mathbf{p} = (x, y)^T$ der Ellipse erfüllen analog zur Parabel eine Gleichung: Für die Distanzen $d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1)$ und $d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2)$ gilt:

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) = d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2},$$

sowie

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) = d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}.$$

Diese Distanzen erfüllen nach Definition die Gleichung

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) + d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) = 2a$$

was äquivalent zu

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a$$

ist. Um wie bei der Parabel auf eine quadratische Gleichung zu kommen, müssen die Wurzeln beseitigt werden. Quadrieren beider Seiten ist der erste Schritt. Dabei ist es einfacher, die Wurzeln auf jeweils andere Seiten der Gleichung aufzuteilen.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \Rightarrow \\ (x-e)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + (x+e)^2 + y^2 \end{aligned}$$

Eine Wurzel ist zwar noch übrig, aber durch Subtraktion von x^2 , e^2 und y^2 von beiden Seiten lässt sich diese Gleichung schon sehr vereinfachen.

$$-2xe = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + 2xe$$

Nun quadriert man erneut, nachdem die Wurzel auf eine Seite und die restlichen Terme auf die andere Seite gebracht wurden.

$$a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = a^2 + xe \Rightarrow a^2(x^2 + 2xe + e^2 + y^2) = a^4 + 2a^2xe + x^2e^2$$

Nach weiterem Umformen erhält man nun

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

Mithilfe der Definition $b^2 := a^2 - e^2$ folgt also

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

und nach einer letzten Division durch a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Gilt für einen Punkt, dass die Summe der Distanzen von ihm zu den Brennpunkten $2a$ ist, so erfüllen seine Koordinaten auch die eben berechnete Gleichung. Die Umkehrung ist nicht klar, da Quadrieren im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung ist.

Erfüllt ein Punkt die Gleichung einer Ellipse, so besitzt er die Koordinaten

$$\mathbf{p} = \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, x \right), \text{ mit } |x| \leq a$$

Betrachtet man nun die beiden Abstände von \mathbf{p} zu den Brennpunkten $\mathbf{f}_{1,2}$, so ergibt sich aus

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) = \left\| \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, x \right) - \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x - e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

und

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) = \left\| \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, x \right) - \begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x + e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

die Summe

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) + d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) = \sqrt{(x - e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} + \sqrt{(x + e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}.$$

Wird $b^2 = a^2 - e^2$ rücks substituiert, so folgt

$$\begin{aligned}
 d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) + d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) &= \sqrt{(x - e)^2 + \frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - x^2)} + \sqrt{(x + e)^2 + \frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - x^2)} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2(x - e)^2 + (a^2 - e^2)(a^2 - x^2)}{a^2}} \\
 &\quad + \sqrt{\frac{a^2(x + e)^2 + (a^2 - e^2)(a^2 - x^2)}{a^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2x^2 - 2a^2xe + a^2e^2 + a^4 - a^2x^2 - a^2e^2 + x^2e^2}{a^2}} \\
 &\quad + \sqrt{\frac{a^2x^2 + 2a^2xe + a^2e^2 + a^4 - a^2x^2 - a^2e^2 + x^2e^2}{a^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(a^2 - xe)^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{(a^2 + xe)^2}{a^2}} \\
 &= \frac{a^2 - xe}{a} + \frac{a^2 + xe}{a} \\
 &= 2a.
 \end{aligned}$$

Da $|x| \leq a$ gilt ist es kein Problem im vorletzten Schritt dieser Rechnung die Wurzel zu ziehen.

Mit diesem Ergebnis ist auch die Rückrichtung gezeigt. Also ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

die Gleichung der Ellipse.

Mithilfe dieser Gleichung sind die Symmetrieachsen der Ellipse leicht zu erkennen. Sowohl der Punkt $(-x_0, y_0)^T$, als auch $(x_0, -y_0)^T$ erfüllen diese Gleichung, sofern der Punkt $(x_0, y_0)^T$ auf der Ellipse liegt. Damit ist die x -Achse, auf der sich beide Brennpunkte befinden, und auch die y -Achse Symmetrieachse der Ellipse.

Definition 1.19. Die Symmetrieachsen einer Ellipse heißen Hauptachse und Nebenachse. Die Hauptachse ist diejenige, auf der beide Brennpunkte \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 der Ellipse liegen. Die Schnittpunkte der Ellipse mit ihrer Hauptachse heißen Hauptscheitel und mit ihrer Nebenachse Nebenscheitel.

Definition 1.20. Der Halbierungspunkt $\mathbf{m} := \frac{\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2}{2}$ beider Brennpunkte heißt Mittelpunkt der Ellipse.

Definition 1.21. Sei \mathbf{m} der Mittelpunkt der Ellipse. Der Kreis mit Mittelpunkt in \mathbf{m} , der durch beide Hauptscheitel geht heißt Hauptscheitelkreis. Der Kreis mit Mittelpunkt in \mathbf{m} , der durch beide Nebenscheitel geht heißt Nebenscheitelkreis.

In Abbildung 1.10 finden sich diese drei Definitionen wieder.

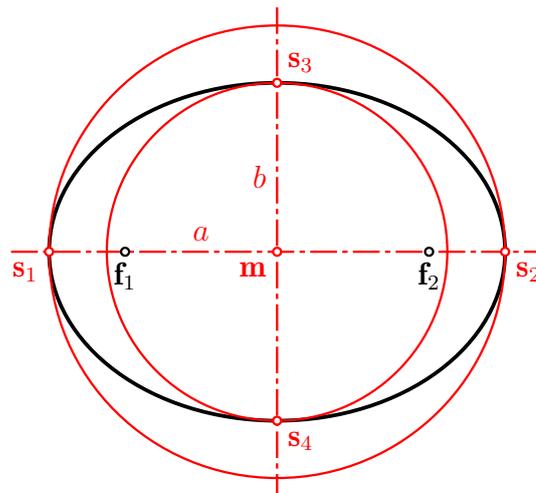


Abbildung 1.10: Ellipse mit Mittelpunkt m . Die Hauptachse a schneidet die Ellipse in den Hauptfokalen f_1 und f_2 . Die Nebenachse b schneidet die Ellipse in den Nebenfokalen s_3 und s_4 . Der Hauptscheitelkreis geht durch die Hauptfokale, der Nebenscheitelkreis durch die Nebenfokale.

1.4.1 Tangenten an die Ellipse

Mithilfe des Satzes über implizite Funktionen [8] ist aus der Gleichung einer Ellipse

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

die Tangente an dieselbe zu errechnen: Aus $f(x) := y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ und

$$\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

folgt, dass ist die Ableitung von F nach x gleich

$$\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx}$$

ist. Für $\frac{dy}{dx}$ bedeutet das nun, dass

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xb^2}{ya^2}$$

gilt. An dieser Stelle wird wieder die allgemein bekannte Definition einer Tangente, siehe [14], herangezogen:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Durch Einsetzen erhält man für den Punkt $(x_0, y_0)^T$ auf der Ellipse

$$y = y_0 - \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2} (x - x_0),$$

wobei $y_0 = 0$ ausgeschlossen werden muss. Durch Multiplikation mit y_0 und Division durch b^2 auf beiden Seiten ergibt sich

$$\frac{yy_0}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{xx_0 - x_0^2}{a^2}.$$

Da der Punkt $(x_0, y_0)^T$ die Ellipsengleichung und damit $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ erfüllt, ergibt sich die Gleichung

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

für die Tangente an eine Ellipse im Punkt $(x_0, y_0)^T$. Für Punkte der Ellipse, die auf der x -Achse liegen, also die Hauptscheitel, gilt diese Rechnung nicht. Jedoch liefert die erhaltene Gleichung trotzdem Geraden für diese Punkte. Diese Geraden sind parallel zur y -Achse und schneiden die Ellipse in den entsprechenden Hauptscheiteln. Da die Hauptscheitel mit $(\pm a, 0)^T$ die betragsmäßig größten x -Koordinaten aller Punkte der Ellipse besitzen, schneiden diese Geraden die Ellipse nur einmal. Also liefert die oben berechnete Gleichung in allen Punkten der Ellipse die Tangente. Dieses Ergebnis rechtfertigt die nachfolgende Definition.

Definition 1.22. *Ist*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung einer Ellipse und $(x_0, y_0)^T$ ein Punkt, der diese Gleichung erfüllt. Dann ist

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Tangente an die Ellipse im Punkt $(x_0, y_0)^T$.

Für die spätere Betrachtung von [21] ist noch eine wichtige Eigenschaft von Tangenten von Nöten, die gleichzeitig eine sehr effiziente Tangentenkonstruktion liefert:

Satz 1.23. *t ist Tangente an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit Brennpunkten \mathbf{f}_1 und $\mathbf{f}_2 \Leftrightarrow t$ schneidet die zu t orthogonale, durch \mathbf{f}_1 verlaufende Gerade $t_{\mathbf{f}_1}^\perp$ in einem Punkt. Dieser liegt auf dem Hauptscheitelkreis der Ellipse.*

Beweis. Aus der Gleichung der Tangente im Punkt $(x_0, y_0)^T$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

kann direkt der Normalvektor $(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2})^T$ herausgelesen werden. Damit ist die Parameterdarstellung von $t_{\mathbf{f}_1}^\perp$

$$t_{\mathbf{f}_1}^\perp(\lambda) = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{x_0}{a^2} \\ \frac{y_0}{b^2} \end{pmatrix}, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

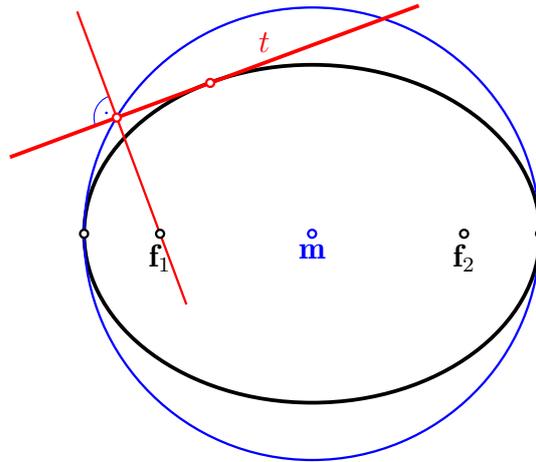


Abbildung 1.11: Der Schnittpunkt einer Tangente t mit einer Normalen, die durch den Brennpunkt f_1 geht, liegt auf dem Hauptscheitelkreis.

Werden die Koordinaten von $t_{f_1}^\perp$ in die Tangentengleichung eingesetzt, kann so der Schnittpunkt $t_{f_1}^\perp \cap t$ berechnet werden.

$$\frac{x_0}{a^2} \left(e + \lambda_0 \frac{x_0}{a^2} \right) + \frac{y_0}{b^2} \left(\lambda_0 \frac{y_0}{a^2} \right) = 1 \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$$

Rückeinsetzen von λ_0 in die Parameterdarstellung von $t_{f_1}^\perp$ liefert

$$t_{f_1}^\perp(\lambda_0) = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \begin{pmatrix} \frac{x_0}{a^2} \\ \frac{y_0}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $t_{f_1}^\perp(\lambda)$ liegt auf dem Hauptscheitelkreis, wenn seine Koordinaten die Gleichung

chung $x^2 + y^2 = a^2$ erfüllen.

$$\begin{aligned}
 a^2 &= e^2 + 2e \frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} x_0 + \left(\frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \right)^2 \frac{x_0^2}{a^4} + \left(\frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \right)^2 \frac{y_0^2}{b^4} \\
 &= e^2 + 2e \frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} x_0 + \left(\frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \right)^2 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} \right) \\
 &= e^2 + 2e \frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} x_0 + \frac{(1 - \frac{x_0 e}{a^2})^2}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\
 &= e^2 + \frac{2(1 - \frac{x_0 e}{a^2}) \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} + \frac{(1 - \frac{x_0 e}{a^2})^2}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\
 &= e^2 + \frac{2 \frac{x_0 e}{a^2} - 2 \left(\frac{x_0 e}{a^2} \right)^2}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} + \frac{(1 - \frac{x_0 e}{a^2})^2}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\
 &= e^2 + \frac{1 - \left(\frac{x_0 e}{a^2} \right)^2}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}
 \end{aligned}$$

Substituiert man $1 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$ und $e^2 = a^2 - b^2$ so zeigt sich, dass

$$\begin{aligned}
 a^2 &= e^2 + \frac{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^4} (a^2 - b^2)}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\
 &= e^2 + \frac{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^4} b^2}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\
 &= e^2 + \frac{\frac{y_0^2}{b^4} + \frac{x_0^2}{a^4}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} b^2 \\
 &= e^2 + b^2
 \end{aligned}$$

eine wahre Aussage ist und damit der Schnittpunkt $t \cap t^\perp$ auf dem Hauptscheitelkreis liegt. \square

Bei einer Spiegelung an der Nebenachse tauschen die Brennpunkte ihre Plätze. Aufgrund der Symmetrie der Ellipse bezüglich ihrer Nebenachse gilt der eben bewiesene Satz auch für den zweiten Brennpunkt \mathbf{f}_2 . Dieses Ergebnis wird im folgenden Korollar festgehalten, wobei Abb. 1.12 dasselbe grafisch darstellt.

Korollar 1.24. *t ist Tangente an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit Brennpunkten \mathbf{f}_1 und $\mathbf{f}_2 \Leftrightarrow t$ schneidet die zu t orthogonale, durch \mathbf{f}_2 verlaufende Gerade $t_{\mathbf{f}_2}^\perp$ in einem Punkt. Dieser liegt auf dem Hauptscheitelkreis der Ellipse.*

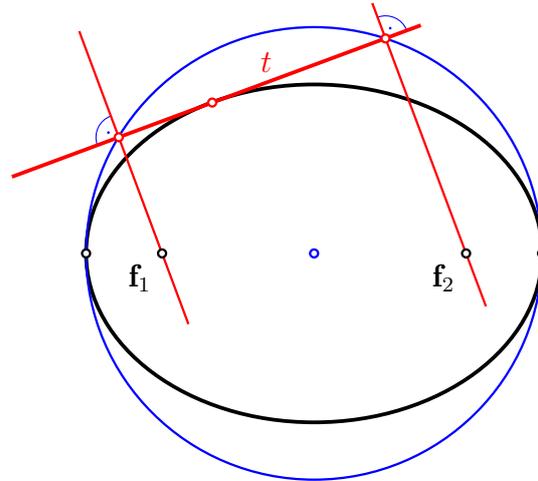


Abbildung 1.12: Die Schnittpunkte einer Tangente t mit Normalen, die durch die Brennpunkt \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 gehen, liegen auf dem Hauptscheitelkreis.

Dieser Satz liefert eine wohlbekannte Methode, um Tangenten an eine Ellipse zu konstruieren.

Korollar 1.25. Sei eine Ellipse durch ihre Brennpunkte \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 und die Bedingung

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) + d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) = 2a$$

für alle Punkte \mathbf{p} der Ellipse gegeben.

Eine Gerade durch einen Brennpunkt schneidet den Hauptscheitelkreis in zwei Punkten. Zeichnet man eine Normale auf diese Gerade durch einen dieser Schnittpunkte, so ist diese Tangente an die Ellipse.

1.5 Das Drehellipsoid

Wird die Ebene, in der eine Ellipse ϕ_0 definiert ist, in den Dreiraum eingebettet, so kann die Punktmenge, die die Ellipse beschreibt, um die Hauptachse der Ellipse rotiert werden. Die Menge, die dabei überstrichen wird, heißt Drehellipsoid Φ , siehe Abb. 1.13. Mehr dazu findet man in [25], wo dieser Fall als verlängertes Drehellipsoid bezeichnet wird. Für jeden Schnitt von Φ mit einer Ebene durch die Hauptachse der Ellipse ϕ_0 erfüllen die Punkte die Abstandsbedingung zu den Brennpunkten. Damit ist die folgende Definition durchaus gerechtfertigt.

Definition 1.26. Seien zwei Punkte \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 in \mathbb{R}^3 gegeben. Dann heißt

$$\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) + d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) = 2a, \text{ mit } 2a > d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)\}$$

Drehellipsoid mit Brennpunkten \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 .

Definition 1.27. Die Gerade durch \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 heißt Rotationsachse des Drehellipsoids.

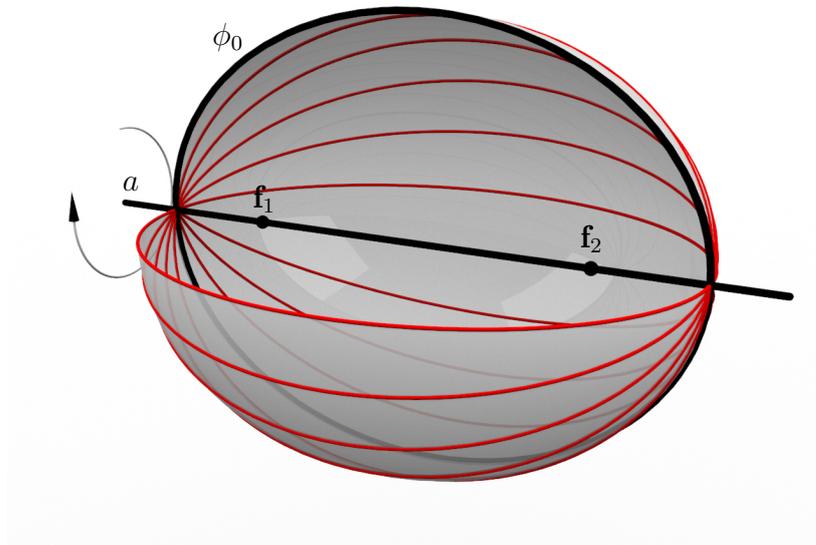


Abbildung 1.13: Das Drehellipsoid als Rotationsfläche, die von der Ellipse ϕ_0 mit Brennpunkten \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 überstrichen wird.

1.5.1 Tangentialebenen an das Drehellipsoid

Auf die gleiche Weise wie die Tangentialebenen an ein Drehparaboloid behandelt wurden, werden nun auch Tangentialebenen des Drehellipsoids definiert und betrachtet. Es sei ein weiteres Mal auf den differentialgeometrischen Zugang zu Tangentialräumen, wie in [4], [8], [7], [11] und [23], hingewiesen.

Definition 1.28. Sei ein Drehellipsoid Φ gegeben.

Die lineare Approximation von Φ in $\mathbf{p} \in \Phi$ heißt Tangentialebene an das Drehellipsoid Φ im Punkt \mathbf{p} .

Die Hauptscheitel der rotierenden Ellipse bleiben stationär. Die Tangenten in diesen Punkten rotieren dabei aber um die Achse von Φ . Da die Tangenten die Achse im rechten Winkel schneiden, überstreichen sie eine Ebene. Jede durch Rotation aus ϕ_0 entstandene Ellipse ϕ findet ihre Tangente in dieser Ebene wieder. Damit sind das bereits die Tangentialebenen an Φ in den Hauptscheiteln der Ausgangsellipse ϕ_0 .

Jeder andere von den Hauptscheiteln unterschiedliche Punkt \mathbf{p}_0 beschreibt bei Drehungen um die Rotationsachse eine Kreisbahn. Für jeden Punkt $\mathbf{p} \in \Phi$ existiert ein Punkt $\mathbf{p}_0 \in \phi_0$, der \mathbf{p} bei Rotation überstreicht. Die Bahnkreistangente in \mathbf{p} steht orthogonal auf die Ebene ε_ϕ aufgespannt von \mathbf{p} und der Rotationsachse a .

Andererseits ist die Tangente an jene Ellipse, die von ε_ϕ aus Φ herausgeschnitten wird, auch schon die lineare Approximation dieser Ellipse im betrachteten Punkt.

Diese beiden Tangenten spannen somit die Tangentialebene im Punkt \mathbf{p} an das Drehellipsoid auf, siehe Abb. 1.14.

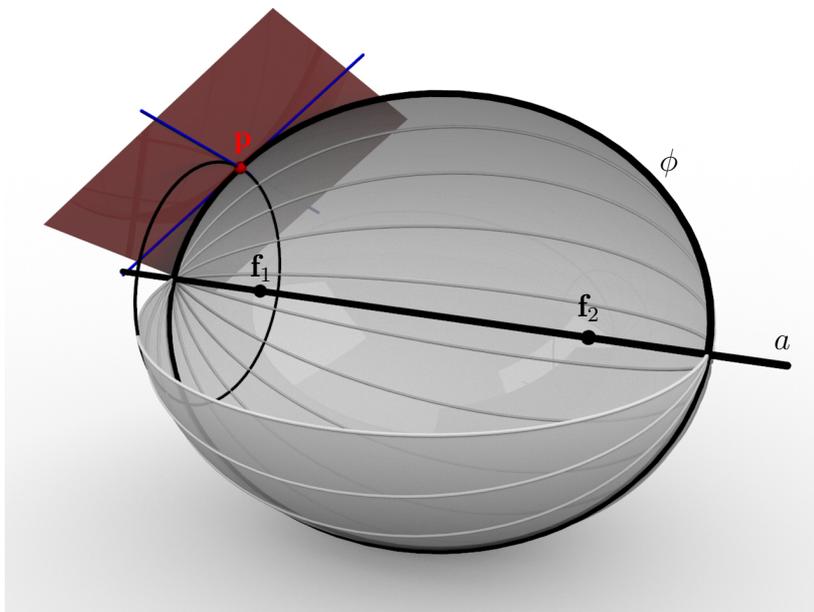


Abbildung 1.14: Das Drehellipsoid mit rot eingefärbter Tangentialebene im Punkt \mathbf{p} . Die Tangente an die Ellipse ϕ und die Tangente an die Bahnkurve des Punktes \mathbf{p} sind in blau eingezeichnet.

Da jede Tangentialebene also auch eine Tangente an eine Meridianellipse $\phi \in \Phi$ enthält, liefern die ebenen Tangentenkonstruktionen auch brauchbare Aussagen für die Konstruktion von Tangentialebenen.

Satz 1.29. Sei eine Kugel S mit Mittelpunkt \mathbf{m} und Radius a und ein Punkt \mathbf{f} im Inneren von S gegeben. Jede Gerade g durch \mathbf{f} schneidet die Kugel in zwei Punkten. Die Ebene τ , die orthogonal zu g ist und durch einen dieser beiden Schnittpunkte verläuft, ist eine Tangentialebene an das Drehellipsoid Φ mit den Brennpunkten $\mathbf{f}_1 := \mathbf{f}$ und $\mathbf{f}_2 := 2\mathbf{m} - \mathbf{f}$ und der Bedingung $d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) + d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) = 2a$.

Dieser Satz wird in Abb. 1.15 veranschaulicht.

Beweis. Fall $\mathbf{m} \notin g$:

Schneidet man die räumliche Konstellation mit einer Ebene ε_ϕ , welche von g und dem Mittelpunkt \mathbf{m} aufgespannt wird, so liegen nach Konstruktion auch die Punkte \mathbf{f} und $\mathbf{s} = g \cap S$ in dieser Ebene. Die Kugel S wird entlang eines Großkreises k geschnitten. Die Ebene τ hat mit ε_ϕ die Schnittgerade t gemeinsam. Nach Korollar 1.25 ist die Gerade t Tangente an eine Ellipse ϕ mit Brennpunkten $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}$ und $\mathbf{f}_2 = \mathbf{m} - (\mathbf{f} - \mathbf{m})$ und Hauptscheitelkreis k . Die Tangentialebene an Φ im Punkt \mathbf{p} wird nun von der Tangente t und einer zur Schnittebene orthogonalen Richtung aufgespannt. Die Ebene τ erfüllt diese Bedingungen und ist damit Tangentialebene an Φ .

Fall $\mathbf{m} \in g$:

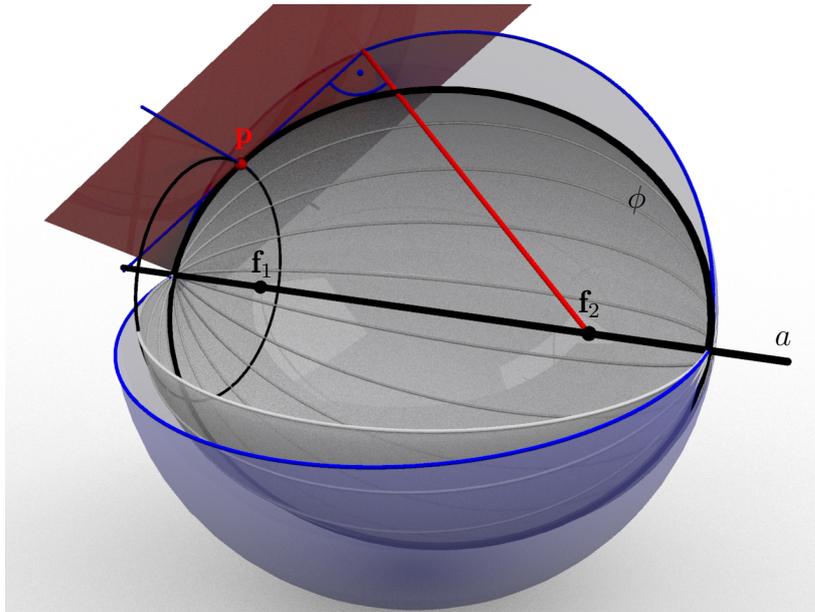


Abbildung 1.15: Konstruktion einer Tangentialebene. Die beliebig gewählte rote Gerade durch einen Brennpunkt schneidet die Kugel, die die Ellipse in beiden Hauptscheiteln berührt. Die Normalebene in diesem Schnittpunkt ist eine Tangentialebene an das Ellipsoid.

Mit dieser Vorgabe ist die Ebene ε_ϕ nicht mehr eindeutig definiert. Solange aber ε_ϕ durch die Rotationsachse von Φ geht, läuft der Beweis auf dieselbe Art wie im ersten Fall ab. Also wird hier eine beliebige Ebene aus dem Ebenenbüschel mit der Rotationsachse von Φ als Trägergerade gewählt. Der restliche Beweis ist analog zum Fall $\mathbf{m} \notin g$. \square

1.6 Die Hyperbel

Nachdem nun Drehparaboloide und Drehellipsoide behandelt wurden, sind noch Drehhyperboloide zu betrachten. Es wird erneut ein Zugang gewählt, bei dem zuerst die ebene Kurve, in diesem Fall die Hyperbel, behandelt wird. Erst später werden die Erkenntnisse in der Ebene für Beweise im dreidimensionalen Raum verwendet.

Die Hyperbel kann auf ähnliche Weise wie schon die Ellipse definiert werden. Diese baut auf den Brennpunkteigenschaften von Kegelschnitten auf.

Definition 1.30. Seien zwei verschiedene Punkte \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 in \mathbb{R}^2 gegeben. Dann heißt die Menge der Punkte $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) - d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2)| = 2a, \text{ mit } 2a < d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)\}$ Hyperbel mit Brennpunkten \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 .

Man sieht direkt in der Definition, dass sich Ellipsen von Hyperbeln in der Definition nur durch ein negatives Vorzeichen unterscheiden. Die konstante Summe wird hier zur konstanten Differenz.

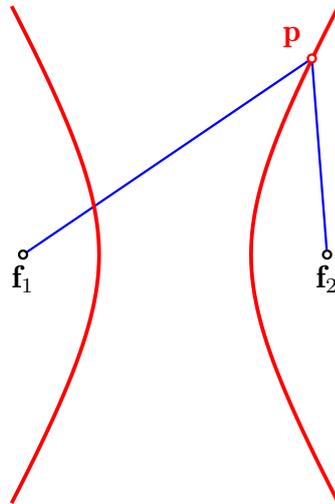


Abbildung 1.16: Die Hyperbel als Menge von Punkten \mathbf{p} , deren Differenz der Abstände zu den Brennpunkten \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 konstant ist.

Eine spezielle Wahl des Koordinatensystems schränkt diese Definition nicht ein. Somit wird die Lage so gewählt, dass beide Brennpunkte \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 auf der x -Achse liegen und der Ursprung \mathbf{o} der Mittelpunkt dieser Brennpunkte ist. Daher gilt für die Koordinaten der Brennpunkte $\mathbf{f}_1 = (e, 0)^T$ mit $e \in \mathbb{R}^+$ und $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1$. Die Gleichung, die die Koordinaten der Punkte $\mathbf{p} = (x, y)^T$ der Hyperbel erfüllen, lässt sich analog zur Ellipse berechnen. Für die Distanzen $d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1)$ und $d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2)$ gilt:

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) = d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2},$$

sowie

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) = d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}.$$

Diese Distanzen sollen eingesetzt in die Definition eine wahre Aussage ergeben. Damit soll

$$|d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) - d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2)| = 2a$$

gelten, was äquivalent zu

$$|\sqrt{(x-e)^2 + y^2} - \sqrt{(x+e)^2 + y^2}| = 2a$$

ist. In diesem Fall sind nicht nur die Wurzeln, sondern auch der Betrag der Differenz ein gewisser Störfaktor. Daher werden beide Möglichkeiten den Betrag aufzulösen einzeln betrachtet. Ist die Differenz positiv, so können die Betragsstriche weggelassen

werden. Bevor beide Seiten quadriert werden, wird eine Wurzel auf die andere Seite der Gleichung gebracht.

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \Rightarrow \\ (x-e)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + (x+e)^2 + y^2\end{aligned}$$

Durch Subtraktion von x^2 , e^2 und y^2 von beiden Seiten lässt sich diese Gleichung in eine einfachere Form bringen.

$$-2xe = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + 2xe$$

Nun quadriert man erneut, nachdem die Wurzel auf eine Seite und die restlichen Terme auf die andere Seite gebracht wurden.

$$-a^2 - xe = a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \Rightarrow a^4 + 2a^2xe + x^2e^2 = a^2(x^2 + 2xe + e^2 + y^2)$$

Nach weiterem Umformen erhält man nun

$$x^2(e^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$$

Wird $b^2 := e^2 - a^2$ definiert, so folgt

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

und nach einer letzten Division durch a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ist die Differenz der Distanzen negativ, dann lässt sich der Betrag mit einem Wechsel der Vorzeichen auflösen. Das liefert in diesem Fall

$$|\sqrt{(x-e)^2 + y^2} - \sqrt{(x+e)^2 + y^2}| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}.$$

Analog zur eben durchgeführten Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+e)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \Rightarrow \\ (x+e)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2\end{aligned}$$

Es folgt auch hier die Subtraktion von x^2 , e^2 und y^2 .

$$2xe = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} - 2xe$$

Nun quadriert man erneut, nachdem die Wurzel auf eine Seite und die restlichen Terme auf die andere Seite gebracht wurden.

$$-a^2 + xe = a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} \Rightarrow a^4 - 2a^2xe + x^2e^2 = a^2(x^2 - 2xe + e^2 + y^2)$$

Nach weiterem Umformen lässt sich

$$x^2(e^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$$

errechnen. Die Bedingung $b^2 = e^2 - a^2$ ermöglicht die folgende Vereinfachung

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Nach der Division durch a^2b^2 folgt wie im ersten Fall

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Koordinaten aller Punkte, deren Differenz der Distanzen zu den Brennpunkten $\pm 2a$ ist, erfüllen auch die eben berechnete Gleichung. Da wie bei der Herleitung der Gleichung einer Ellipse quadriert wurde, muss auch hier überprüft werden, ob diese Gleichung nicht mehr als die Punkte einer Hyperbel liefert.

Genügt ein Punkt der Hyperbelgleichung, so sind seine Koordinaten

$$\mathbf{p} = \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, x \right), \text{ mit } |x| \geq a$$

Betrachtet man die beiden Abstände von \mathbf{p} zu den Brennpunkten $\mathbf{f}_{1,2}$ so ergibt sich aus

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) = \left\| \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, x \right) - \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x - e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}$$

und

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) = \left\| \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, x \right) - \begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x + e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}$$

die Differenz der Distanzen

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) - d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) = \sqrt{(x - e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)} - \sqrt{(x + e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}.$$

Wird $b^2 = e^2 - a^2$ rücks substituiert, so folgt für diese Differenz der Distanzen

$$\begin{aligned}
 d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) - d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2) &= \sqrt{(x - e)^2 + \frac{e^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2)} - \sqrt{(x + e)^2 + \frac{e^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2)} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2(x - e)^2 + (e^2 - a^2)(x^2 - a^2)}{a^2}} \\
 &\quad - \sqrt{\frac{a^2(x + e)^2 + (e^2 - a^2)(x^2 - a^2)}{a^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2x^2 - 2a^2xe + a^2e^2 + x^2e^2 - a^2e^2 - x^2a^2 + a^4}{a^2}} \\
 &\quad - \sqrt{\frac{a^2x^2 + 2a^2xe + a^2e^2 + x^2e^2 - a^2e^2 - x^2e^2 + a^4}{a^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(xe - a^2)^2}{a^2}} - \sqrt{\frac{(xe + a^2)^2}{a^2}} \\
 &= \frac{|xe - a^2|}{a} - \frac{|xe + a^2|}{a} \\
 &= \frac{|xe - a^2| - |xe + a^2|}{a}.
 \end{aligned}$$

Es gilt $|x| \geq a$. Damit ist für $x > 0$

$$\frac{|xe - a^2| - |xe + a^2|}{a} = \frac{xe - a^2 - xe - a^2}{a} = -2a$$

und bei $x < 0$

$$\frac{|xe - a^2| - |xe + a^2|}{a} = \frac{-xe + a^2 + xe + a^2}{a} = 2a.$$

Mit diesem Ergebnis ist die Gleichwertigkeit der Definition über die Abstände zu den Brennpunkten zu dieser quadratischen Gleichung gezeigt. Also ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

die Gleichung der Hyperbel.

In dieser Darstellung sind die Symmetrieachsen zu erkennen. Sowohl der Punkt $(-x_0, y_0)^T$, als auch $(x_0, -y_0)^T$ erfüllen diese Gleichung, sofern der Punkt $(x_0, y_0)^T$ auf der Hyperbel liegt. Damit ist die x -Achse, auf der sich beide Brennpunkte befinden, und auch die y -Achse Symmetrieachse der Hyperbel.

Definition 1.31. Die Symmetrieachsen einer Hyperbel heißen *Hauptachse* und *Nebenachse*. Die Hauptachse ist diejenige, auf der beide Brennpunkte \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 der Hyperbel liegen. Die Schnittpunkte der Hyperbel mit ihrer Hauptachse heißen *Scheitel*.

Definition 1.32. Der Halbierungspunkt $\mathbf{m} := \frac{\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2}{2}$ beider Brennpunkte heißt Mittelpunkt der Hyperbel.

Definition 1.33. Sei \mathbf{m} der Mittelpunkt der Hyperbel. Der Kreis mit Mittelpunkt in \mathbf{m} , der durch beide Scheitel geht, heißt Scheitelkreis.

Diese Definitionen sind in Abb. 1.17 wiederzufinden.

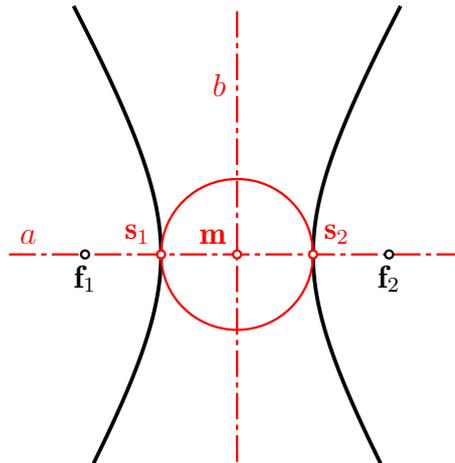


Abbildung 1.17: Hyperbel mit Mittelpunkt \mathbf{m} , Hauptachse a und Nebenachse b . Die Hauptachse schneidet die Hyperbel in den Scheiteln s_1 und s_2 . Der Scheitelkreis inzidiert mit beiden Scheiteln.

1.6.1 Tangenten an die Hyperbel

Ganz analog zu Tangenten an Ellipsen wird auch hier die Tangente an eine Hyperbel definiert, sowie eine wichtige Tangentenkonstruktion betrachtet.

Nach dem Satz über implizite Funktionen [8] folgt für die Hyperbelgleichung

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Die Tangente an die Hyperbel wird daher so berechnet: Aus $f(x) := y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ und implizitem Ableiten von F folgt

$$0 = \frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx}.$$

Damit ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xb^2}{ya^2}$$

An dieser Stelle wird wieder die wohlbekanntere Definition einer Tangente, siehe [14], angewandt:

$$y = f(x_0) + \dot{f}(x_0)(x - x_0)$$

Durch Einsetzen erhält man für den Punkt $(x_0, y_0)^T$ auf der Hyperbel

$$y = y_0 + \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x - x_0),$$

wobei $y_0 = 0$ ausgeschlossen werden muss. Durch Multiplikation mit y_0 und Division durch b^2 auf beiden Seiten ergibt sich

$$\frac{yy_0}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{xx_0 - x_0^2}{a^2}.$$

Da der Punkt $(x_0, y_0)^T$ die Hyperbelgleichung und damit $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ erfüllt, ergibt sich durch Einsetzen des Punktes in die Gleichung

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

für die Tangente an eine Hyperbel im Punkt $(x_0, y_0)^T$. Die Punkte der Hyperbel, die auf der x -Achse liegen, also die Scheitel, wurden in der Rechnung ausgenommen. Jedoch liefert die erhaltene Gleichung trotzdem Geraden für diese Punkte. Diese Geraden sind parallel zur y -Achse und schneiden die Hyperbel in den entsprechenden Scheiteln. Da die Scheitel mit $(\pm a, 0)^T$ die betragsmäßig kleinstmöglichen x -Koordinaten aller Punkte der Hyperbel besitzen, schneiden diese Geraden die Hyperbel nur einmal. Also liefert die oben berechnete Gleichung in allen Punkten der Hyperbel die Tangente. Dieses Ergebnis rechtfertigt die hier nachfolgende Definition.

Definition 1.34. *Ist*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung einer Hyperbel und $(x_0, y_0)^T$ ein Punkt, der diese Gleichung erfüllt. Dann ist

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Tangente an die Hyperbel im Punkt $(x_0, y_0)^T$.

In [21] wird noch eine spezielle Konstruktion der Tangente benötigt. Diese lässt sich aus dem folgenden Satz herleiten.

Satz 1.35. *t ist Tangente an die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit Brennpunkten \mathbf{f}_1 und $\mathbf{f}_2 \Leftrightarrow t$ schneidet die zu t orthogonale, durch \mathbf{f}_1 verlaufende Gerade $t_{\mathbf{f}_1}^\perp$ in einem Punkt. Dieser liegt auf dem Scheitelkreis der Hyperbel.*

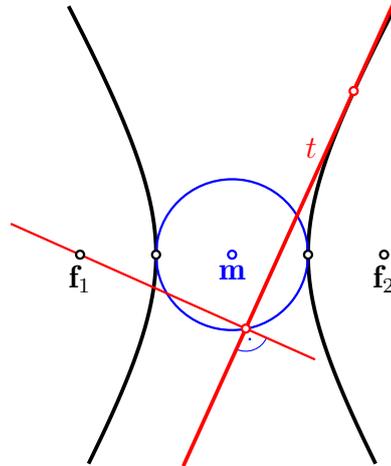


Abbildung 1.18: Der Schnittpunkt einer Tangente t mit einer Normalen, die durch den Brennpunkt \mathring{f}_1 geht, liegt auf dem Scheitelkreis.

Beweis. Aus der Tangentengleichung im Punkt $(x_0, y_0)^T$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

kann der Normalvektor $(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2})^T$ herausgelesen werden. Damit ist die Parameterdarstellung von $t_{\mathring{f}_1}^\perp$

$$t_{\mathring{f}_1}^\perp(\lambda) = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{x_0}{a^2} \\ -\frac{y_0}{b^2} \end{pmatrix}, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Werden die Koordinaten von $t_{\mathring{f}_1}^\perp$ in die Tangentengleichung eingesetzt, kann so der Schnittpunkt $t_{\mathring{f}_1}^\perp \cap t$ berechnet werden.

$$\frac{x_0}{a^2} \left(e + \lambda_0 \frac{x_0}{a^2} \right) - \frac{y_0}{b^2} \left(-\lambda_0 \frac{y_0}{a^2} \right) = 1 \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$$

Rückeinsetzen von λ_0 in die Parameterdarstellung von $t_{\mathring{f}_1}^\perp$ liefert

$$t_{\mathring{f}_1}^\perp(\lambda_0) = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \begin{pmatrix} \frac{x_0}{a^2} \\ -\frac{y_0}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $t_{\mathring{f}_1}^\perp(\lambda_0)$ liegt auf dem Scheitelkreis, wenn seine Koordinaten die Gleichung

$x^2 + y^2 = a^2$ erfüllen.

$$\begin{aligned}
 a^2 &= e^2 + 2e \frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \frac{x_0}{a^2} + \left(\frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \right)^2 \frac{x_0^2}{a^4} + \left(\frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \right)^2 \frac{y_0^2}{b^4} \\
 &= e^2 + 2e \frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \frac{x_0}{a^2} + \left(\frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \right)^2 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} \right) \\
 &= e^2 + 2e \frac{1 - \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \frac{x_0}{a^2} + \frac{(1 - \frac{x_0 e}{a^2})^2}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\
 &= e^2 + \frac{2(1 - \frac{x_0 e}{a^2}) \frac{x_0 e}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} + \frac{(1 - \frac{x_0 e}{a^2})^2}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\
 &= e^2 + \frac{2 \frac{x_0 e}{a^2} - 2 \left(\frac{x_0 e}{a^2} \right)^2}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} + \frac{(1 - \frac{x_0 e}{a^2})^2}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\
 &= e^2 + \frac{1 - \left(\frac{x_0 e}{a^2} \right)^2}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}
 \end{aligned}$$

Substituiert man $1 = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$ und $e^2 = a^2 + b^2$ so zeigt sich, dass

$$\begin{aligned}
 a^2 &= e^2 + \frac{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^4}(a^2 + b^2)}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\
 &= e^2 + \frac{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^4} b^2 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^4} b^2}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\
 &= e^2 - \frac{\frac{y_0^2}{b^4} + \frac{x_0^2}{a^4} b^2}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\
 &= e^2 - b^2
 \end{aligned}$$

eine wahre Aussage ist, und damit der Schnittpunkt $t \cap t^\perp$ auf dem Scheitelkreis liegt. \square

Aufgrund der Spiegelsymmetrie der Hyperbel bezüglich ihrer Nebenachse gilt der eben bewiesene Satz auch für den zweiten Brennpunkt \mathbf{f}_2

Korollar 1.36. *t ist Tangente an die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit Brennpunkten \mathbf{f}_1 und $\mathbf{f}_2 \Leftrightarrow t$ schneidet die zu t orthogonale, durch \mathbf{f}_2 verlaufende Gerade $t_{\mathbf{f}_2}^\perp$ in einem Punkt. Dieser liegt auf dem Scheitelkreis der Hyperbel.*

Dieser Satz, veranschaulicht in Abb. 1.19, liefert eine wohlbekannte Methode um Tangenten an eine Hyperbel zu konstruieren:

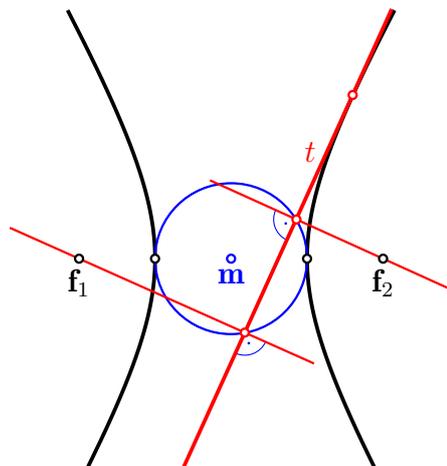


Abbildung 1.19: Schnittpunkte von Tangenten t mit Normalen, die durch die Brennpunkte f_1 , oder f_2 gehen, liegen auf dem Scheitelkreis.

Korollar 1.37. Sei eine Hyperbel durch ihre Brennpunkte f_1 und f_2 und die Bedingung

$$|d(\mathbf{p}, f_1) - d(\mathbf{p}, f_2)| = 2a$$

für alle Punkte \mathbf{p} der Hyperbel gegeben. Eine Gerade durch einen Brennpunkt schneide den Hauptscheitelkreis in mindestens einem Punkt. Zeichnet man eine Normale auf diese Gerade durch einen dieser Schnittpunkte, so ist diese Tangente an die Hyperbel.

1.7 Das zweischalige Drehhyperboloid

Ein zweischaliges Drehhyperboloid X wird auf dieselbe Art wie schon das Drehparaboloid und das Drehellipsoid erzeugt. Die Ebene, die eine Hyperbel χ_0 enthält, wird in den \mathbb{R}^3 eingebettet und um die Hauptachse a von χ_0 gedreht, siehe Abb. 1.20. Dabei wird die Drehfläche X von χ_0 überstrichen. Wird X auf diese Weise erzeugt, so spricht man dabei von einem zweischaligen Drehhyperboloid [25]. Jeder ebene Schnitt durch die Hauptachse von χ_0 ist eine Hyperbel, und die Punkte auf diesen Hyperbeln erfüllen stets, dass die Differenz der Abstände zu den Brennpunkten konstant ist.

Definition 1.38. Seien zwei Punkte f_1 und f_2 in \mathbb{R}^3 gegeben. Dann heißt

$$\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : |d(\mathbf{p}, f_1) - d(\mathbf{p}, f_2)| = 2a, \text{ mit } 2a < d(f_1, f_2)\}$$

zweischaliges Drehhyperboloid mit Brennpunkten f_1 und f_2 .

Definition 1.39. Die Gerade durch die Brennpunkte f_1 und f_2 des zweischaligen Drehhyperboloids heißt Achse des zweischaligen Drehhyperboloids.

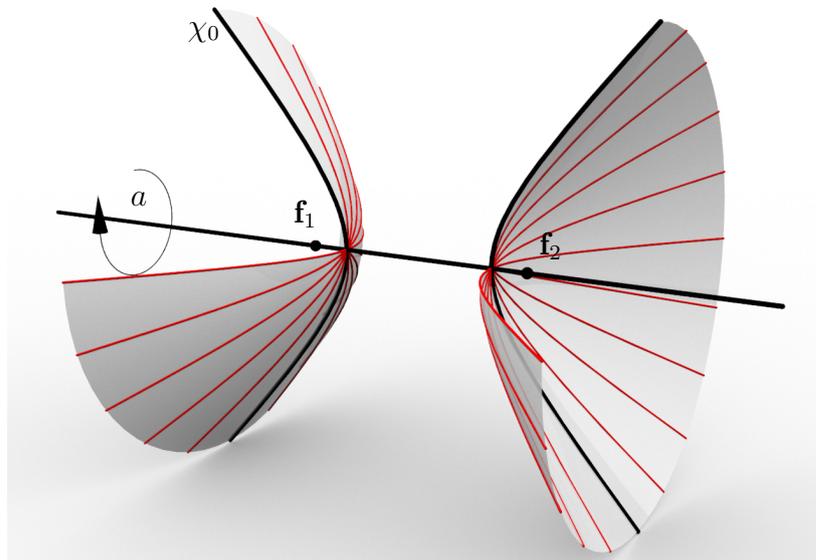


Abbildung 1.20: Das zweischalige Drehhyperboloid als Rotationsfläche, die von der Hyperbel χ_0 mit Brennpunkten \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 überstrichen wird.

1.7.1 Tangentialebenen an das zweischalige Drehhyperboloid

Analog zu den vorigen Drehquadriken wird auch hier die Tangentialebene als lineare Approximation definiert.

Definition 1.40. Sei ein zweischaliges Drehhyperboloid X gegeben.

Die lineare Approximation von X in $\mathbf{p} \in X$ heißt Tangentialebene an das Drehhyperboloid X im Punkt \mathbf{p} .

Die um die Achse a rotierenden Tangenten in den Scheiteln definieren die Tangentialebenen an X in diesen Punkten.

Andernfalls ist ein Punkt $\mathbf{p} \in X$ gegeben. Die Achse a von X und der Punkt \mathbf{p} spannen eine Ebene ε_χ auf. Diese Ebene schneidet X entlang einer Hyperbel χ . Die Tangentialebene in einem Punkt \mathbf{p} wird von der Tangente an die Hyperbel χ und der Flächennormalen von ε_χ im Punkt \mathbf{p} aufgespannt, wie in Abb. 1.21 veranschaulicht.

Diese Feststellungen ermöglichen den Beweis zu

Satz 1.41. Sei eine Kugel S mit Mittelpunkt \mathbf{m} und Radius a und ein Punkt \mathbf{f} außerhalb von S gegeben. Schneide eine Gerade g durch \mathbf{f} die Kugel in mindestens einem Punkt. Dann gilt: Die Ebene τ , die orthogonal zu g ist und durch einen dieser Schnittpunkte verläuft, ist eine Tangentialebene an das Drehhyperboloid X mit den Brennpunkten $\mathbf{f}_1 := \mathbf{f}$ und $\mathbf{f}_2 := 2\mathbf{m} - \mathbf{f}$ und der Bedingung $|d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_1) - d(\mathbf{p}, \mathbf{f}_2)| = 2a$.

In Abb. 1.22 wird dieser Satz grafisch veranschaulicht.

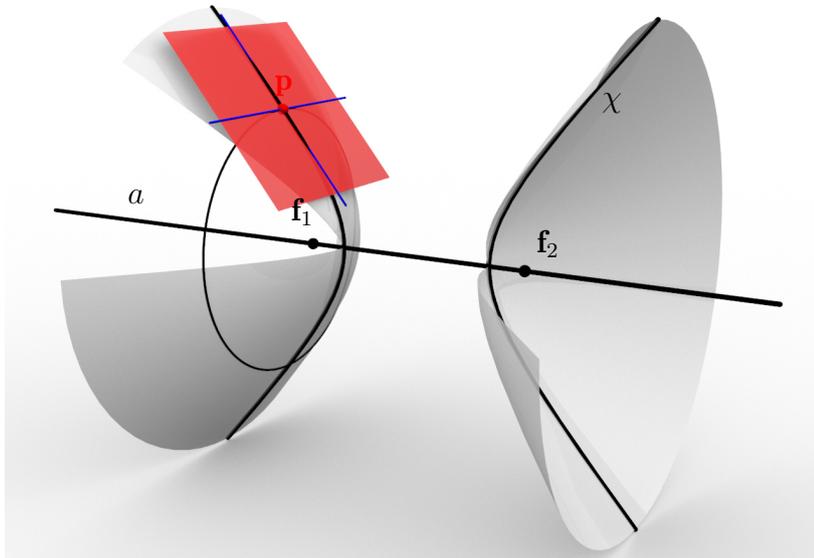


Abbildung 1.21: Die Tangentialebene im Punkt \mathbf{p} an das Drehhyperboloid X . Die Hyperbel χ entsteht als Schnittkurve von ε_χ und X . Die Tangente an χ , sowie die Tangente an die Bahnkurve des Punktes \mathbf{p} wurden in blau dargestellt.

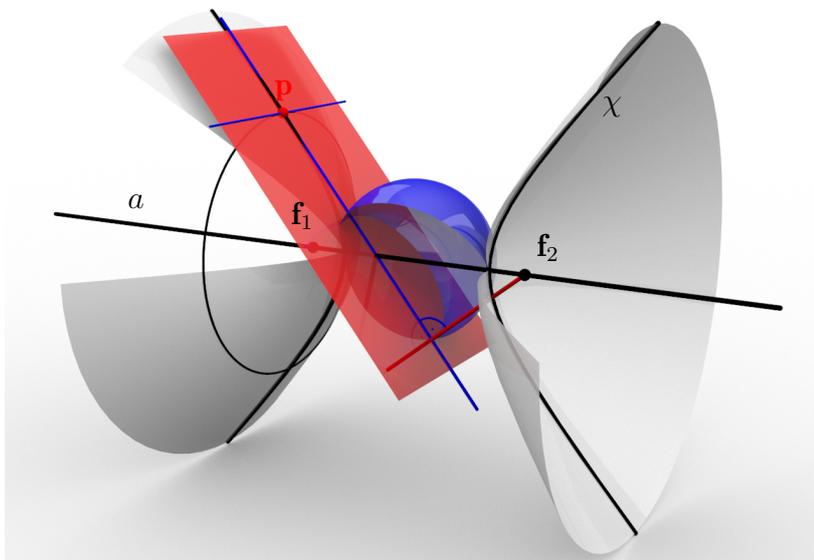


Abbildung 1.22: Die rote Gerade durch \mathbf{f}_2 schneidet die Kugel durch beide Scheitel. Die Normalebene durch einen dieser Schnittpunkte ist eine Tangentialebene an das Hyperboloid X .

Beweis. Fall $\mathbf{m} \notin g$:

Die Ebene ε_χ sei von \mathbf{m} und g aufgespannt. Diese Ebene schneidet aus der Kugel einen Großkreis k aus. Die zu g orthogonale Ebene τ durch einen der Schnittpunkte $g \cap S$ wird ebenfalls von ε_χ geschnitten. $\varepsilon_\chi \cap \tau$ heiße t und entspricht bei näherer Betrachtung der Tangente an eine Hyperbel χ mit Brennpunkten $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}$, $\mathbf{f}_2 = 2\mathbf{m} - \mathbf{f}$ und Scheitelkreis k , wie in Satz 1.23. Da τ orthogonal zu ε_χ ist, ist τ sogar eine Tangentialebene an X .

Fall $\mathbf{m} \in g$: Die Gerade schneidet S dann in zwei Punkten. Ein beliebiger ebener Schnitt, der g enthält, offenbart, dass die ebene Situation der Kontruktion von Tangenten in den Scheiteln der Hyperbel χ entspricht. Analog zum Fall $\mathbf{m} \notin g$. \square

1.8 Raumkurven

Wenn man noch einmal das Fallexperiment von Fuchs et al. in [9] mathematisch aufarbeiten will, wird man schnell zum Schluss kommen, dass allein die Bedingung an die Kurve stetig zu sein, nicht zielführend ist, da solche Kurven oft pathologische Eigenschaften besitzen können. Um dieses Verhalten zu vermeiden gibt man gewisse Bedingungen vor, die den Umgang erleichtern und das Verhalten der Kurve berechenbarer machen. Also definiert man in diesem Kapitel, wie in [7], [11], [23] und [24] - salopp formuliert - *brave* Kurven.

Da man im Hauptteil dieser Arbeit die dreidimensionale Lage von Kurven und Flächen betrachten wird, ist es nicht notwendig, eine allgemeine Definition von Kurven im n -dimensionalen Raum vorzunehmen. Es werden hier dezidiert diejenigen Kurven in \mathbb{R}^3 hervorgehoben, die ein Begleitdreibein besitzen. Denn diese Kurven haben die notwendigen Voraussetzungen, um die Aufgabenstellung dieser Diplomarbeit auf vernünftige Weise zu bearbeiten. Der Aufbau ist stark an [7], [11] und [23] orientiert, dennoch sei darauf hingewiesen, dass sämtliche Überlegungen, wie z.B. in [4] und [23], auch im n -dimensionalen Raum möglich sind.

Definition 1.42. Sei I ein Intervall in \mathbb{R} , dann heißt

$$\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (c_1(t), c_2(t), c_3(t))^T$$

Raumkurve, wenn \mathbf{c} differenzierbar ist.

In dieser Arbeit werden sowohl die Abbildung als auch ihr Graph als Kurve bezeichnet. Es sei aber darauf verwiesen, dass es auch Literatur gibt, die hier eine klare Unterscheidung macht[4].

Definition 1.43. Eine Kurve heißt regulär an der Stelle t_0 , wenn

$$\dot{\mathbf{c}}(t_0) = \left. \frac{d\mathbf{c}}{dt} \right|_{t=t_0} \neq \mathbf{o}$$

gilt. Ist eine Kurve überall regulär nennt man sie reguläre Kurve. Der Vektor $\dot{\mathbf{c}}(t_0)$ heißt Tangentialvektor an \mathbf{c} bei t_0 .

Definition 1.44. $\mathbf{c}(t)$ heißt Wendepunkt, falls $\ddot{\mathbf{c}}(t) = \lambda \dot{\mathbf{c}}(t)$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

1.8.1 Tangenten und Schmiegeebenen an eine Kurve

Definition 1.45. Den affinen Unterraum $\mathbf{c}(t) + \text{span}(\dot{\mathbf{c}}(t))$ nennt man Tangente, den affinen Unterraum $\mathbf{c}(t) + \text{span}(\dot{\mathbf{c}}(t), \ddot{\mathbf{c}}(t))$ Schmiegeebene der Kurve \mathbf{c} an der Stelle t . Ist $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{o}$, so bleibt die Tangente undefiniert. Sind die beteiligten Ableitungen linear abhängig, so ist die Schmiegeebene undefiniert.

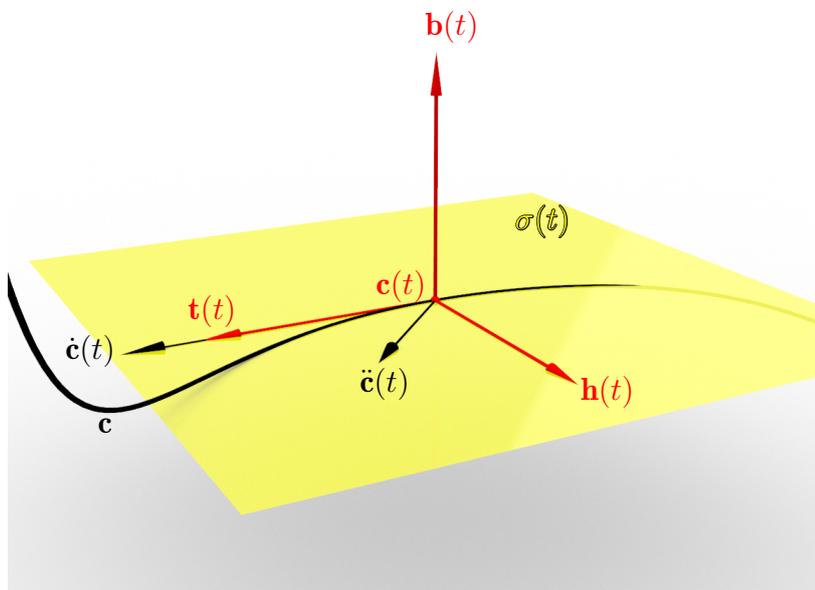


Abbildung 1.23: Die Tangente im Punkt $\mathbf{c}(t)$ besitzt $\dot{\mathbf{c}}(t)$ als Richtung. Die Schmiegeebene $\sigma(t)$ wird von $\dot{\mathbf{c}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{c}}(t)$ aufgespannt. Tangentenvektor $\mathbf{t}(t)$, Hauptnormalenvektor $\mathbf{h}(t)$ und Binormalenvektor $\mathbf{b}(t)$ bilden das begleitende Dreibein der Kurve.

Definition 1.46. Ein Diffeomorphismus ist eine bijektive, in beide Richtungen stetig differenzierbare Abbildung.

Definition 1.47. Sei $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $\gamma : \tilde{I} \rightarrow I$ ein Diffeomorphismus. Dann heißt γ Parameterwechsel oder Parametertransformation. Man sagt, dass $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \gamma$ aus \mathbf{c} durch Parameterwechsel hervorgeht.

In dieser Arbeit wird vorausgesetzt, dass sobald die Kurve \mathbf{c} n -mal stetig differenzierbar ist, auch γ diese Eigenschaft besitzt.

Satz 1.48. *Die Tangente und die Schmiegeebene einer Kurve sind invariant bezüglich Parametertransformationen.*

Beweis. Die Tangente in von $\mathbf{c} \circ \gamma$ an der Stelle s ist

$$\mathbf{c} \circ \gamma(s) + \text{span} \left(\frac{d}{ds}(\mathbf{c} \circ \gamma(s)) \right) = \mathbf{c} \circ \gamma(s) + \text{span}((\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s))\dot{\gamma}(s)).$$

Die Multiplikation von $\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s)$ mit $\dot{\gamma}(s)$ ändert den von $\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s)$ aufgespannten Unterraum $\text{span}(\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s))$ nicht, da $\dot{\gamma}(s)$ ein Faktor ungleich Null ist. Damit ist

$$\mathbf{c} \circ \gamma(s) + \text{span}((\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s))\dot{\gamma}(s)) = \mathbf{c} \circ \gamma(s) + \text{span}(\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s))$$

die Tangente von \mathbf{c} an der Stelle $\gamma(s)$.

Die Schmiegeebene von $\mathbf{c} \circ \gamma$ an der Stelle s ist

$$\mathbf{c} \circ \gamma(s) + \text{span} \left(\frac{d}{ds}(\mathbf{c} \circ \gamma(s)), \frac{d^2}{ds^2}(\mathbf{c} \circ \gamma(s)) \right).$$

Aus $\frac{d}{ds}(\mathbf{c} \circ \gamma(s)) = (\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s))\dot{\gamma}(s)$ folgt für die zweite Ableitung

$$\frac{d^2}{ds^2}(\mathbf{c} \circ \gamma(s)) = \frac{d}{ds}(\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s))\dot{\gamma}(s) = (\ddot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s))\dot{\gamma}^2(s) + (\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s))\ddot{\gamma}(s).$$

Diese ist eine Linearkombination von $\dot{\mathbf{c}}$ und $\ddot{\mathbf{c}}$ und liegt damit in der Schmiegeebene von \mathbf{c} an der Stelle $\gamma(s)$.

Die Umkehrung folgt aus $\mathbf{c} = (\mathbf{c} \circ \gamma) \circ \gamma^{-1}$. □

Definition 1.49. *Sei eine Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben. Dann ist*

$$L_a^b(\mathbf{c}) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

die Bogenlänge der Kurve \mathbf{c} .

Satz 1.50. *Die Bogenlänge einer Kurve ist invariant bezüglich Parametertransformationen und nach Anwendung euklidischer Kongruenztransformationen.*

Beweis. Um die Aussage für Parametertransformationen zu zeigen, seien die Kurve $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \gamma$ mit $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ und ein Diffeomorphismus γ mit $\gamma : [a, b] \rightarrow [\gamma(a), \gamma(b)]$ gegeben. Da es sich bei γ um einen Diffeomorphismus handelt, wechselt $\dot{\gamma}$ das Vorzeichen nicht, da sonst γ^{-1} an der Nullstelle nach der Umkehrregel nicht stetig differenzierbar wäre. Also muss $|\dot{\gamma}| \neq 0$ überall erfüllen. Deshalb und wegen der Kettenregel gilt

$$L_a^b(\tilde{\mathbf{c}}) = \int_a^b \|\dot{\tilde{\mathbf{c}}}(s)\| ds = \int_a^b \|\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s)\| |\dot{\gamma}(s)| ds = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt = L_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}(\mathbf{c}).$$

Für eine euklidische Kongruenztransformation α , die \mathbf{c} so abbildet, dass $\alpha \circ \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{a}$, wobei $\mathbf{A} \in O(3)$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ konstant sind, gilt

$$\left\| \frac{d}{dt}(\alpha \circ \mathbf{c}(t)) \right\| = \left\| \frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}) \right\| = \|\mathbf{A}\dot{\mathbf{c}}(t)\| = \sqrt{\langle \mathbf{A}\dot{\mathbf{c}}(t), \mathbf{A}\dot{\mathbf{c}}(t) \rangle} = \|\dot{\mathbf{c}}\|.$$

Mit diesem Ergebnis folgt

$$L_a^b(\alpha \circ \mathbf{c}) = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt}(\alpha \circ \mathbf{c}(t)) \right\| dt = \int_a^b \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt = L_a^b(\mathbf{c}).$$

für die Bogenlängen der Kurven \mathbf{c} und $\alpha \circ \mathbf{c}$. □

Satz 1.51. *Jede reguläre Kurve lässt sich nach der Bogenlänge parametrisieren.*

Beweis. Gegeben sei seine Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$. Dann liefert die Abbildung

$$\gamma^{-1} : [a, b] \mapsto [0, L_a^b], \quad t \mapsto \int_a^t \|\dot{\mathbf{c}}(\tau)\| d\tau$$

für jeden Wert von t die Bogenlänge des Kurvenstücks von $\mathbf{c}(a)$ bis $\mathbf{c}(t)$. Für die Ableitung von γ^{-1} gilt

$$\frac{d}{dt}\gamma^{-1}(t) = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|.$$

Somit folgt nach der Umkehrregel auch

$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = \frac{1}{\gamma^{-1} \circ \gamma(s)} = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s)\|},$$

was bedeutet, dass γ ein Diffeomorphismus und somit als Parametertransformation geeignet ist. Für die Kurve $\mathbf{c} \circ \gamma$ bedeutet das nun Folgendes: Durchläuft der Parameter s den Definitionsbereich von $\mathbf{c} \circ \gamma$ mit konstanter Geschwindigkeit, dann ändert sich wegen

$$\left\| \frac{d}{ds}(\mathbf{c} \circ \gamma(s)) \right\| = \frac{\|\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s)\|}{\|\dot{\mathbf{c}} \circ \gamma(s)\|} = 1$$

auch die Bogenlänge des durchlaufenen Kurvenstücks auf konstante Weise. Die Kurve wird mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen. □

Von nun an werden folgende Notationen verwendet:

$\mathbf{c}(t)$ ist eine beliebig parametrisierte, reguläre Kurve.

$\mathbf{c}(s)$ ist eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve.

$\dot{\mathbf{c}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{c}(t)$ heißt Tangentenvektor der Kurve c .

$\mathbf{c}'(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{c}(s)$ heißt Tangenteneinheitsvektor der Kurve c .

Es ist aber durchaus möglich, die Notation $\mathbf{c}(t)$ auch für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven zu verwenden, da diese nach Konstruktion ebenso regulär sind.

Von nun an werden nur noch reguläre Kurven betrachtet, die auch nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Die Parametertransformation bedeutet wegen 1.51 keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Definition 1.52. Sei $\mathbf{c}(s) \in \mathbb{R}^3$ eine reguläre, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, die dreimal stetig differenzierbar ist. Dann heißt \mathbf{c} Frenetkurve, wenn $\mathbf{c}'(s)$ und $\mathbf{c}''(s)$ in jedem Kurvenpunkt linear unabhängig sind.

1.8.2 Das begleitende Dreibein

Definition 1.53. Falls die ersten beiden Ableitungen einer Kurve $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, definiert man die Begleitbasis bzw. das begleitende Dreibein $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{h}(t), \mathbf{b}(t)\}$ der Kurve \mathbf{c} folgendermaßen:

- $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{h}(t), \mathbf{b}(t)\}$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis.
- $\mathbf{t}(t) \in \text{span}(\mathbf{c}'(t))$.
- $\mathbf{n}(t) \in \text{span}(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))$.
- $\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{c}'(t) \rangle > 0$ und $\langle \mathbf{h}(t), \mathbf{c}''(t) \rangle > 0$.

Die Einheitsvektoren $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{h}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ werden als

$\mathbf{t}(t)$... Tangentenvektor

$\mathbf{h}(t)$... Hauptnormalenvektor

$\mathbf{b}(t)$... Binormalenvektor

bezeichnet.

Handelt es sich bei \mathbf{c} um eine Frenetkurve, so nennt man die Begleitbasis auch Frenet-Dreibein.

Die Lage des Dreibeins bezüglich eines beliebigen Kurvenpunkts wird in Abb. 1.23 veranschaulicht.

Die vierte Bedingung der Definition bedeutet, dass $\mathbf{t}(t)$ und $\mathbf{c}'(t)$ in die gleiche Richtung schauen und $\mathbf{h}(t)$ und $\mathbf{c}''(t)$ bezüglich $\mathbf{t}(t)$ auf derselben Seite des von $\mathbf{c}'(t)$ und $\mathbf{c}''(t)$ aufgespannten Unterraums liegen.

Für eine reguläre, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\mathbf{c}(s)$ ändert die Eigenschaft ein Begleitdreibein zu besitzen nicht viel. Die Bedingung $\mathbf{c}'(s) \neq \mathbf{o}$ ist nach Konstruktion ohnehin gegeben, weil $\|\mathbf{c}'(s)\| = 1$. Die lineare Unabhängigkeit von $\mathbf{c}'(s)$ und $\mathbf{c}''(s)$, sowie $\mathbf{c}''(s) \neq \mathbf{o}$ schließen dafür die Existenz von Wendepunkten auf der Kurve aus. Somit gilt

Bemerkung 1.2. Eine Raumkurve mit nicht degeneriertem Begleitdreibein besitzt keine Wendepunkte.

Die Berechnung des Dreibeins einer regulären nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve erfolgt durch

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{c}'(s).$$

Um $\mathbf{n}(s)$ zu berechnen betrachtet man $\langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{c}'(s) \rangle = 1$. Durch Differentiation erhält man $\langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{c}''(s) \rangle = 0$, was $\mathbf{c}'(s) \perp \mathbf{c}''(s)$ bedeutet. Nachdem $\mathbf{h}(s)$ sowohl in der linearen Hülle $\text{span}(\mathbf{c}'(s), \mathbf{c}''(s))$ liegt, als auch $\langle \mathbf{h}(s), \mathbf{c}''(s) \rangle > 0$ gelten muss, ergibt sich

$$\mathbf{h}(s) = \frac{\mathbf{c}''(s)}{\|\mathbf{c}''(s)\|}.$$

Zuletzt ist $\mathbf{b}(s)$ zu berechnen, wobei die Reihenfolge im Kreuzprodukt die positive Orientierung dieser Basis gewährleistet.

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{h}(s)$$

Differentiation von $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$, $\langle \mathbf{h}(s), \mathbf{h}(s) \rangle = 1$ und $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 1$ liefert die Orthogonalität der Vektoren des Dreibeins in Bezug auf ihre Ableitungsvektoren. $\mathbf{t}(s) \perp \mathbf{t}'(s)$ bedeutet, dass die Ableitung $\mathbf{t}'(s)$ als Linearkombination der beiden Vektoren $\mathbf{h}(s)$ und $\mathbf{b}(s)$ möglich ist. Die analoge Überlegung gilt auch für $\mathbf{h}'(s)$ und $\mathbf{b}'(s)$. D.h.: Die Ableitung eines Vektors des Dreibeins lässt sich durch die anderen beiden Vektoren des Dreibeins darstellen. Für $\mathbf{t}'(s)$ ist die Darstellung nach der oben angeführten Berechnung klar.

$$\mathbf{h}(s) = \frac{\mathbf{c}''(s)}{\|\mathbf{c}''(s)\|} \Rightarrow \|\mathbf{c}''(s)\| \cdot \mathbf{h}(s) = \mathbf{c}''(s) = \mathbf{t}'(s)$$

$\mathbf{h}'(s)$ sieht als Linearkombination von $\mathbf{t}(s)$ und $\mathbf{b}(s)$ so aus:

$$\mathbf{h}'(s) = \underbrace{\langle \mathbf{h}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle}_{=-\langle \mathbf{h}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle} \mathbf{t}(s) + \langle \mathbf{h}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s)$$

Die Beziehung $\langle \mathbf{h}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \mathbf{h}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle$ ist eine Folgerung von $\langle \mathbf{h}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} \langle \mathbf{h}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$. Eine analoge Rechnung findet auch bei $\mathbf{b}'(s)$ Anwendung.

$$\mathbf{b}'(s) = \underbrace{\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle}_{=-\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle} \mathbf{t}(s) + \underbrace{\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{h}(s) \rangle}_{=-\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{h}'(s) \rangle} \mathbf{h}(s)$$

$\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle = 0$ ergibt sich aus einem Koeffizientenvergleich von $\mathbf{t}'(s) = \|\mathbf{c}''(s)\| \cdot \mathbf{h}(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{h}(s) \rangle \mathbf{h}(s) + \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s)$. Bei näherer Betrachtung fällt auf, dass die Skalarprodukte $\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{h}(s) \rangle$ und $\langle \mathbf{h}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ allein schon ausreichen, um diese Ableitungsgleichungen zu beschreiben. Diese Erkenntnis erlaubt die folgende Definition, sowie den nachfolgenden Satz:

Definition 1.54. Sei $\mathbf{c}(s)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, wo $\mathbf{c}'(s)$ und $\mathbf{c}''(s)$ stets linear unabhängig sind. Dann ist $\kappa(s) := \|\mathbf{c}''(s)\|$ die Krümmung und $\tau(s) := \langle \mathbf{h}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ die Torsion von $\mathbf{c}(s)$.

Satz 1.55. Für die Ableitungsvektoren des begleitenden Dreibeins gelten die Frenetschen Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{h}(s) \\ \mathbf{h}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{h}(s) \end{aligned}$$

Da $\kappa(s) := \|\mathbf{c}''(s)\|$ kann nur $\kappa(s) > 0$ gelten, aber es ist durchaus möglich, dass $\tau(s)$ negative Werte annimmt.

Bemerkung 1.3. Die Schmiegeebene $\sigma(s)$ der Kurve $\mathbf{c}(s)$ wird nach Def. 1.45 im Punkt $\mathbf{c}(s)$ von den Ableitungen $\mathbf{c}'(s)$ und $\mathbf{c}''(s)$ aufgespannt. Diese Darstellung lässt sich aber auch mithilfe des begleitenden Dreibeins $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{h}(s), \mathbf{b}(s)\}$ ausdrücken.

$$\sigma(s) = \mathbf{c}(s) + \text{span}(\mathbf{t}(s), \mathbf{h}(s))$$

und da $\mathbf{t}(s) \times \mathbf{h}(s) = \mathbf{b}(s)$ ist auch

$$\sigma(s) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{p} - \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0\}$$

eine valide Darstellung der Schmiegeebene. Vergleicht man diese Form mit Satz 1.5, sieht man direkt, dass der Binormalenvektor $\mathbf{b}(s)$ die Richtung des Lots auf die Schmiegeebene ist.

1.9 Abwickelbare Flächen

Die Klasse der abwickelbaren Flächen besteht aus Stücken von Ebenen, Zylinder-, Kegel- und Tangentenflächen. Diese sind für diese Arbeit besonders interessant, weil nur sie in die Ebene abwickelbar sind - siehe [11], [16] und [24]. Sie sind damit Kandidaten für die beiden Flächen, die sich entlang einer Raumkurve treffen und als zusammenhängendes Origami realisierbar sind. Diese Flächen und einige ihrer Eigenschaften werden in diesem Abschnitt behandelt.

1.9.1 Zylinderflächen

Wie bei Kühnel[11], Kruppa[16], Strubecker[22] und Wunderlich[24] nachzulesen ist, handelt es sich bei Zylinderflächen um eine stetige Folge von parallelen Geraden.

Diese Flächen lassen sich geschickterweise mithilfe einer Leitkurve \mathbf{c} und der Erzeugendenrichtung \mathbf{e} des Zylinders erzeugen. Es handelt sich daher bei Zylinderflächen stets um Regelflächen.

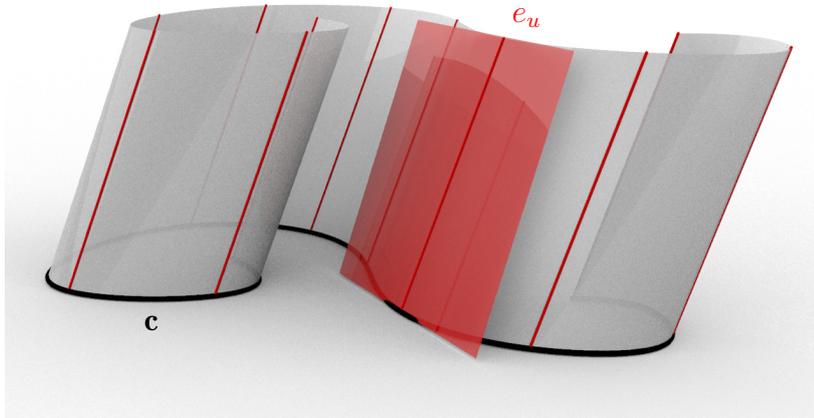


Abbildung 1.24: Zylinderfläche mit Leitkurve c , parallelen Erzeugenden e_u und einer Tangentialebene entlang dieser Erzeugenden.

Definition 1.56. Seien $\mathbf{o} \neq \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$, u aus dem Definitionsbereich der einmal stetig differenzierbaren Kurve $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ und $v \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\Phi(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\mathbf{e}$$

Zylinderfläche.

\mathbf{c} heißt Leitkurve und \mathbf{e} Erzeugendenrichtung des Zylinders. Die Geraden $e_{u_0}(v) := \Phi(u_0, v)$, wobei u_0 konstant ist, auch v -Parameterlinien genannt, heißen Erzeugende des Zylinders.

Die Tangentialebene τ in einem Punkt wird von den partiellen Ableitungsvektoren $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$, ausgewertet im gesuchten Punkt, aufgespannt [7].

Für $\Phi(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\mathbf{e}$ sind die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \dot{\mathbf{c}}(u) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \mathbf{e}$$

und damit ist deren Kreuzprodukt

$$\mathbf{n}(u, v) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = \dot{\mathbf{c}}(u) \times \mathbf{e}$$

Definition 1.57. Sei $\Phi(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\mathbf{e}$ ein Zylinder. Dann ist

$$\tau(u, v) : \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{p}, \mathbf{n}(u, v) \rangle = \langle \Phi(u, v), \mathbf{n}(u, v) \rangle, \text{ mit } \mathbf{n}(u, v) = \dot{\mathbf{c}}(u) \times \mathbf{e} \}$$

die Tangentialebene von Φ . Die Tangentialebene bleibt undefiniert, falls der Normalvektor $\mathbf{n}(u, v)$ gleich \mathbf{o} , unbestimmt, oder nicht eindeutig ist.

Nicht eindeutig bedeutet, dass Selbstdurchdringungen entlang von Erzeugenden auftreten. Die Tangentialebene im Punkt $\Phi(u_0, v_0)$ unterscheidet sich dann von der Tangentialebene in $\Phi(u_1, v_1)$, aber $\Phi(u_0, v_0) = \Phi(u_1, v_1)$ stellen denselben Punkt im Raum dar.

Das verträgt sich mit der Definition der Tangentialebene bei Wunderlich. Diese wird beim Grenzübergang einer Folge von Verbindungsebenen zweier Erzeugender bei deren Zusammenfallen definiert.

1.9.2 Kegelflächen

Ebenfalls an [11], [16], [22] und [24] orientiert werden Kegelflächen als stetige Folgen von Geraden definiert. Im Gegensatz zu den eben zuvor definierten Zylindererzeugenden gehen diesmal die Erzeugenden eines Kegels durch einen gemeinsamen Punkt. Kegel sind daher ebenfalls Regelflächen.



Abbildung 1.25: Kegelfläche mit Leitkurve \mathbf{c} , Spitze \mathbf{s} , Erzeugenden e_u und einer Tangentialebene entlang dieser Erzeugenden.

Die Leitkurve \mathbf{c} dient wie bereits beim Zylinder für eine möglichst einfache räumliche Beschreibung des Kegels. Die Erzeugendenrichtung hingegen bleibt beim Durchlaufen der Leitkurve nicht mehr unverändert, daher greift man auf die unverändert bleibende Kegelspitze \mathbf{s} zurück.

Definition 1.58. Seien u aus dem Definitionsbereich der einmal stetig differenzierbaren Kurve $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt

$$\Phi(u, v) = v\mathbf{c}(u) + (1 - v)\mathbf{s}$$

Kegelfläche.

\mathbf{c} heißt Leitkurve und \mathbf{s} Spitze des Kegels. Die Geraden $e_{u_0}(v) := \Phi(u_0, v)$, wobei u_0 konstant ist heißen Erzeugende des Kegels.

Die für die Tangentialebene von $\Phi(u, v) = v\mathbf{c}(u) + (1 - v)\mathbf{s}$ benötigten partiellen Ableitungen sind hier

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = v\dot{\mathbf{c}}(u) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \mathbf{c}(u) - \mathbf{s}.$$

Der Normalvektor der Tangentialebene im Punkt $\Phi(u, v)$ ist

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = v\dot{\mathbf{c}}(u) \times (\mathbf{c}(u) - \mathbf{s}).$$

Mithilfe dieses Normalvektors ist es möglich die Tangentialebene in Normalform anzugeben.

Definition 1.59. Sei $\Phi(u, v) = v\mathbf{c}(u) + (1 - v)\mathbf{s}$ ein Kegel. Dann ist

$$\tau(u, v) : \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{p}, \mathbf{n}(u, v) \rangle = \langle \Phi(u, v), \mathbf{n}(u, v) \rangle, \text{ mit } \mathbf{n}(u, v) = v\dot{\mathbf{c}}(u) \times (\mathbf{c}(u) - \mathbf{s}) \}$$

die Tangentialebene von Φ im Punkt $\Phi(u, v)$. Die Tangentialebene bleibt undefiniert, falls $\mathbf{n}(u, v)$ gleich \mathbf{o} , nicht eindeutig, oder unbestimmt ist.

Bei der Definition der Tangentialebene nach [24] ändert sich auch hier nichts im Vergleich zu den Zylinderflächen: Die Tangentialebene wird ebenfalls als Grenzlage einer Folge von Verbindungsebenen erreicht, wobei die Erzeugenden, die diese Verbindungsebenen festlegen, im Grenzfall zusammenfallen.

1.9.3 Tangentenflächen

Definition 1.60. Seien $\mathbf{c} \in C^2$ eine Raumkurve, u aus dem Definitionsbereich von \mathbf{c} und $v \in \mathbb{R}$. Dann heißt die von den Tangenten von \mathbf{c} gebildete Fläche

$$\Phi(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\dot{\mathbf{c}}(u)$$

Tangentenfläche, oder auch Torse von \mathbf{c} .

Die Tangenten $t_{u_0}(v) := \mathbf{c}(u_0) + v\dot{\mathbf{c}}(u_0)$, mit $u_0 = \text{konst.}$ heißen Erzeugende von Φ . Die Kurve $\Phi(u, 0)$ ist die Kurve \mathbf{c} selbst und heißt Gratlinie von Φ .

Die Ableitungen in u - und v -Richtung sind

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \dot{\mathbf{c}}(u) + v\ddot{\mathbf{c}}(u) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \dot{\mathbf{c}}(u).$$

Der Normalvektor ist damit

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = (\dot{\mathbf{c}}(u) + v\ddot{\mathbf{c}}(u)) \times \dot{\mathbf{c}}(u) = v(\ddot{\mathbf{c}}(u) \times \dot{\mathbf{c}}(u)).$$

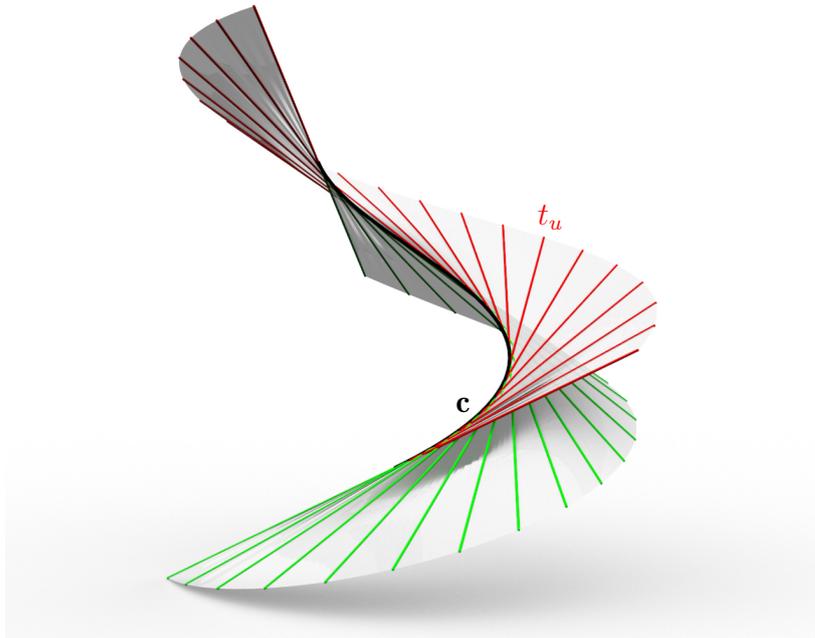


Abbildung 1.26: Die Tangentenfläche der Kurve \mathbf{c} . Die Gratlinie \mathbf{c} ist die scharfe Kante, die auf der Fläche auftritt.

Definition 1.61. Sei $\Phi(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\dot{\mathbf{c}}(u)$ eine Tangentenfläche. Dann ist

$$\tau(u, v) : \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{p}, \mathbf{n}(u, v) \rangle = \langle \Phi(u, v), \mathbf{n}(u, v) \rangle, \text{ mit } \mathbf{n}(u, v) = v(\ddot{\mathbf{c}}(u) \times \dot{\mathbf{c}}(u)) \}$$

die Tangentialebene von Φ im Punkt $\Phi(u, v)$. Die Tangentialebene bleibt undefiniert, falls \mathbf{n} gleich \mathbf{o} , nicht eindeutig, oder unbestimmt ist.

1.9.4 Die Gratlinie einer Torse

Wie in [16] und [22] werden die Tangentialebenen an Regelflächen noch einmal etwas genauer betrachtet. Die Tangentialflächen an v -Parameterlinien von Zylinderflächen werden von $\dot{\mathbf{c}}(u)$ und der konstanten Erzeugendenrichtung \mathbf{e} aufgespannt, was bereits in Def. 1.57 behandelt wurde. Hier fällt direkt auf, dass der Parameter v gar keinen Einfluss auf die Richtung des Normalvektors auf die Fläche besitzt. Damit ist die Tangentialebene an die Zylinderfläche entlang von Erzeugenden invariant, siehe Abb. 1.24.

Ist \mathbf{p} ein beliebiger, aber fester Punkt in der Tangentialebene im Punkt $\mathbf{c}(u_0)$, so liegt jeder Punkt \mathbf{x} , der die Gleichung

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0, \text{ mit } \mathbf{n} = \dot{\mathbf{c}}(u) \times \mathbf{e}$$

erfüllt, in dieser Tangentialebene.

Die analoge Betrachtung der Tangentialflächen an Kegeln liefert diesen Gedankengang:

Die Tangentialebenen entlang einer v -Parameterlinie lassen sich, wie in Def. 1.59, mit der Gleichung

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n}(u, v) \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{n}(u, v) \rangle = 0, \text{ mit } \mathbf{n}(u, v) = v\dot{\mathbf{c}}(u) \times (\mathbf{c}(u) - \mathbf{s})$$

beschreiben.

Die Änderung des Wertes v lässt aber die Richtung von \mathbf{n} unverändert, da $v\dot{\mathbf{c}}(u)$ dadurch nur gestreckt bzw. gestaucht wird. Nur in der Kegelspitze \mathbf{s} ist $v\dot{\mathbf{c}}(u) = \mathbf{o}$. Das bedeutet, dass auch die Tangentialebenen an einen Kegel entlang ihrer Erzeugenden invariant sind. Da alle Erzeugenden eines Kegels durch seine Spitze verlaufen, bleibt die Kegelspitze bei dieser Erkenntnis berechneterweise die einzige Ausnahme.

Ist die Fläche eine Torse, so liefert die Betrachtung der Tangentialebenen entlang der v -Parameterlinien nach Def. 1.61

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n}(u, v) \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{n}(u, v) \rangle = 0, \text{ mit } \mathbf{n}(u, v) = v(\dot{\mathbf{c}}(u) \times \ddot{\mathbf{c}}(u)).$$

Das bedeutet, dass der Faktor v den Normalvektor ebenfalls nur skaliert, aber die Richtung unverändert lässt. In den Gratpunkten ist die Tangentialebene nicht definiert. Die Schmiegeebene von $\mathbf{c}(u_0)$ fällt also mit der Tangentialebene der Torse entlang der Erzeugenden zu Parameter u_0 zusammen. Das liefert folgenden Satz

Satz 1.62. *Die Tangentenfläche einer Kurve \mathbf{c} ist das Hüllgebilde der Schmiegeebenen von \mathbf{c} .*

Wird in den eben betrachteten Fällen $\mathbf{p} = \mathbf{c}(u)$ gewählt, so lassen sich die beim Durchlaufen von \mathbf{c} überstrichenen Tangentialflächen, oder Schmiegeebenen im Falle von Torsen, als einparametrische Ebenenschar auffassen.

$$T(u) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}(u) \rangle - \langle \mathbf{c}(u), \mathbf{n}(u) \rangle = 0,$$

wobei $\mathbf{n}(u) = \dot{\mathbf{c}}(u) \times \mathbf{e}$, $\mathbf{n}(u) = \dot{\mathbf{c}}(u) \times (\mathbf{c}(u_0) - \mathbf{s})$, oder $\mathbf{n}(u) = \ddot{\mathbf{c}}(u) \times \dot{\mathbf{c}}(u)$ ist. Die Wahl von $\mathbf{n}(u)$ ist davon abhängig, ob es sich um einen Zylinder, Kegel, oder eine Torse handelt.

Ableiten von $\langle \mathbf{x}, \mathbf{n}(u) \rangle - \langle \mathbf{c}(u), \mathbf{n}(u) \rangle = 0$ nach u liefert

$$\dot{T}(u) = \langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{n}}(u) \rangle - \frac{d}{du} \langle \mathbf{c}(u), \mathbf{n}(u) \rangle = 0$$

und erneutes Ableiten

$$\ddot{T}(u) = \langle \mathbf{x}, \ddot{\mathbf{n}}(u) \rangle - \frac{d^2}{du^2} \langle \mathbf{c}(u), \mathbf{n}(u) \rangle = 0.$$

Satz 1.63. *Die Gleichung $T(u) = \dot{T}(u) = 0$ liefert die Erzeugenden der abwickelbaren Regelfläche zum Parameter u .*

Satz 1.64. *Die Gleichung $T(u) = \dot{T}(u) = \ddot{T}(u) = 0$ beschreibt die Gratlinie einer Torse bzw. die Spitze des Kegels, oder im Grenzfall die Erzeugendenrichtung des Zylinders.*

Ein Beweis für beide Sätze ist in §75 von Kruppa[16] zu finden. Dieser baut auf dem Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie auf. Dabei werden jeweils Punkte, Geraden und Ebenen vermöge einer Polarität an einer Kugel auf Ebenen, Geraden und Punkte abgebildet. Aussagen, die eine Punktmenge beschreiben, betreffen, werden so auf Aussagen über eine Ebenenmenge übersetzt.

In einer projektiven Ebene wird analog durch Dualisieren die Punktmenge mit der Geradenmenge vertauscht.

Mit diesen Möglichkeiten werden nun Grenzwertüberlegungen, die Punkte, Geraden, oder Ebenen betreffen, dualisiert. Wie z.B.: Das Zusammenfallen zweier Tangenten einer ebene Kurve liefert einen Kurvenpunkt. Diese Aussage ist dual dazu, dass zwei Erzeugende einer Kegelfläche beim Zusammenfallen eine Tangentialebene liefern. Diese durch Dualisieren erhaltene Aussage ist wahr und lässt sich in [24] nachlesen.

Ein kurzer Einblick in den Beweis in §75 von Kruppa soll an dieser Stelle trotzdem angeführt werden.

Beweis. Die Gleichungen $T(u) = \dot{T}(u) = 0$ und $T(u) = \dot{T}(u) = \ddot{T}(u) = 0$ kommen ins Spiel, weil Kruppa die Schmiegeebene einer Kurve \mathbf{c} als Grenzebene einer Ebenenfolge der von drei Punkten $\mathbf{p}, \mathbf{q}_k, \mathbf{r}_k \in \mathbf{c}$ aufgespannten Ebenen definiert.

Beim Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ fallen die Punkte $\mathbf{p}, \mathbf{q}_k, \mathbf{r}_k$ in \mathbf{p} zusammen. Die Punktfolgen $\mathbf{q}_k, \mathbf{r}_k$ streben dabei unabhängig voneinander gegen \mathbf{p} . Eine Ebene $F^*(u) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}(u) \rangle - f(u) = 0$, geht durch diese drei Punkte, wenn $F(u) = \langle \mathbf{c}(u), \mathbf{n}(u) \rangle - f(u) = 0$ gilt. Die Parameter $u_{1,2,3}$ der Kurve, die $\mathbf{p}, \mathbf{q}_k, \mathbf{r}_k$ liefern, sind Nullstellen von F . Nach dem Mittelwertsatzes der Differentialrechnung [14] existieren zwei Stellen in jenem Intervall, das von zwei der drei Werte $u_{1,2,3}$ begrenzt wird, für die $\dot{F} = 0$ ist. Analog dazu gibt es auf diesem Intervall eine Stelle, die $\ddot{F} = 0$ besitzt. Fallen die Punkte beim Grenzübergang zusammen, dann fallen auch die Parameter $u_{1,2,3}$ zusammen, womit für die Schmiegeebene $F(u) = \dot{F}(u) = \ddot{F}(u) = 0$ gilt. Die Tangente entsteht durch Zusammenfallen von nur zwei Punkten, damit gilt dafür sie $F(u) = \dot{F}(u) = 0$.

Dualisiert man das durch $T(u)$ definierte Flächensystem, so sind diese dual zu einer Kurve $\mathbf{d}(u)$. Diese Kurve besitzt nun Schmiegeebenen, die durch eine Gleichung $F(u) = \dot{F}(u) = \ddot{F}(u) = 0$ beschrieben werden. Dualisiert man diese Gleichung, so erhält man Punkte, welche die Gratlinie der von $T(u)$ überstrichenen Torse bilden. Die Ebenen $T(u)$ sind nach Satz 1.62 die Schmiegeebenen dieser Gratlinie.

Auf analoge Weise sind Tangenten von \mathbf{d} dual den zu Erzeugenden dieser Torse. \square

Wie in [11], [16] und [24] nachzulesen ist, handelt es sich bei abwickelbaren Flächen stets um Stücke von Zylindern, Kegeln, Tangentenflächen und trivialerweise auch Ebenen. Einige Eigenschaften dieser Flächen wurden in diesem Kapitel behandelt, unter

anderem auch die für jeden Kegel eindeutige Spitze, sowie die fixe Erzeugendenrichtung von Zylindern. Im Lichte dieser Invarianten wird im Folgenden mithilfe der vorhin untersuchten Flächen auch die Krümmung erneut betrachtet.

1.10 Die geodätische Krümmung

Betrachtet man eine Kurve \mathbf{c} , die in einer Fläche Φ liegt, so ist die Überlegung, welche Rolle die Form der Fläche bei der Krümmung der Kurve spielt, durchaus legitim. Zeichnet man eine Kurve auf ein Blatt Papier und rollt dieses anschließend ein, so ändert sich ja auch die Krümmung dieser Kurve. Daher sucht man nach Invarianten, die mit der Krümmung zusammenhängen und sich bei solchen längen-, winkel-, und flächentreuen Verformungen, auch Isometrien genannt, nicht ändern.

Der differentialgeometrische Zugang, wie in [4], [7], [11] und [16], würde aber weit über die für diese Arbeit benötigten Inhalte hinausgehen und bedarf unter anderem auch noch weiterer Definitionen (kovariante Ableitung, erste und zweite Fundamentalfarm, etc.), die den Umfang unnötig erweitern würden. Daher wird der Zugang, der am ehesten in medias res geht, verwendet. Kruppa [16] wählt einen Aufbau, der größtenteils mit den bisher definierten Mitteln möglich ist. Dieser basiert auf der Definition eines Flächenstreifens [3], der von der Raumkurve ausgeht und entlang der Kurve die gleiche Tangentialebene besitzt wie die Fläche, in der die Kurve enthalten ist.

Definition 1.65. *Durchläuft der Punkt \mathbf{p} die Kurve $\mathbf{c}(s)$, wobei $\mathbf{c} \subset \Phi$, so bilden die Tangentialebenen von Φ im Punkt \mathbf{p} die der Fläche Φ längs der Kurve \mathbf{c} umschriebene Torse C . C heißt Flächenstreifen, oder auch kurz Streifen.*

Auch so ein Streifen kann mit einem begleitenden Dreibein versehen werden.

Definition 1.66. *Sei C der Streifen der Kurve $\mathbf{c}(s)$ auf Φ . Dann heißt $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{t}^*(s), \mathbf{n}(s)\}$ begleitendes Dreibein des Streifens C wenn Folgendes gilt:*

- $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{t}^*(s), \mathbf{n}(s)\}$ ist ein positiv orientiertes Orthonormalsystem.
- $\mathbf{t}(s)$ ist der Tangentialvektor von $\mathbf{c}(s)$ im betrachteten Punkt $\mathbf{p} = \mathbf{c}(s)$.
- $\mathbf{t}^*(s)$ liegt in der Tangentialebene der Fläche φ in \mathbf{p} und ist orthogonal zu $\mathbf{t}(s)$.
- $\mathbf{n}(s)$ ist die Flächennormale der Tangentialflächen in \mathbf{p} .

Die Einheitsvektoren $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{t}^*(s)$ und $\mathbf{n}(s)$ werden als

$\mathbf{t}(s)$... Tangentenvektor

$\mathbf{t}^*(s)$... Tangentialnormalenvektor

$\mathbf{n}(s)$... Flächennormalenvektor

bezeichnet.

Das begleitende Dreibein von C lässt sich nun in jedem Punkt \mathbf{p} in der Basis $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{h}(s), \mathbf{b}(s)\}$ des begleitenden Dreibeins der Kurve darstellen:

Da der Tangentenvektor $\mathbf{t}(s)$ beider Dreibeine derselbe ist, ist die Darstellung mit $\mathbf{t}(s) = \mathbf{t}(s)$ trivial.

Für $\mathbf{t}^*(s)$ gilt $\mathbf{t}^*(s) = \cos(\omega(s))\mathbf{h}(s) - \sin(\omega(s))\mathbf{b}(s)$, weil $\mathbf{t}^*(s) \perp \mathbf{t}(s)$ ist und somit nur von $\mathbf{h}(s)$ und $\mathbf{b}(s)$ dargestellt werden kann. Ist $\sphericalangle(\mathbf{t}^*(s), \mathbf{h}(s)) = \omega(s)$, so geht $\mathbf{t}^*(s)$ durch die Rotation um die Achse $\mathbf{t}(s)$ um den Winkel $\omega(s)$ aus $\mathbf{h}(s)$ hervor, siehe Abb. 1.27.

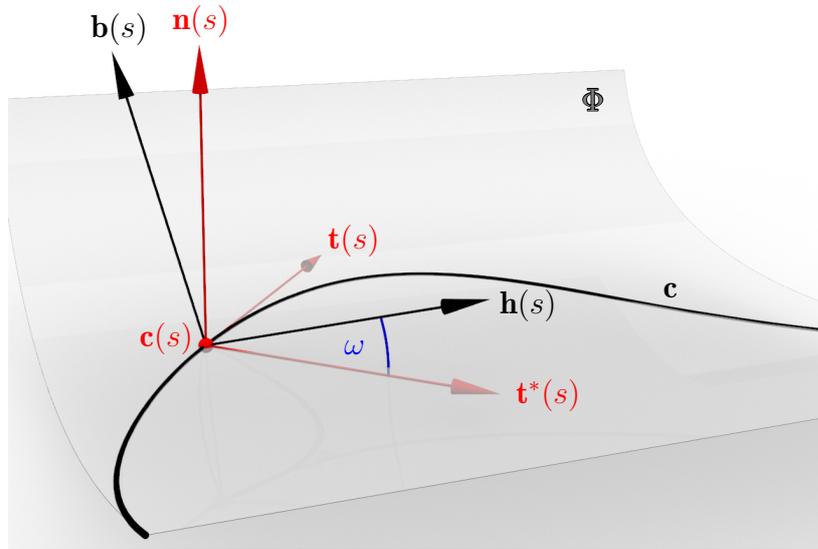


Abbildung 1.27: Das begleitende Dreibein der Kurve $\mathbf{c} \in \Phi$ in schwarz und das begleitende Dreibein des Streifens in rot.

Analog ist auch $\mathbf{n}(s) = \sin(\omega(s))\mathbf{h}(s) + \cos(\omega(s))\mathbf{b}(s)$.

Leitet man nun $\mathbf{t}^*(s)$ nach der Bogenlänge von \mathbf{c} ab, so erhält man

$$\mathbf{t}^{*'}(s) = -\sin(\omega(s))\omega'(s)\mathbf{h}(s) + \cos(\omega(s))\mathbf{h}'(s) - \cos(\omega(s))\omega'(s)\mathbf{b}(s) - \sin(\omega(s))\mathbf{b}'(s).$$

Durch Anwendung der Frenetschen Ableitungsgleichungen aus Satz 1.55 folgt somit

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{*'}(s) &= -\sin(\omega(s))\omega'(s)\mathbf{h}(s) + \cos(\omega(s))(-\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)) \\ &\quad - \cos(\omega(s))\omega'(s)\mathbf{b}(s) - \sin(\omega(s))(-\tau(s)\mathbf{h}(s)) \\ &= -\kappa(s)\cos(\omega(s))\mathbf{t}(s) + (\tau(s) - \omega'(s)) \underbrace{(\sin(\omega(s))\mathbf{h}(s) + \cos(\omega(s))\mathbf{b}(s))}_{=\mathbf{n}(s)}. \end{aligned}$$

Differentiation von $\mathbf{n}(s) = \sin(\omega(s))\mathbf{h}(s) + \cos(\omega(s))\mathbf{b}(s)$ liefert

$$\begin{aligned}\mathbf{n}'(s) &= \cos(\omega(s))\omega'(s)\mathbf{h}(s) + \sin(\omega(s))\mathbf{h}'(s) - \sin(\omega(s))\omega'(s)\mathbf{b}(s) + \cos(\omega(s))\mathbf{b}'(s) \\ &= \cos(\omega(s))\omega'(s)\mathbf{h}(s) + \sin(\omega(s))(-\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)) \\ &\quad - \sin(\omega(s))\omega'(s)\mathbf{b}(s) + \cos(\omega(s))(-\tau(s)\mathbf{h}(s)) \\ &= -\kappa(s)\sin(\omega(s))\mathbf{t}(s) - (\tau(s) - \omega'(s)) \underbrace{(\cos(\omega(s))\mathbf{h}(s) - \sin(\omega(s))\mathbf{b}(s))}_{=\mathbf{t}^*(s)}.\end{aligned}$$

Fügt man diesen Ableitungsvektoren noch $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{h}(s) = \kappa(s)\cos(\omega(s))(\mathbf{t}^*(s)) + \kappa(s)\sin(\omega(s))\mathbf{n}(s)$ hinzu erhält man analog zu Satz 1.55 die Ableitungsgleichungen des begleitenden Dreibeins des Streifens.

Definition 1.67. Sei C der Streifen einer nach der Bogenlänge parametrisierten Raumkurve $\mathbf{c}(s)$. Sei $\omega(s) := \sphericalangle(\mathbf{t}^*(s), \mathbf{h}(s))$. Dann ist $\kappa_g(s) := \kappa(s)\cos(\omega(s))$ die geodätische Krümmung, $\kappa_n(s) := \kappa(s)\sin(\omega(s))$ die Normalkrümmung und $\tau_g(s) := \tau(s) - \omega'(s)$ die geodätische Torsion der Kurve \mathbf{c} .

Für die Ableitungsvektoren des begleitenden Dreibeins des Streifens C gelten die Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(s) &= \kappa_g(s)\mathbf{t}^*(s) + \kappa_n(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{t}^{*\prime}(s) &= -\kappa_g(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa_n(s)\mathbf{t}(s) - \tau_g(s)\mathbf{t}^*(s)\end{aligned}$$

Aus der Definition von κ_g und κ_n ist klar, dass der Zusammenhang $\kappa^2(s) = \kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s)$ gilt. Außerdem ist aus der ersten Zeile der Ableitungsgleichungen ersichtlich, dass sich $\kappa(s)\mathbf{h}(s) = \mathbf{t}'(s)$ in eine Komponente tangential und eine normal zur Fläche, in der die Kurve \mathbf{c} liegt, zerlegen lässt. Daher wird die geodätische Krümmung auch Tangentialkrümmung genannt.

Bei näherer Betrachtung, fällt aber auf, dass sowohl die Orientierung des Normalvektors $\mathbf{n}(s)$ auf die Fläche, als auch die Durchlaufrichtung der Kurve \mathbf{c} Einfluss auf $\kappa_g(s)$ und $\kappa_n(s)$ nehmen. Die Änderung von \mathbf{n} zu $-\mathbf{n}$ orientiert dann auch \mathbf{t}^* um, wodurch κ_g das Vorzeichen wechselt. Ändert andererseits \mathbf{t} die Orientierung zu $-\mathbf{t}$, so ändert sich ebenfalls die Orientierung von \mathbf{t}^* , womit κ_g erneut das Vorzeichen wechselt.

Mit den in [4], [7], [11] und [16] verwendeten Methoden lässt sich der folgende Satz beweisen. Dennoch wird dieser Beweis hier nicht behandelt, aber sei bei Interesse auf Kruppa [16] verwiesen. Dafür wird ein Beispiel angeführt.

Satz 1.68. Die geodätische Krümmung $\kappa_g(s)$ einer Kurve ist bei Isometrien invariant.

Beispiel. Wird eine Kurve $\mathbf{c}(s)$ auf einem Blatt Papier nach ihrer Bogenlänge durchlaufen, so besitzt diese in jedem Punkt eine Krümmung $\kappa(s)$, die der Länge von $\mathbf{c}''(s)$ entspricht. $\mathbf{c}''(s)$ lässt sich nun in Komponenten, eine tangential und eine normal zum Blatt, zerlegen. Die Tangentialebene von $\mathbf{c}(s)$ ist das Blatt selbst und die Kurve verlässt

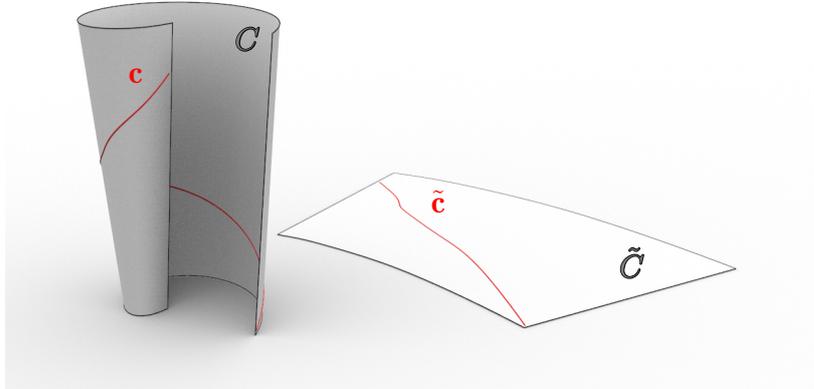


Abbildung 1.28: Der Streifen C durch die Flächenkurve \mathbf{c} (Fläche Φ ist nicht dargestellt) sowie seine Abwicklung \tilde{C} . Dabei wird \mathbf{c} auf $\tilde{\mathbf{c}}$ abgebildet.

das Blatt nicht in den umliegenden Raum. Damit verschwindet die Normalkomponente, in der Schreibweise von oben bedeutet das $\kappa_n(s)\mathbf{n}(s) = \mathbf{o}$. Für die Krümmung sowie die geodätische Krümmung dieser ebenen Kurve gilt also $\kappa(s) = \kappa_g(s)$ überall. Wird nun das Blatt verbogen, also eine Isometrie angewandt, so verlässt die Kurve die Ebene, in der sie vorher war, damit ändert sich der Normalanteil und auch die Krümmung κ selbst.

Auch das umgekehrte Experiment kann beim Verständnis dieses Sachverhaltes durchaus behilflich sein. Ist \mathbf{c} eine Kurve auf einer abwickelbaren Fläche, dann gibt es auch eine Kurve $\tilde{\mathbf{c}}$ die dem Bild der Kurve nach der Abwicklung der Fläche in die Ebene entspricht. Die Krümmung der Kurve $\tilde{\mathbf{c}}$ ist die geodätische Krümmung von \mathbf{c} .

1.11 Ein Hauch projektiver Geometrie

Im Laufe dieser Arbeit werden einige Begriffe, die vorrangig aus der projektiven Geometrie stammen, verwendet. Diese sollen hier, der Vollständigkeit halber, kurz erwähnt werden. Da diese Definitionen aber einiges an Vorarbeit verlangen würden, wird auf diese Beweise verzichtet und auf Fachliteratur, wie z.B. [17] und [18] verwiesen. Dort sind sämtliche Definitionen, Sätze und Beweise, die hier verwendet werden, wiederzufinden.

Das Dualitätsprinzip wurde bereits erwähnt. Es handelt sich hierbei um das Vertauschen von Elementen des projektiven Raums, bzw. der projektiven Ebene. Wird beispielsweise die Menge der Punkte mit den Ebenen vertauscht, so wird aus dem projektiven Raum der Dualraum. Die dabei dualisierten Aussagen besitzen ebenso an Gültigkeit.

Schränkt man den Dualraum auf alle Ebenen und Geraden durch einen beliebigen

Punkt ein, handelt es sich wieder um eine projektive Ebene. Diese Version einer projektiven Ebene nennt man Bündelmodell. Vertauscht man Ebenen und Geraden des Bündelmodells, so nennt man dieses Modell einer projektiven Ebene Dualbündelmodell.

Ein Kegelschnitt wird so im Dualbündelmodell zu einem quadratischen Kegel dualisiert. Die Brennpunkte werden zu Fokalstrahlen.

Ein Kegel besitzt einen Normalenkegel mit derselben Spitze. Die Erzeugenden des Kegels sind dabei normal zu den Tangentialebenen des Normalenkegels und vice versa. Die Fokalstrahlen gehen dabei in zyklische Ebenen über.

Eine Ebene, die einen Kegel zweiter Ordnung nach einem Kreis schneidet, heißt Kreisschnittebene dieses Kegels. Verschiebt man eine dieser Kreisschnittebenen in die Spitze des Kegels, so spricht man von einer zyklischen Ebene. Der (imaginäre) Schnitt einer zyklischen Ebene mit dem Kegel sind zwei Minimalerzeugende.

Geraden, die den absoluten Kegelschnitt schneiden, heißen isotrope Geraden. Minimalerzeugende nennt man jene Erzeugenden des Kegels, die den absoluten Kegelschnitt schneiden. Der Kegel, der nur aus isotropen Geraden besteht, heißt isotroper Kegel.

Kegelschnitte werden durch homogene quadratische Gleichungen der Form $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0$ dargestellt. Die Matrix M ist dabei symmetrisch. Der absolute Kegelschnitt ist jener Kegelschnitt, der die quadratische Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ besitzt. Die Matrix, die diese quadratische Gleichung darstellt ist die Einheitsmatrix selbst.

2 Origami mit Kegel- und Zylinderflächen

Bei *curved folding* - siehe [5], [9], [12] und [15] - handelt es sich um Origami entlang von Kurven. Ein ebenes Blatt wird dabei so gefaltet, dass eine Raumkurve als scharfe Kante zwischen zwei Flächen entsteht. Diese Kante muss nicht, wie erwartet, eine gerade Linie sein, sie kann durchaus auch gebogen sein. Wie bereits in der Einführung erwähnt, sollen in dieser Arbeit diejenigen Raumkurven charakterisiert werden, die bei curved folding als Schnitt von Zylinder- und Kegelflächen auftreten. Bevor aber die Kombinationen von Kegeln und Zylindern einzeln für sich betrachtet werden, werden noch allgemeine Voraussetzungen für abwickelbare Flächen behandelt.

2.1 Die geodätische Krümmung einer Kurve auf zwei abwickelbaren Flächen

Eine Raumkurve \mathbf{c} , die als Schnittkurve zweier Flächen Φ_1 und Φ_2 , die Kegel- oder Zylinderflächen sind, auftritt, soll nun bei der Origamitechnik des curved folding aus einem ebenen Blatt Papier gefaltet werden können. Dabei wird verlangt, dass die Flächen in der ebenen Konfiguration entlang derselben verebneten Kurve $\tilde{\mathbf{c}}$ zusammenhängen und nicht wie in Abb. 2.1 lose aneinanderhängen. Denn nur dann war die Konfiguration des Raums durch curved folding erreichbar.

In [20] und [21] gibt Röschel Bedingungen für eine Kurve auf zwei abwickelbaren Flächen, die zu curved folding passen, an, die auch hier behandelt werden: Gegeben sei eine nach der Bogenlänge $s \in I \subset \mathbb{R}$ parametrisierte Kurve $\mathbf{c} \in C^3$, die die Schnittkurve zweier abwickelbarer Flächen Φ_1 und Φ_2 ist. die Kurve \mathbf{c} lässt sich durch Isometrien φ_1 und φ_2 , die die Flächen einzeln in die Ebene π abwickeln, auf die ebenen Kurven $\varphi_1(\mathbf{c}) = \tilde{\mathbf{c}}_1$ und $\varphi_2(\mathbf{c}) = \tilde{\mathbf{c}}_2$ abbilden. $\tilde{\mathbf{c}}_1$ und $\tilde{\mathbf{c}}_2$ sollen nun die identische Kurve sein, damit muss auch die Krümmung beider Kurven in jedem Punkt übereinstimmen. Da die Kurve $\tilde{\mathbf{c}} := \tilde{\mathbf{c}}_1 = \tilde{\mathbf{c}}_2$ eben ist, kann man wie im Beispiel zu Satz 1.68 darauf schließen, dass diese Krümmung die geodätische Krümmung der Raumkurve sein muss. Hierbei gilt dennoch die Einschränkung, dass die Flächen durch eine andere Orientierung das Vorzeichen der geodätischen Krümmung ändern würden, damit folgt für die geodätischen Krümmungen $\kappa_{g,1}$ von $\varphi_1^{-1}(\tilde{\mathbf{c}})$ und $\kappa_{g,2}$ von $\varphi_2^{-1}(\tilde{\mathbf{c}})$ die Beziehung $\kappa_{g,1} = \pm \kappa_{g,2}$.

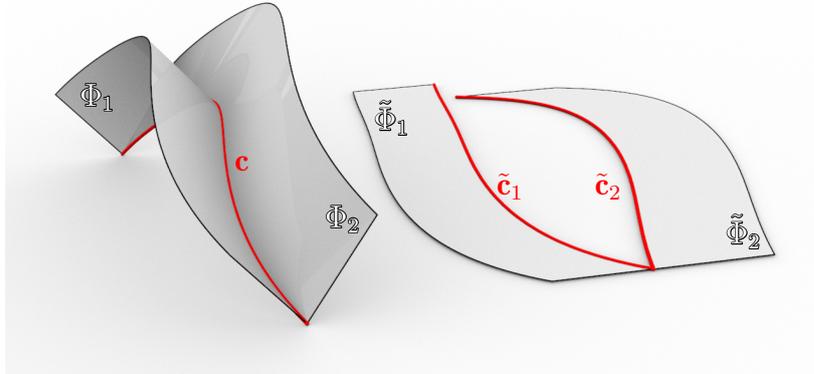


Abbildung 2.1: Links sind die Flächen Φ_1 , Φ_2 und deren Schnittkurve \mathbf{c} zu sehen. Daneben liegen deren Abwicklungen $\tilde{\Phi}_1$ mit $\tilde{\mathbf{c}}_1$ und $\tilde{\Phi}_2$ mit $\tilde{\mathbf{c}}_2$.

In Definition 1.67 wird unter anderem die geodätische Krümmung einer Kurve als $\kappa_g(s) = \kappa(s) \cos(\omega(s))$ mit $\omega(s) = \angle(\mathbf{t}^*(s), \mathbf{h}(s))$ definiert. Über den Winkel $\omega(s)$ gelangt man nun wegen $\sigma(s) = \mathbf{c}(s) + \text{span}(\mathbf{t}(s), \mathbf{h}(s))$ und $\tau(s) = \mathbf{c}(s) + \text{span}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}^*(s))$ zum Schnittwinkel der Schmiegeebene $\sigma(s)$ und der Tangentialebene $\tau(s)$ in $\mathbf{c}(s)$. Dieser ist $\arccos(\langle \mathbf{t}^*(s), \mathbf{h}(s) \rangle)$.

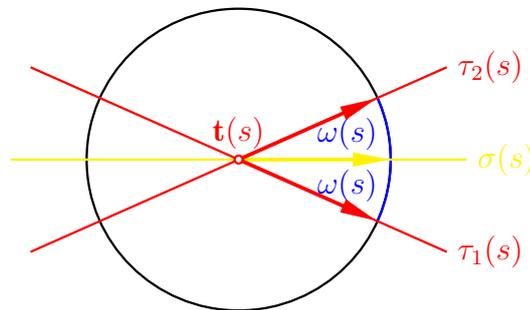


Abbildung 2.2: Ebener Schnitt der Schmiegeebene $\sigma(s)$ und der Tangentialebenen $\tau_{1,2}(s)$. Die Schnitttebene ist normal auf den Tangentenvektor $\mathbf{t}(s)$. Dieser erscheint damit in projizierender Lage.

Die Gleichung $\kappa_{g,1} = \pm \kappa_{g,2}$ lässt somit, wie in Abb. 2.2 zu sehen ist, nur zwei Fälle für die Lage der Tangentialebenen zu: Die Tangentialebenen $\tau_1(s)$ an die Fläche Φ_1 und $\tau_2(s)$ an Φ_2 sind identisch und schließen mit der Schmiegeebene $\sigma(s)$ den Winkel $\arccos(\langle \mathbf{t}^*(s), \mathbf{h}(s) \rangle)$ ein. Andernfalls liegen die Tangentialflächen spiegelsymmetrisch bezüglich der Schmiegeebene $\sigma(s)$.

Fallen die Tangentialebenen zusammen, so handelt es sich um den trivialen Fall $\Phi_1 = \Phi_2$, da beide Flächen von denselben Tangentialebenen überstrichen werden.

Angenommen die Kurve $\tilde{\mathbf{c}}$ ist keine Gerade und man versucht trotzdem das Blatt Papier auf sich selbst zu falten, so werden auch zwei Parallelkurven $\tilde{\mathbf{c}}^+$ und $\tilde{\mathbf{c}}^-$, die von

$\tilde{\mathbf{c}}$ einen beliebig kleinen, aber konstanten Abstand ε besitzen, auf einander abgebildet.

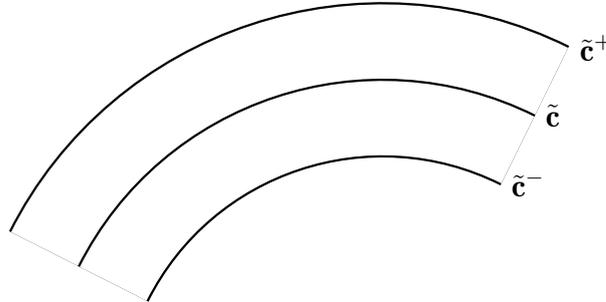


Abbildung 2.3: Kurve $\tilde{\mathbf{c}}$ und zwei Parallelkurven $\tilde{\mathbf{c}}_{1,2}$ im gleichen Abstand.

Einerseits ist, wie in Abb. 2.3 klar, dass die Bogenlängen der drei Kurven unterschiedlich sind:

$$L(\tilde{\mathbf{c}}^+) > L(\tilde{\mathbf{c}}) > L(\tilde{\mathbf{c}}^-),$$

oder auch

$$L(\tilde{\mathbf{c}}^+) < L(\tilde{\mathbf{c}}) < L(\tilde{\mathbf{c}}^-),$$

je nachdem, wie die Kurve $\tilde{\mathbf{c}}$ gekrümmt ist. Andererseits bildet die Isometrie $\tilde{\mathbf{c}}^+$ und $\tilde{\mathbf{c}}^-$ aufeinander ab, womit ein Widerspruch im Hinblick auf die Längentreue der Isometrie auftritt. Das Falten eines Blattes Papier auf sich selbst ist also nur dann möglich, wenn die Faltkante $\tilde{\mathbf{c}}$ entlang einer Geraden verläuft [9].

D.h.: Fallen die Tangentialebenen $\tau_{1,2}(s)$ zusammen, dann sind die Flächen $\Phi_{1,2}$ identisch und \mathbf{c} erfüllt überall $\kappa_g = 0$.

Damit bleibt nur die andere Möglichkeit, wo $\sigma(s)$ die Symmetrieebene der beiden Tangentialebenen ist, zur Betrachtung übrig.

Diese Beobachtungen, die auch in [21] zu finden sind, werden in folgendem Satz festgehalten:

Satz 2.1. *Seien eine Kurve \mathbf{c} und zwei verschiedene von ihr ausgehende abwickelbare Flächen gegeben. Diese räumliche Konfiguration ist nur dann theoretisch als Origami möglich, wenn die Schmiegebene der Kurve \mathbf{c} die Symmetrieebene der Tangentialebenen der Flächen im betrachteten Kurvenpunkt ist.*

2.2 Origami mit Kegelpaaren

Bei curved folding mit Kegeln ist einerseits die Raumkurve $\mathbf{c} \in C^3$ gegeben. Dabei soll \mathbf{c} keine Wendepunkte besitzen, da dort ja die Schmiegebene degeneriert und damit die Aussage über die Lage der Tangentialebenen $\tau_{1,2}(s)$ der Flächen zu der Schmiegebene

nicht mehr möglich ist. Andererseits sind zwei Kegelflächen Φ_1 sowie Φ_2 durch \mathbf{c} gegeben. Diese lassen sich wie in Def. 1.58 mithilfe einer Leitkurve, in diesem Fall \mathbf{c} , und der jeweiligen Kegelspitze $\mathbf{v}_{1,2}$ darstellen. Es wird angenommen, dass die Kegelerzeugende und die Tangente in jedem Punkt der Kurve \mathbf{c} linear unabhängig sind, da dort sonst die Tangentialebene undefiniert bleibt.

Mit diesen Voraussetzungen lässt sich also die räumliche Konfiguration eines Origamis mit zwei Kegelflächen mit dem Tripel $(\mathbf{c}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ identifizieren [21]. Es heiße dann *Tripel für curfed folding mit Kegelpaaren*. Außerdem ist es ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich das Koordinatensystem so zu wählen, dass $\mathbf{v} := \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$ ist.

Die Schmiegeebene $\sigma(s)$ lässt sich nach Bem. 1.3 mithilfe des Binormalenvektors $\mathbf{b}(s)$ der Kurve $\mathbf{c}(s)$ darstellen.

$$\sigma(s) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{p} - \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0\}$$

Der Vektor $\mathbf{b}(s)$ ist dabei die Richtung des Lots auf $\sigma(s)$.

Da es sich bei $\sigma(s)$ auch um die Symmetrieebene der beiden Tangentialebenen handelt und auch beide Kegelspitzen in der jeweiligen Tangentialebene liegen, muss auch die an $\sigma(s)$ gespiegelte Spitze in der anderen Tangentialfläche zu liegen kommen. Wird also $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \in \tau_1(s)$ an $\sigma(s)$ gespiegelt, so erhält man die gespiegelte Spitze $\mathbf{w}(s) \in \tau_2(s)$. Diese Spiegelung ist besonders einfach mithilfe des Lotfußpunkts von \mathbf{v} auf $\sigma(s)$ zu berechnen.

2.2.1 Der Lotfußpunkt einer Kegelspitze auf der Schmiegeebene

Der Lotfußpunkt $\mathbf{l}(s)$ der Spitze \mathbf{v} in Bezug auf die Schmiegeebene $\sigma(s)$ wird in diesem Kapitel noch von großer Bedeutung sein, daher wird dieser in diesem Abschnitt genauer untersucht.

Der Lotfußpunkt $\mathbf{l}(s)$ der Spitze \mathbf{v} auf die Schmiegeebene $\sigma(s)$ wird also erreicht, indem der Binormalenvektor $\mathbf{b}(s)$ durch \mathbf{v} bis $\sigma(s)$ verfolgt wird. In Abb. 2.4 wird dieser Zusammenhang veranschaulicht. Es gilt daher nach Satz 1.5 für die explizite Darstellung des Lotfußpunkts von \mathbf{v}

$$\mathbf{l}(s) = \mathbf{v} + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s). \quad (2.1)$$

Differentiation nach der Bogenlänge s liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{l}'(s) &= \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle' \mathbf{b}(s) + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}'(s) \\ &= \langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s) + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \mathbf{b}(s) + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}'(s) \end{aligned}$$

und mit $\langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$

$$\mathbf{l}'(s) = \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \mathbf{b}(s) + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}'(s) \quad (2.2)$$

für die Änderung des Lotfußpunkts $\mathbf{l}(s)$.

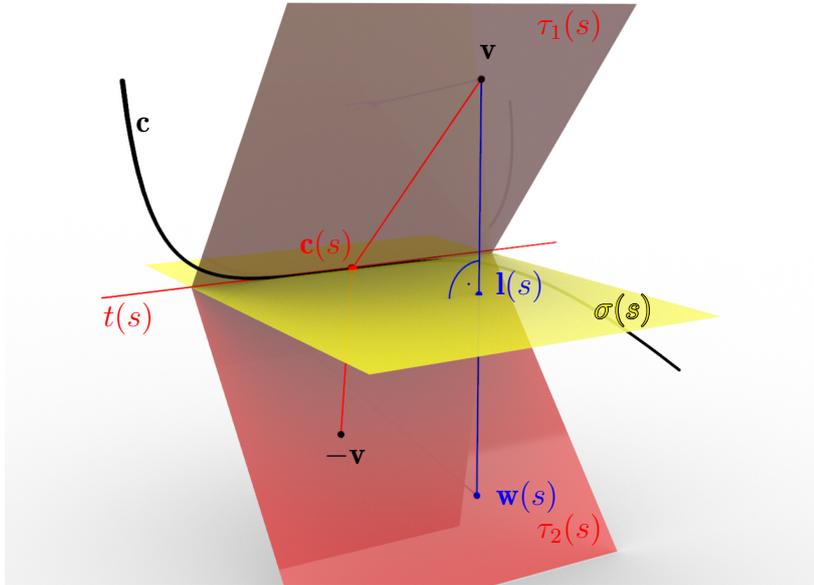


Abbildung 2.4: Der Lotfußpunkt $\mathbf{l}(s)$ der Kegelspitze $\mathbf{v} := \mathbf{v}_1$ auf $\sigma(s)$, sowie die an $\sigma(s)$ gespiegelte Spitze $\mathbf{w}(s)$.

Auch das Skalarprodukt $\langle \mathbf{l}(s), \mathbf{l}'(s) \rangle$ kann betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{l}(s), \mathbf{l}'(s) \rangle &= \langle \mathbf{v} + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s), \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \mathbf{b}(s) + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle \end{aligned}$$

Mit $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 1$ und $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle = 0$ kann dieses Skalarprodukt noch weiter vereinfacht werden.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{l}(s), \mathbf{l}'(s) \rangle &= \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \end{aligned}$$

Formt man nun noch die Skalarprodukte mit den Differenzen in Differenzen von Skalarprodukten um erhält man

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{l}(s), \mathbf{l}'(s) \rangle &= \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle + \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad - \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle + \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad - \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle - \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle, \end{aligned}$$

was sich nun zu folgendem Zusammenhang kürzen lässt:

$$\langle \mathbf{l}(s), \mathbf{l}'(s) \rangle = \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \quad (2.3)$$

Hat man den Lotfußpunkt $\mathbf{l}(s) = \mathbf{v} + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s)$ gegeben, ist es nur noch notwendig dieselbe Distanz ein weiteres Mal von $\mathbf{l}(s)$ aus weiterzuverfolgen, um zur gespiegelten Spitze $\mathbf{w}(s)$ zu gelangen. Also ist

$$\mathbf{w}(s) = \mathbf{v} + 2 \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s).$$

Nun gilt es die Lage von $\mathbf{w}(s)$ in Bezug auf die Kegelspitze $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}$ zu untersuchen. Hierbei werden zwei verschiedene Fälle betrachtet:

Fall A: $\mathbf{c}(s)$ ist eine ebene Kurve.

Fall B: $\mathbf{c}(s)$ ist keine ebene Kurve.

2.2.2 Charakterisierung des Falls A

Im ersten Fall ist die Schmiegeebene $\sigma^* := \sigma(s)$ beim Durchlaufen des Parameters s invariant, da die Kurve in ein und derselben Ebene bleibt. Damit bleibt auch der Lotfußpunkt $\mathbf{l}(s)$ des Kegelscheitels \mathbf{v}_1 fix.

Liegt die Kegelspitze \mathbf{v}_1 in σ^* , dann liegen auch die Tangentialebenen $\tau_1(s)$ stets in σ^* . Da die Tangentialebenen $\tau_1(s)$ und $\tau_2(s)$ stets symmetrisch bezüglich σ^* liegen, muss sich damit auch die Kegelspitze \mathbf{v}_2 in σ^* befinden.

Liegt \mathbf{v}_1 außerhalb der Schmiegeebene σ^* , dann ist $\mathbf{w}(s)$, da sowohl \mathbf{v}_1 , als auch $\mathbf{l}(s)$ konstant sind, ebenfalls konstant. Nach Voraussetzung liegt die gespiegelte Kegelspitze $\mathbf{w}(s)$ in sämtlichen Tangentialebenen $\tau_2(s)$. Die Tangentialebenen beinhalten aber bereits \mathbf{v}_2 als Fixpunkt. Angenommen die Ebenen $\tau_2(s)$ besäßen zwei Fixpunkte, so würde beim Durchlaufen von s lediglich die Verbindungsgerade von \mathbf{v}_2 und $\mathbf{w}(s)$ eingehüllt werden. Der Schnitt von $\tau_2(s)$ mit σ^* ist dann ein Geradenbüschel und die Kurve würde dann, weil die Geraden dieses Büschels ihre Tangenten sind, zu einem Punkt degenerieren.

Damit bleibt nur die Möglichkeit, dass $\mathbf{w}(s)$ und \mathbf{v}_2 zusammenfallen. Beide Kegelspitzen und damit auch beide Kegelflächen liegen dann spiegelsymmetrisch bezüglich der fixen Schmiegeebene σ^* .

2.2.3 Charakterisierung des Falls B

Im zweiten Fall werden sämtliche Kurven ausgenommen, die auch nur teilweise eben verlaufen. Es gilt erneut die Bedingung, dass $\mathbf{w}(s)$ und \mathbf{v}_2 in der Tangentialebene $\tau_2(s)$ liegen. $\tau_2(s)$ wird außerdem, wie bereits behandelt, vom Tangentialvektor $\mathbf{t}(s)$ der Kurve $\mathbf{c}(s)$ und der Erzeugendenrichtung \mathbf{e}_2 des Kegels Φ_2 im Punkt $\mathbf{c}(s)$ aufgespannt. Unter diesen Voraussetzungen ist es daher möglich, die Bedingung, dass $\mathbf{w}(s)$ und \mathbf{v}_2 in

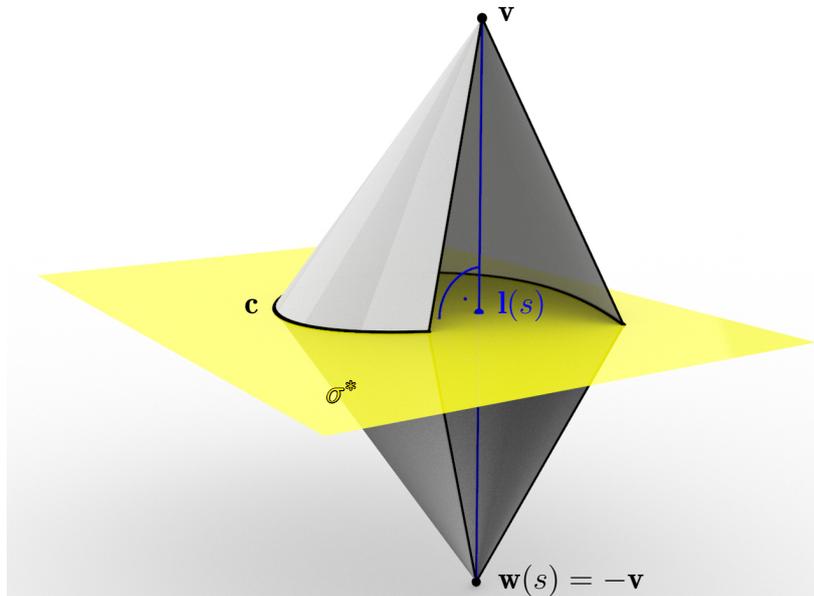


Abbildung 2.5: Trivialer Fall eines Origamis mit zwei spiegelsymmetrischen Kegeln. Die Schmiegeebene σ^* ist fix und damit \mathbf{c} eine ebene Kurve.

$\tau_2(s)$ liegen, als äquivalente Aussage $\{\mathbf{w}(s) - \mathbf{v}_2, \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}_2, \mathbf{t}(s)\}$ sind linear abhängig zu formulieren.

$\{\mathbf{w}(s) - \mathbf{v}_2, \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}_2, \mathbf{t}(s)\}$ sind genau dann linear abhängig, wenn die Determinante dieser drei Vektoren für alle s gleich 0 ergibt:

$$\{\mathbf{w}(s) - \mathbf{v}_2, \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}_2, \mathbf{t}(s)\} \text{ sind linear abhängig} \Leftrightarrow \det(\mathbf{w}(s) - \mathbf{v}_2, \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}_2, \mathbf{t}(s)) = 0$$

Wendet man noch $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}$ und, dass $\mathbf{t}(s)$ ein Vielfaches von $\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}'(s)$ ist, an, ergibt sich

$$\det(\mathbf{w}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}'(s)) = 0$$

als Bedingung für die Determinante. Betrachtet man den Vektor $\mathbf{w}(s) + \mathbf{v}$, fällt auf, dass durch die Linearkombination $\frac{1}{2}\mathbf{w}(s) + \frac{1}{2}\mathbf{v}$ der Halbierungspunkt $\mathbf{l}(s)$ darstellbar ist. Damit ist $\mathbf{w}(s) + \mathbf{v} = 2\mathbf{l}(s)$ und für die Determinante gilt wegen der Multilinearität

$$\det(\mathbf{l}(s), \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}'(s)) = 0.$$

Diese Determinante lässt sich auch als Spatprodukt darstellen und liefert somit

$$0 = \det(\mathbf{l}(s), \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}'(s)) = \langle \mathbf{l}(s), (\mathbf{c}(s) + \mathbf{v}) \times (\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}'(s)) \rangle.$$

Jetzt erschwert nur noch das doppelt auftretende Kreuzprodukt die weitere Berechnungen. Es wird daher die Regel $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$, die leicht nachzurechnen

ist, angewandt, um die Gleichung in eine Form zu bringen, die einfacher zu bearbeiten ist.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{l}(s), (\mathbf{c}(s) + \mathbf{v}) \times (\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}'(s)) \rangle &= \\ &= \langle \mathbf{l}(s), \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \mathbf{b}(s) - \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}'(s) \rangle \end{aligned}$$

In dieser Form lassen sich die Skalarprodukte vermöge Gleichung 2.1 vereinfachen:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{l}(s), \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \mathbf{b}(s) - \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{v} + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s), \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \mathbf{b}(s) - \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle - \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \\ &\quad - \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck liefert wegen $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 1$ und $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle - \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s) + \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle - \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad - \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle + \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Bedingung mit Gleichung 2.3 ergibt sich

$$\langle \mathbf{l}(s), \mathbf{l}'(s) \rangle = 0, \forall s \in I \subset \mathbb{R}.$$

Das bedeutet, dass sich der Lotfußpunkt $\mathbf{l}(s)$ auf einer Kugel um den Ursprung \mathbf{o} bewegt. Der Ursprung \mathbf{o} ist hier so gewählt, dass er der Mittelpunkt der beiden Kegelspitzen \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 ist. Andernfalls ist es auch möglich, dass $\mathbf{l}(s)$ ein konstanter Punkt ist.

Ist $\mathbf{l}(s)$ ein konstanter Punkt, so handelt es sich bei \mathbf{c} um eine ebene Kurve, da sich die Schmiegeebene $\sigma^* := \sigma(s)$ nicht ändert. Dieser triviale Fall A wurde bereits behandelt.

Diese Ergebnisse kann man nun wie Röschel in [21] zusammenfassen:

Satz 2.2. *Eine Raumkurve $\mathbf{c}(s) \in \mathbb{C}^3$ ohne Wendepunkte ist geeignet für Origami mit Paaren von Kegelflächen mit Spitzen $\pm \mathbf{v}$ genau dann, wenn die Fußpunktkurve $\mathbf{l}(s)$ von \mathbf{v} auf die Schmiegeebene $\sigma(s)$ eine Kurve auf einer Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung \mathbf{o} , oder ein konstanter Punkt $\mathbf{l}(s) = \text{konst.}$ ist.*

2.2.4 Charakterisierung eines $(\mathbf{c}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ -Tripels

Die Voraussetzung $\mathbf{l} = \text{konst.}$ lieferte bisher ebene Kurven. Ein $(\mathbf{c}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ -Tripel mit dieser Eigenschaft beinhaltet eine ebene Kurve \mathbf{c} . Die Kegelspitzen sind hier symmetrisch zur Ebene, in der die Kurve liegt, oder liegen sogar darin.

Daher werden von nun an Raumkurven $\mathbf{c} \in C^3$, die nicht in einer Ebene liegen, ohne Wendepunkte betrachtet. Kurz gesagt: \mathbf{c} sei eine Frenetkurve.

Die Fußpunktkurve $\mathbf{l}(s)$ verläuft also auf einer Kugel S mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt \mathbf{o} , wobei \mathbf{o} der Mittelpunkt der beiden Kegelspitzen $\mathbf{v}_{1,2} = \pm \mathbf{v}$ ist.

Die Schmiegeebenen $\sigma(s)$ der Kurve $\mathbf{c}(s)$ sind stets orthogonal zu den Verbindungsgerade von \mathbf{v}_1 und $\mathbf{l}(s)$ und gehen durch $\mathbf{l}(s)$. Da $\mathbf{l}(s)$ auf einer Kugel verläuft, folgt nach Satz 1.29 bzw. Satz 1.41, dass die Schmiegeebenen ein Drehellipsoid oder ein zweisechaliges Drehhyperboloid überstreichen. Die Brennpunkte dieser Quadriken sind $\mathbf{v}_{1,2}$. Welche Drehquadrik auftritt, ist vom Radius r der Kugel abhängig. Ist $r > \|\mathbf{v}\|$, ist es ein Drehellipsoid, ist $r < \|\mathbf{v}\|$, so ist es ein Drehhyperboloid.

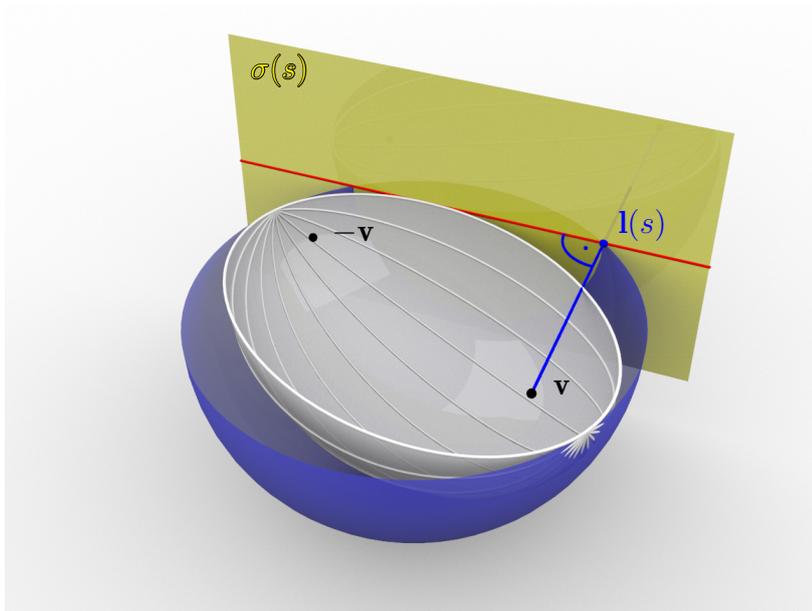


Abbildung 2.6: Die Fußpunktkurve $\mathbf{l}(s)$ liegt auf einer Kugel, mit Mittelpunkt im Ursprung. Die Schmiegeebene $\sigma(s)$ ist daher Tangentialebene an eine Drehquadrik mit Brennpunkten $\pm \mathbf{v}$, deren Scheitel auf der Kugel liegen.

Betrachtet man andererseits eine beliebige Raumkurve $\mathbf{c}(s)$, deren Schmiegeebenen eine der eben angeführten Drehquadriken mit Brennpunkten $\mathbf{v}_{1,2}$ berühren, dann reicht die Tangente $t(s) = \mathbf{c}(s) + \text{span}(\mathbf{c}'(s))$ aus, um zwei Ebenen $\tau_{1,2}(s)$, aufgespannt von $t(s)$ und $\mathbf{v}_{1,2}$, zu definieren. Die Ebenen $\tau_{1,2}(s)$ liegen dann symmetrisch zur Schmiegeebene $\sigma(s)$ von \mathbf{c} . Damit ist auch dieses Tripel für ein Origami mit einem Kegelpaar geeignet.

Der Fall, dass $\mathbf{v}_{1,2}$ auf der Kugel S liegen ist nicht möglich. Schneidet man die beteiligten geometrischen Objekte mit einer Ebene durch $\mathbf{v}_{1,2}$ und $\mathbf{l}(s)$, so folgt nach dem Satz von Thales, dass jede Schmiegeebene durch den Punkt \mathbf{v}_2 geht. Das bedeutet, dass \mathbf{c} eine ebene Kurve ist, was a priori ausgeschlossen wurde.

Aus diesen Erkenntnissen lässt sich also die folgende Charakterisierung eines $(\mathbf{c}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ -Tripels ableiten, die auch in [21] zu finden ist:

Satz 2.3. *Kurven $\mathbf{c}(s) \in C^3$ ohne Wendepunkte sind für ein Origami mit Kegelpaaren mit Spitzen $\mathbf{v}_{1,2} = \pm \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ genau dann geeignet, wenn einer der beiden folgenden Fälle erfüllt ist:*

- $\mathbf{c}(s)$ ist eine ebene Kurve in der Ebene σ^* . Die Spitzen $\mathbf{v}_{1,2}$ liegen entweder in σ^* , oder sind symmetrisch bezüglich σ^* .
- Die Schmiegeebenen $\sigma(s)$ von $\mathbf{c}(s)$ sind Tangentialebenen an eine Drehquadratik mit den Brennpunkten $\mathbf{v}_{1,2} \neq \mathbf{o}$.

2.3 Origami mit Kegel und Zylinder

Dieser Fall findet sich bisher nicht in der Literatur wieder - er soll hier untersucht werden:

Bei curved folding mit Kegel und Zylinder geht man wieder von der Schnittkurve beider Flächen aus. Wie vorher muss $\mathbf{c} \in C^3$ und frei von Wendepunkten sein, da dort die Schmiegeebene degeneriert und damit keine Aussagen mit den bisher hergeleiteten Hilfsmitteln möglich wäre. Die sich in \mathbf{c} treffenden Flächen seien in diesem speziellen Fall eine Kegelfläche Φ_1 und eine Zylinderfläche Φ_2 . In Def. 1.56 und 1.58 wurden diese durch eine Leitkurve und entweder eine Spitze, oder eine Erzeugendenrichtung festgelegt. In beiden Fällen genügt die Kurve \mathbf{c} als Leitkurve. Die Spitze \mathbf{v} des Kegels und die Kurve \mathbf{c} definieren somit die Kegelfläche Φ_1 . Die Zylinderfläche Φ_2 wird mit \mathbf{c} als Leitkurve und $\mathbf{e} \neq \mathbf{o}$ als Erzeugendenrichtung definiert. Damit in jedem Kurvenpunkt die Tangentialebenen an Φ_1 und Φ_2 gegeben bleiben, wird vorausgesetzt, dass der Tangentenvektor $\dot{\mathbf{c}}(s)$ stets linear unabhängig zu den Erzeugenden des Kegels und des Zylinders ist.

Die gegenseitige Lage der Flächen lässt sich aus der Kurve \mathbf{c} , der Kegelspitze \mathbf{v} und der Erzeugendenrichtung \mathbf{e} rekonstruieren. Wenn also diese eben angeführten Voraussetzungen gelten, so lässt sich die räumliche Konfiguration mit dem Tripel $(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{e})$ identifizieren. Man nennt dieses Tripel *Tripel für curved folding mit Kegel und Zylinder*, wenn es als Origami umsetzbar ist.

2.3.1 Der Lotfußpunkt der Kegelspitze auf der Schmiegeebene

Der Binormalenvektor $\mathbf{b}(s)$ von $\mathbf{c}(s)$ ist stets orthogonal zu $\sigma(s)$ und entspricht damit nach Bem. 1.3 immer der Richtung des Lots auf $\sigma(s)$. Will man die Kegelspitze \mathbf{v} an

$\sigma(s)$ spiegeln, so verfolgt man von \mathbf{v} aus das Lot, bis man den Lotfußpunkt $\mathbf{l}(s)$ auf $\sigma(s)$ erreicht. Anschließend legt man von dort dieselbe Distanz ein weiteres Mal zurück und erreicht damit den zu \mathbf{v} spiegelsymmetrisch gelegenen Punkt $\mathbf{w}(s)$.

Für den Lotfußpunkt \mathbf{l} gilt folgende Gleichung:

$$\mathbf{l}(s) = \mathbf{v} + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s). \quad (2.4)$$

Für die Kurve \mathbf{c} gibt es nun zwei Möglichkeiten:

Fall C: \mathbf{c} ist eine ebene Kurve.

Fall D: \mathbf{c} ist keine ebene Kurve.

2.3.2 Charakterisierung des Falls C

Die Tangentialebene $\tau_2(s)$ an den Zylinder wird sowohl von der Tangente $t(s)$ an die Kurve $\mathbf{c}(s)$ als auch von der konstanten Erzeugendenrichtung \mathbf{e} aufgespannt. Der Punkt $\mathbf{w}(s)$ liegt nun in jeder Tangentialebene $\tau_2(s)$ und ist fix, da sowohl \mathbf{v} als auch die Spiegelebene $\sigma^* := \sigma(s)$ fest bleiben. Damit wird beim Durchlaufen des Parameters s von den Tangentialebenen $\tau_2(s)$ nicht nur die Zylinderfläche Φ_2 sondern auch eine Kegelfläche überstrichen. Das ist nur dann möglich, wenn die Fläche in einer Ebene enthalten ist. Damit ist die Erzeugendenrichtung \mathbf{e} in σ^* enthalten. Aus Symmetriegründen ist dann auch die Kegelspitze \mathbf{v} in σ^* enthalten.

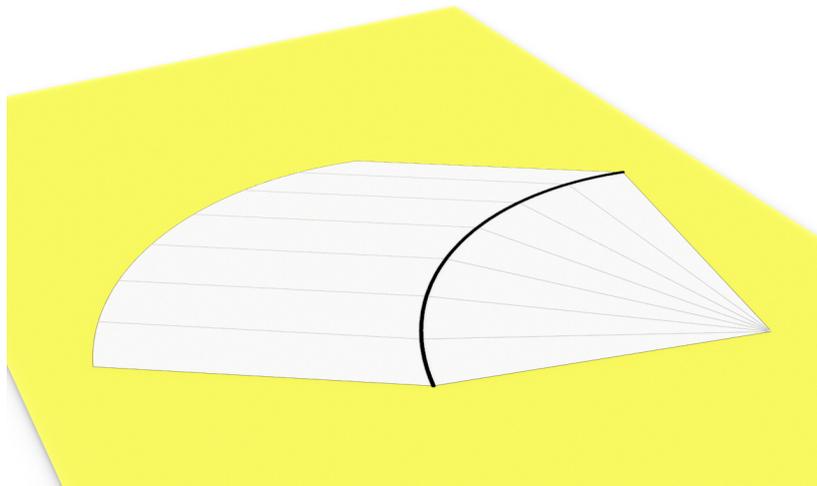


Abbildung 2.7: Triviales Origami mit Kegel und Zylinder. Beide Flächen liegen bereits in einer Ebene.

2.3.3 Charakterisierung des Falls D

Wird $\mathbf{l}(s)$ nach der Bogenlänge s abgeleitet, ergibt sich wieder, wie in Gleichung 2.2 des vorigen Abschnitts,

$$\mathbf{l}'(s) = \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \mathbf{b}(s) + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}'(s). \quad (2.5)$$

Vom Lotfußpunkt aus wird der Weg von \mathbf{v} nach $\mathbf{l}(s)$ nocheinmal zurückgelegt. Das liefert also die gespiegelte Spitze $\mathbf{w}(s)$, die durch

$$\mathbf{w}(s) = \mathbf{v} + 2 \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s)$$

mit bereits bekannten Vektoren darstellbar ist.

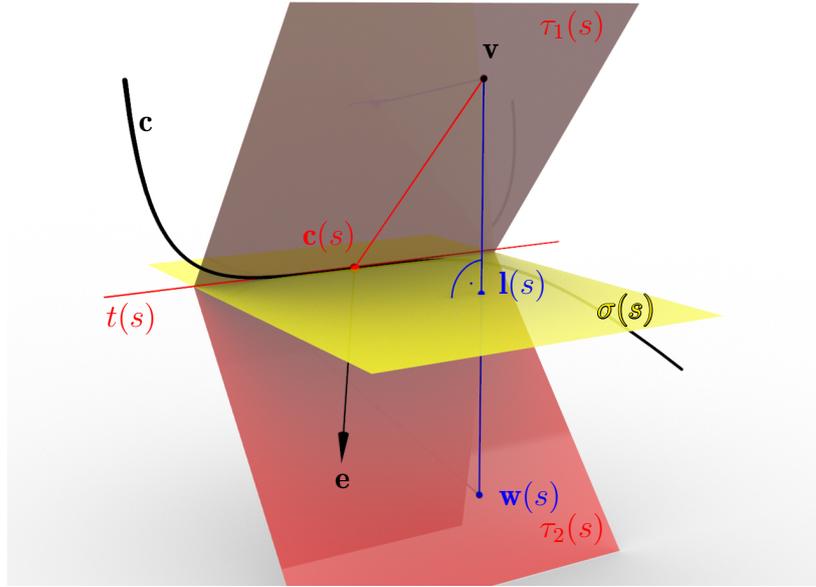


Abbildung 2.8: Der Lotfußpunkt $\mathbf{l}(s)$ der Kegelspitze \mathbf{v} auf $\sigma(s)$, sowie die an $\sigma(s)$ gespiegelte Spitze $\mathbf{w}(s)$.

Wegen der betragsmäßig gleichen geodätischen Krümmung von \mathbf{c} auf beiden Flächen $\Phi_{1,2}$ müssen für alle Werte $s \in I \subset \mathbb{R}$ die Tangentialebenen $\tau_1(s)$ an den Kegel Φ_1 und $\tau_2(s)$ an den Zylinder Φ_2 spiegelsymmetrisch bezüglich der Schmiegeebene $\sigma(s)$ von $\mathbf{c}(s)$ liegen. Das bedeutet für die gespiegelte Spitze $\mathbf{w}(s)$, dass sie in $\tau_2(s)$ liegen muss, da ihr Urbild \mathbf{v} in $\tau_1(s)$ liegt. In mathematischer Schreibweise bedeutet das also, dass $\mathbf{w}(s) - \mathbf{c}(s)$, \mathbf{e} und $\mathbf{t}(s)$ linear abhängig sind, siehe Abb. 2.8. Diese Aussage ist wegen $\mathbf{t}(s) \perp \mathbf{b}(s)$, $\mathbf{b}'(s)$ äquivalent zu

$$\det(\mathbf{w}(s) - \mathbf{c}(s), \mathbf{e}, \mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}'(s)) = 0, \forall s \in I \subset \mathbb{R}.$$

Die Berechnung dieser Determinante ist mithilfe des Spatprodukts möglich.

$$\det(\mathbf{w}(s) - \mathbf{c}(s), \mathbf{e}, \mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}'(s)) = \langle \mathbf{w}(s) - \mathbf{c}(s), \mathbf{e} \times (\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}'(s)) \rangle$$

Wird das Kreuzprodukt vermöge $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$ aufgelöst, so ergibt sich

$$0 = \langle \mathbf{w}(s) - \mathbf{c}(s), \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \mathbf{b}(s) - \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}'(s) \rangle$$

als Bedingung an das Origami. Setzt man nun $\mathbf{w}(s) = \mathbf{v} + 2 \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s)$ ein erhält die Gleichung die Form

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{v} + 2 \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s) - \mathbf{c}(s), \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \mathbf{b}(s) - \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle - \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad + 2 \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \\ &\quad - 2 \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad - \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle + \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle. \end{aligned}$$

Es gilt sowohl $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 1$, als auch $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle = 0$ nach Differentiation.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle - \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle + 2 \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad - \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle + \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{v} - \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle + \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad + 2 \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &= - \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle + \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &\quad + 2 \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}'(s) \rangle \end{aligned}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit $\mathbf{l}'(s) = \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}'(s) \rangle \mathbf{b}(s) + \langle \mathbf{c}(s) - \mathbf{v}, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}'(s)$ aus Gleichung 2.5, so ergibt sich

$$\langle \mathbf{l}'(s), \mathbf{e} \rangle = 0, \forall s \in I \subset \mathbb{R}.$$

Diese Gleichung bedeutet, dass der Lotfußpunkt $\mathbf{l}(s)$ stets konstant ist oder in einer Ebene mit Normalvektor \mathbf{e} liegt. Letzteres ist klar, weil nach Integration von $\langle \mathbf{l}'(s), \mathbf{e} \rangle = 0$ ersichtlich ist, dass jeder Lotfußpunkt die Ebenengleichung $\langle \mathbf{l}(s), \mathbf{e} \rangle = konst.$ erfüllt.

Ist $\mathbf{l}(s) = konst.$, so ist auch die Schmiegebene $\sigma^* := \sigma(s)$ von $\mathbf{c}(s)$ konstant und \mathbf{c} damit eine ebene Kurve. Ebene Kurven wurden bereits in Fall C betrachtet.

Aus dieser Beobachtung folgt, dass die Bedingung $\mathbf{l}(s) = konst.$ kein $(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{e})$ -Tripel liefert, das als Origami im eigentlichen Sinn realisierbar ist. Beide Flächen müssten in diesem Fall bereits in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Dieses Ergebnis lässt sich als Satz zusammenfassen:

Satz 2.4. *Eine Raumkurve $\mathbf{c}(s) \in C^3$ ohne Wendepunkte ist geeignet für Origami mit Kegel- und Zylinderflächen mit Kegelspitze \mathbf{v} und Zylindererzeugendenrichtung $\mathbf{e} \neq \mathbf{o}$ genau dann, wenn die Fußpunktkurve $\mathbf{l}(s)$ von \mathbf{v} auf die Schmiegebene $\sigma(s)$ in einer Ebene normal zu \mathbf{e} liegt.*

In diesem Satz findet sich auch der ebene Fall C wieder. Ist die Fußpunktkurve konstant, so erfüllt sie auch die Bedingung in einer Ebene normal auf \mathbf{e} zu liegen.

2.3.4 Charakterisierung eines $(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{e})$ -Tripels

Die Voraussetzung $\mathbf{l} = \text{konst.}$ im Fall C lieferte also ebenfalls eine ebene Kurve \mathbf{c} , die zugehörigen möglichen Kegel- und Zylinderflächen liegen alle in derselben Ebene. Damit folgt aus dieser Bedingung ein $(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{e})$ -Tripel, bei dem \mathbf{c} eine ebene Kurve ist, \mathbf{v} liegt in der fixen Schmiegeebene σ^* und die Richtung \mathbf{e} ist ebenfalls in σ^* enthalten.

Nachdem die ebenen Kurven behandelt und als trivialer Fall C erkannt wurden, werden nun dreimal stetig differenzierbare Raumkurven \mathbf{c} , die nicht in einer Ebene liegen und keine Wendepunkte besitzen, betrachtet. Diese genügen den Voraussetzungen für Frenetkurven.

Für die Frenetkurve \mathbf{c} liegt die Fußpunktkurve \mathbf{l} in einer Ebene ε normal zur Erzeugendenrichtung \mathbf{e} .

Die Schmiegeebenen $\sigma(s)$ sind für jeden zulässigen Parameter s orthogonal zur Verbindungsgerade von \mathbf{v} und $\mathbf{l}(s)$. Außerdem inzidieren $\mathbf{l}(s)$ und $\sigma(s)$ nach Konstruktion.

Der Fall, dass \mathbf{v} in ε liegt, tritt nicht auf: Angenommen es gilt $\mathbf{v} \in \varepsilon$, dann ist jede Schmiegeebene $\sigma(s)$ orthogonal zu ε . Die an $\sigma(s)$ gespiegelten Kegelspitzen $\mathbf{w}(s)$ liegen dann ebenfalls in ε . Die Tangentialebene $\tau_2(s)$ wird von der Erzeugendenrichtung \mathbf{e} und der Richtung $\mathbf{t}(s)$ der Tangente im Punkt $\mathbf{w}(s)$ aufgespannt. Da ε orthogonal zu \mathbf{e} ist, schneiden sich auch ε und $\tau_2(s)$ orthogonal. Aus Symmetriegründen ist dann auch die Tangentialebene $\tau_1(s)$ an den Kegel orthogonal zu ε . Die Tangentialebenen besitzen nun nach Konstruktion eine Schnittgerade. Diese ist genau die Tangente der Kurve \mathbf{c} an der Stelle s und diese muss, da sowohl $\tau_1(s)$, als auch $\tau_2(s)$ orthogonal zu ε sind, ebenfalls orthogonal darauf stehen. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass die Erzeugendenrichtung \mathbf{e} und die Tangentenrichtung $\mathbf{t}(s)$ für alle s linear unabhängig sind. Wenn diese zusammenfallen, ist die Tangentialebene an die Zylinderfläche nicht mehr definiert.

Daraus folgt, dass diese räumliche Konfiguration genau den Voraussetzungen, die für Satz 1.17 notwendig sind, entspricht. Der Brennpunkt des Drehparaboloids ist die Kegelspitze \mathbf{v} , die Achsenrichtung durch \mathbf{e} gegeben. Die Ebene ε ist die Scheiteltangentialebene des Drehparaboloids.

Betrachtet man eine Kurve $\mathbf{c}(s)$, deren Schmiegeebenen $\sigma(s)$ ein Drehparaboloid mit Brennpunkt \mathbf{v} und Achsenrichtung \mathbf{e} berühren, so lassen sich eine Kegelfläche mit Spitze \mathbf{v} und eine Zylinderfläche mit Erzeugendenrichtung \mathbf{e} konstruieren. Die Leitkurve ist in beiden Fällen die Kurve \mathbf{c} selbst. Die Tangentialebenen an diese Flächen erfüllen nach Konstruktion die Eigenschaft symmetrisch bezüglich $\sigma(s)$ zu liegen. Damit ist es möglich, diese räumliche Konfiguration als Origami zu verwirklichen.

Diese Aussagen lassen sich in folgendem Satz über die Charakterisierung von $(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{e})$ -Tripeln zusammenfassen:

Satz 2.5. *Kurven $\mathbf{c}(s) \in C^3$ ohne Wendepunkte sind für ein Origami mit Kegel mit Spitze \mathbf{v} und Zylinder mit Erzeugendenrichtung $\mathbf{e} \neq \mathbf{o}$ genau dann geeignet, wenn einer der beiden Fälle erfüllt ist:*

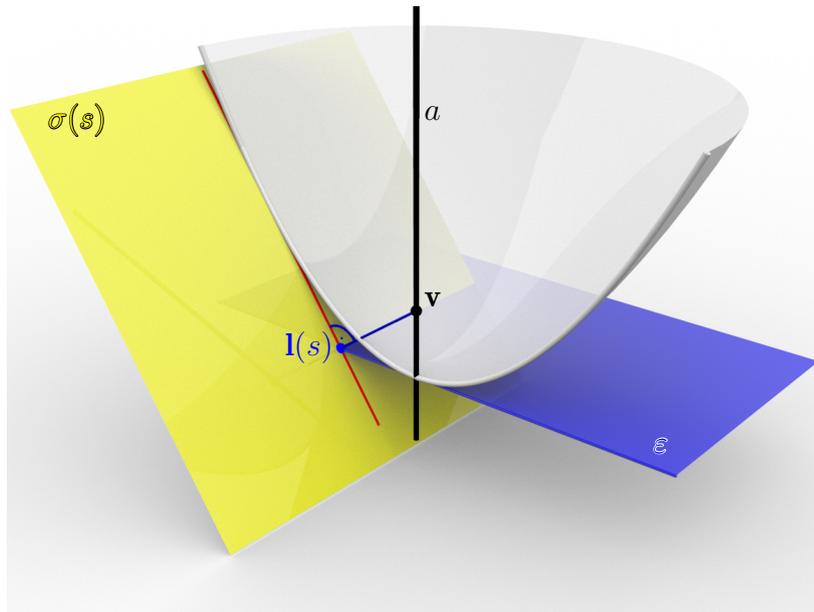


Abbildung 2.9: Die Fußpunktkurve $l(s)$ liegt in einer Ebene ε normal auf die Erzeugendenrichtung e . Die Schmiegeebene $\sigma(s)$ ist daher Tangentialebene an ein Drehparaboloid mit Brennpunkt v und Achsenrichtung e . Die Ebene ε ist dabei Scheiteltangentialebene dieses Paraboloids.

- $c(s)$ ist eine ebene Kurve in der Ebene σ^* . Die Kegelspitze v und die Erzeugendenrichtung e des Zylinders liegen beide in σ^* .
- Die Schmiegeebenen $\sigma(s)$ von $c(s)$ sind Tangentialebenen an ein Drehparaboloid mit Brennpunkt v und Achsenrichtung e .

2.4 Origami mit Zylinderpaaren

Sei $c \in C^3$ eine Raumkurve. Bei curved folding mit Zylinderpaaren sind die beiden abwickelbaren Flächen $\Phi_{1,2}$, die von c ausgehen, Zylinderflächen. In Def. 1.56 wird jede Zylinderfläche mithilfe einer Leitkurve, in diesem Fall c selbst und einer Erzeugendenrichtung, für $\Phi_{1,2}$ ist das $e_{1,2} \neq o$, beschrieben. O.B.d.A. seien beide Erzeugendenrichtungen normiert. Das Skalieren beider Richtungen ändert die Lage der Flächen nicht.

Damit die Überlegungen bezüglich der Lage der Tangentialebenen zur Schmiegeebene gelten, werden nun einige Notwendigkeiten vorausgesetzt:

Die Kurve c darf keine Wendepunkte besitzen, da an diesen Punkten die Schmiegeebene nicht definiert ist. Die Tangentialebenen an beide Zylinderflächen sollen ebenfalls in allen Punkten existieren. Das bedeutet, dass die Erzeugendenrichtungen $e_{1,2}$ nie mit dem Tangentenvektor von c zusammenfallen dürfen.

Zylinderflächen, die diese Eigenschaften besitzen, lassen sich mit der Vorgabe ihrer Leitkurve und Erzeugendenrichtungen eindeutig festlegen. Das Tripel $(\mathbf{c}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, das aus diesen Bestimmungsstücken besteht, heißt *Tripel für curved folding mit Zylinderpaaren*, wenn es als Origami umsetzbar ist. Mehr dazu ist in [19] und [20] zu finden.

Röschel findet in [19] und [20] einen anderen Zugang als den, der in dieser Arbeit verwendet wird. Trotzdem wird die Methode, die bisher verwendet wurde, erneut eingesetzt. Die Ergebnisse bleiben hierbei allerdings dieselben. Die Idee eine Kegelspitze an der Schmiegeebene zu spiegeln, bzw ihren Lotfußpunkt darauf zu finden ist in diesem Fall nicht mehr möglich, da es nur noch Erzeugendenrichtungen zur Auswahl gibt. Wenn man stattdessen eine Erzeugendenrichtung spiegelt, dann ist es trotzdem möglich, Aussagen daraus zu gewinnen.

2.4.1 Die an der Schmiegeebene gespiegelte Erzeugendenrichtung

Da die Schmiegeebene eine zentrale Rolle einnimmt, wird diese erneut durch eine Gleichung dargestellt, die den Binormalenvektor des begleitenden Dreibeins enthält. Die hier verwendete Gleichung ist Bem. 1.3 zu entnehmen:

$$\sigma(s) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{p} - \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0 \}$$

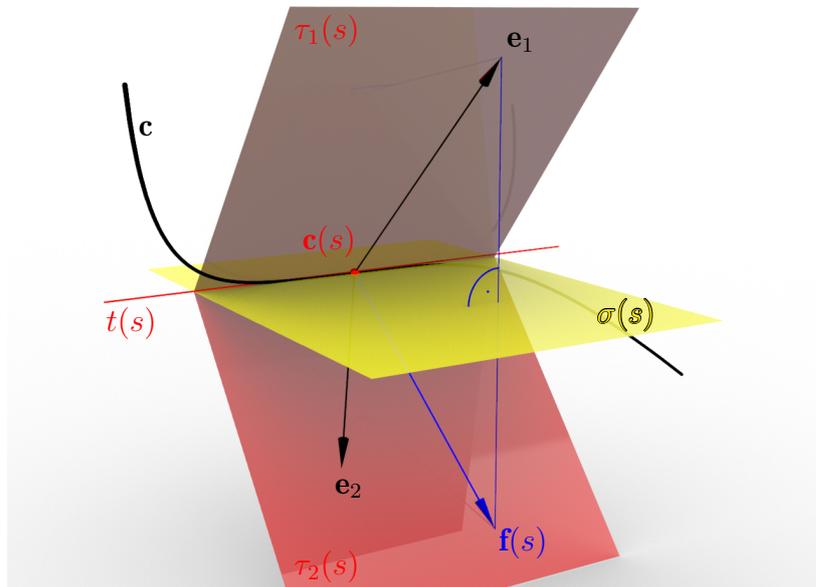


Abbildung 2.10: Die an der Schmiegeebene $\sigma(s)$ gespiegelte Erzeugendenrichtung $\mathbf{f}(s)$.

Spiegelt man die Erzeugendenrichtung \mathbf{e}_1 an der Schmiegeebene σ , siehe Abb. 2.10, erhält man die Richtung

$$\mathbf{f}(s) = \mathbf{e}_1 - 2 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s). \quad (2.6)$$

Für die Kurve gibt es nun zwei Möglichkeiten:

Fall E: \mathbf{c} ist eine ebene Kurve.

Fall F: \mathbf{c} ist keine ebene Kurve.

2.4.2 Charakterisierung des Falls E

Ist die Kurve \mathbf{c} eben, dann ist auch ihre Schmiegeebene $\sigma^* := \sigma(s)$ konstant und entspricht der Ebene in der die Kurve verläuft. Die Tangentialebenen $\tau_{1,2}(s)$ werden von der Tangente an die Kurve und von der jeweiligen Erzeugendenrichtung aufgespannt.

Liegt beispielsweise die Richtung \mathbf{e}_1 in σ^* , so muss aufgrund der Symmetrie von $\tau_{1,2}(s)$ auch \mathbf{e}_2 in σ^* liegen. Damit handelt es sich hierbei um den trivialen Fall, dass bereits beide Zylinderflächen in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Liegt eine der beiden Erzeugendenrichtungen außerhalb von σ^* , o.B.d.A. sei es \mathbf{e}_1 , dann liegt die gespiegelte Richtung $\mathbf{f}(s)$ in allen Tangentialebenen $\tau_2(s)$ an den Zylinder mit Erzeugendenrichtung \mathbf{e}_2 . Die Tangente an die Kurve, sowie die Erzeugendenrichtung spannen $\tau_2(s)$ auf.

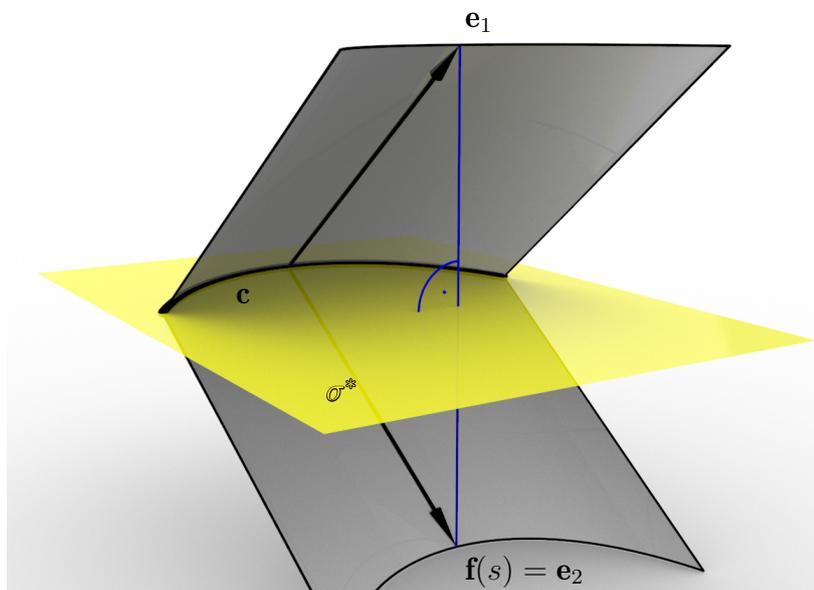


Abbildung 2.11: Trivialer Fall eines Origamis mit zwei spiegelsymmetrischen Zylindern. Die Schmiegeebene σ^* ist fix und damit \mathbf{c} eine ebene Kurve.

Angenommen $\mathbf{f}(s) \not\parallel \mathbf{e}_2$, dann spannen diese beiden Richtungsvektoren die Tangentialebene $\tau_2(s)$ zu jedem Wert von s auf. Die Tangentialebenen $\tau_2(s)$ sind somit stets parallele Ebenen. Damit müssen die Tangenten, die sowohl in σ^* , als auch in $\tau_2(s)$

liegen, ebenfalls parallel sein. Das Falten entlang von Geraden wurde aber ausgeschlossen.

Damit bleibt für ebene Kurven nur $\mathbf{f}(s) \parallel \mathbf{e}_2$ übrig, was bedeutet, dass die Erzeugenden $\mathbf{e}_{1,2}$ spiegelsymmetrisch bezüglich der Ebene, in der die Kurve verläuft, liegen.

2.4.3 Charakterisierung des Falls F

Die gespiegelte Erzeugendenrichtung aus Gleichung 2.6 muss nun, da die Tangentialebenen $\tau_{1,2}(s)$ symmetrisch bezüglich $\sigma(s)$ liegen, in $\tau_2(s)$ enthalten sein. Diese Bedingung lässt sich durch die lineare Abhängigkeit von $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{f}(s), \mathbf{t}(s)\}$ ausdrücken, was für die Determinante der drei Vektoren $\det(\mathbf{e}_2, \mathbf{f}(s), \mathbf{t}(s)) = 0$ bedeutet. Aus der Darstellung von $\mathbf{f}(s)$ in Gleichung 2.6 folgt daher

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{f}(s) \times \mathbf{t}(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_2, (\mathbf{e}_1 - 2 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s)) \times \mathbf{t}(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{t}(s) - 2 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s) \rangle. \end{aligned}$$

Wird an dieser Stelle $\mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s) = \mathbf{h}(s)$ und $\mathbf{t}(s) = \mathbf{h}(s) \times \mathbf{b}(s)$ angewandt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{h}(s) \times \mathbf{b}(s)) - 2 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{h}(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_2, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{h}(s) - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{h}(s) \rangle \mathbf{b}(s) - 2 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{h}(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_2, \langle -\mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{h}(s) - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{h}(s) \rangle \mathbf{b}(s) \rangle \\ &= -(\langle \mathbf{e}_2, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{h}(s) + \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{h}(s) \rangle \mathbf{b}(s) \rangle). \end{aligned}$$

An dieser Stelle bedarf es einer kleinen Zwischenrechnung. Es wird $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s)$ nach der Bogenlänge abgeleitet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s) &= \langle \mathbf{e}_1, -\tau(s) \mathbf{h}(s) \rangle \mathbf{b}(s) - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \tau(s) \mathbf{h}(s) \\ &= -\tau(s) (\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{h}(s) \rangle \mathbf{b}(s) + \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{h}(s)) \end{aligned}$$

Da die Kurve \mathbf{c} nicht eben ist, gilt für ihre Torsion $\tau(s) \neq 0$ überall. Damit kann diese Ableitung in die Rechnung eingesetzt werden. Das ergibt

$$\frac{1}{\tau(s)} \left\langle \mathbf{e}_2, \frac{d}{ds} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s) \right\rangle = 0.$$

Für die Torsion gilt $\tau(s) \neq 0$ für alle Werte von s . Deshalb muss der rechte Faktor dieses Produkts 0 sein. Integration des Skalarprodukts liefert somit

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}(s) \rangle \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{b}(s) \rangle = \textit{konst.}$$

Sei c die Konstante auf der rechten Seite der Gleichung und \mathbf{x} , \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 Vektoren, die diese Gleichung vermöge ihrer Koordinatendarstellung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{1,1} \\ e_{1,2} \\ e_{1,3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} e_{2,1} \\ e_{2,2} \\ e_{2,3} \end{pmatrix}$$

erfüllen. Dann erfüllen sie damit eine homogene Gleichung [17][18], wie im Folgenden gezeigt wird:

$$c(x^2 + y^2 + z^2) = x^2 e_{1,1} e_{2,1} + y^2 e_{1,2} e_{2,2} + z^2 e_{1,3} e_{2,3} + 2xy(e_{1,1} e_{2,2} + e_{1,2} e_{2,1}) \\ + 2xz(e_{1,1} e_{2,3} + e_{1,3} e_{2,1}) + 2yz(e_{1,2} e_{2,3} + e_{1,3} e_{2,2})$$

Diese Gleichung lässt sich in Matrixschreibweise als $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0$ mit

$$M = \begin{pmatrix} e_{1,1} e_{2,1} - c & \frac{e_{1,1} e_{2,2} + e_{1,2} e_{2,1}}{2} & \frac{e_{1,1} e_{2,3} + e_{1,3} e_{2,1}}{2} \\ \frac{e_{1,1} e_{2,2} + e_{1,2} e_{2,1}}{2} & e_{1,2} e_{2,2} - c & \frac{e_{1,2} e_{2,3} + e_{1,3} e_{2,2}}{2} \\ \frac{e_{1,1} e_{2,3} + e_{1,3} e_{2,1}}{2} & \frac{e_{1,2} e_{2,3} + e_{1,3} e_{2,2}}{2} & e_{1,3} e_{2,3} - c \end{pmatrix}$$

darstellen. M ist nun eine symmetrische Matrix, womit diese homogene Gleichung klarer ersichtlich ist. Diese homogene Gleichung ist die Gleichung eines quadratischen Kegels Γ mit der Spitze im Ursprung - siehe [17][18].

Die Binormalenvektoren $\mathbf{b}(s)$ erfüllen nun alle die Gleichung dieses Kegels, da sie normiert sind. Daraus folgt, dass die Kurve $\mathbf{c}(s)$ beim Durchlaufen des Parameters nur Binormalenvektoren besitzt, die Erzeugendenrichtungen des Richtkegels Γ sind.

Für die Schmiegebene $\sigma(s)$, die stets orthogonal zu $\mathbf{b}(s)$ sind, folgt nun wegen [17] und [18], dass sie parallel zu den Tangentialebenen des Normalenkegels Γ^n von Γ sind. Ein Beispiel eines Normalenkegels ist in Abb. 2.12 zu sehen.

Dieses Ergebnis ist eine äquivalente Bedingung an Origami mit Paaren von Zylindern, als die von Röschel in [19] und [20] entdeckte Charakterisierung. Dieses Ergebnis lässt sich als Satz zusammenfassen:

Satz 2.6. *Eine Raumkurve $\mathbf{c}(s) \in C^3$ ohne Wendepunkte ist für Origami mit Paaren von Zylindern mit Erzeugendenrichtungen $\mathbf{e}_{1,2} \neq \mathbf{o}$ genau dann geeignet, wenn die Schmiegeebenen parallel zu den Berührebenen eines quadratischen Kegels Γ^n sind. Γ^n ist der Normalenkegel eines quadratischen Kegels, der die Gleichung $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle = \text{konst.}$ erfüllt.*

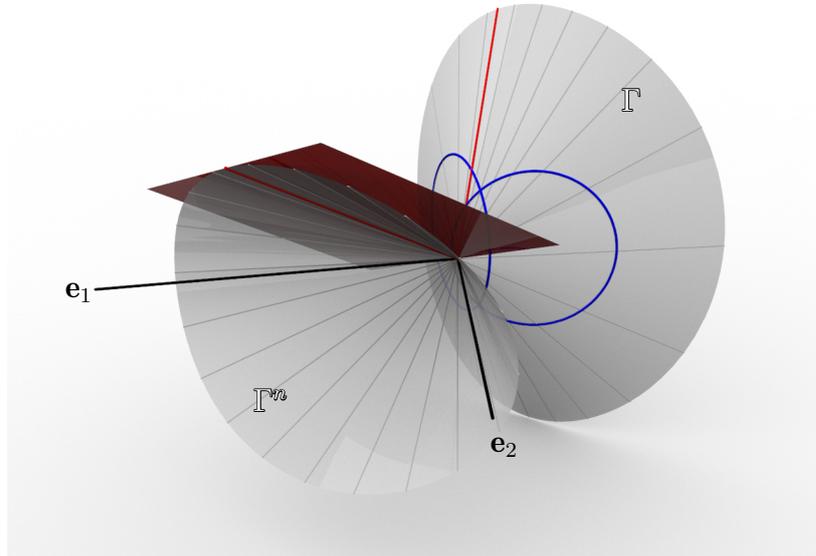


Abbildung 2.12: Kegel Γ mit Kreisschnitten, sowie sein Normalenkegel Γ^n mit zwei Fokalstrahlen $\mathbf{e}_{1,2}$. Sowohl eine Erzeugende von Γ^n , sowie die darauf normal stehende Tangentialebene an Γ^n sind in rot eingezeichnet.

2.4.4 Charakterisierung eines $(\mathbf{c}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ -Tripels

Wird $\mathbf{c} \subset \sigma^*$ als ebene Kurve angenommen, so liegen entweder auch beide Zylinder und deren Erzeugendenrichtungen $\mathbf{e}_{1,2}$ zur Gänze in der Ebene σ^* , oder spiegelsymmetrisch bezüglich σ^* . Es ist klar, dass nur diese beiden Fälle für $(\mathbf{c}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ -Tripel mit einer ebenen Kurve in Frage kommen, da aufgrund der Symmetrie der Tangentialebenen an die Zylinder keine anderen Lagen der Erzeugenden möglich sind.

Die verbleibende Möglichkeit ist, dass $\mathbf{c}(s)$ keine ebene Kurve ist. Sie soll keine Wendepunkte besitzen und dreimal stetig differenzierbar sein. \mathbf{c} ist damit eine Frenetkurve. In diesem Fall wurde festgestellt, dass die Binormalenvektoren $\mathbf{b}(s)$ Erzeugendenrichtungen eines quadratischen Kegels Γ sind. Die Schmiegeebenen $\sigma(s)$ der Kurve $\mathbf{c}(s)$ sind damit auch parallel zu den Berührebenen des Normalenkegels Γ^n von Γ .

Die zu $\sigma(s)$ parallelen Tangentialebenen sind für jeden Wert von s durch $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}(s) \rangle = 0$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ dargestellt. Das ist eine einparametrische Ebenenschar, die eine Kegelfläche überstreicht. Die Erzeugenden dieser Fläche lassen sich nach Satz 1.63 berechnen. Dafür müssen die Gleichungen

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}(s) \rangle = 0 \text{ und } \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}(s) \rangle' = 0$$

gleichzeitig gelöst werden. Die Ableitung $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}(s) \rangle' = \langle \mathbf{x}, -\tau(s)\mathbf{h}(s) \rangle$, liefert als zweite Gleichung $\langle \mathbf{x}, \mathbf{h}(s) \rangle = 0$, da $\tau(s) \neq 0$ ist. Beide Gleichungen verlangen zum gleichzeitigen Lösen eine Erzeugendenrichtung die orthogonal zu $\mathbf{b}(s)$, sowie zu $\mathbf{h}(s)$ ist. Nur $\pm \mathbf{t}(s)$ kommt dafür in Frage.

Damit gilt auch für die Tangentenvektoren $\mathbf{t}(s)$ der Kurve $\mathbf{c}(s)$, dass sie den Erzeugendenrichtungen eines quadratischen Kegels Γ^n entsprechen.

Die Erzeugendenrichtungen $\mathbf{e}_{1,2}$ der Zylinderflächen sind zwar in der Rechnung vorgekommen, dennoch ist deren geometrische Bedeutung in der Gleichung nicht sofort, wie in [19] und [20], ersichtlich. Der folgende Satz liefert eine geometrische Interpretation von \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 :

Satz 2.7. *Sei ein Kegel Γ durch die Gleichung $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle = \text{konst.}$ gegeben. Die Erzeugendenrichtungen $\mathbf{e}_{1,2} \neq \mathbf{o}$ sind Fokalstrahlen des Normalenkegels Γ^n des Kegels Γ .*

Beweis. Wie in [17] und [18] nachzulesen ist, stehen die Kreisschnittebenen und damit im Besonderen auch die zyklischen Ebenen eines quadratischen Kegels Γ normal auf die Brennstrahlen des Normalenkegels Γ^n , siehe Abb. 2.12.

Die Richtungen $\mathbf{e}_{1,2}$ sind Fokalstrahlen des Normalenkegels Γ^n genau dann, wenn die Kreisschnittebenen von Γ normal zu $\mathbf{e}_{1,2}$ sind. Das bedeutet für die zyklischen Ebenen von Γ , dass sie in diesem Fall auch die Gleichung $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$, bzw. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$ besitzen müssen.

Aus dieser speziellen Lage der zyklischen Ebenen folgt, dass die Geraden im Schnitt von $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0$ und $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$, sowie von $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0$ und $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$ jeweils Paare isotroper Erzeugender des Kegels Γ sein müssen.

Durch Einsetzen der Bedingung $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$ in

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{x} \rangle - c \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

folgt, dass $c \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Ist $c \neq 0$, dann erfüllen die Richtungen \mathbf{x} die Gleichung des isotropen Kegels.

Die analoge Behauptung folgt durch Einsetzen der Bedingung $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$ in $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0$.

Ist $c = 0$, dann folgt aus der Gleichung $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{x} \rangle = 0$, dass entweder $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x} \rangle = 0$, oder $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{x} \rangle = 0$ ist. Jeder dieser Fälle beschreibt eine Ebene durch den Ursprung, normal auf die Erzeugendenrichtung \mathbf{e}_1 bzw. \mathbf{e}_2 . Die Schmiegebenen $\sigma(s)$ sind orthogonal zum Binormalenvektor $\mathbf{b}(s)$, der in mindestens einer dieser Ebenen liegt. Damit liegt eine der beiden Erzeugendenrichtungen stets in $\sigma(s)$. Sobald eine der Erzeugendenrichtungen der Zylinderflächen in $\sigma(s)$ liegt, gilt dieselbe Aussage auch für die andere Erzeugendenrichtung. Genau diese Konstellation wurde aber bereits im ebenen Fall E behandelt. \square

Korollar 2.8. *Die Ebenen $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$ und $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$ sind die zyklischen Ebenen des quadratischen Kegels Γ . Ebenen parallel zu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$ und $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$ schneiden Γ entlang von Kreisen. Die Tangentialebenen des Normalenkegels Γ^n von Γ sind parallel zu den Schmiegebenen $\sigma(s)$ der Kurve $\mathbf{c}(s)$.*

Ein $(\mathbf{c}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ -Tripel, dessen Kurve $\mathbf{c}(s)$ Tangentenvektoren $\mathbf{t}(s)$ besitzt, die Erzeugendenrichtungen eines quadratischen Kegels mit Fokalstrahlen $\mathbf{e}_{1,2}$ sind, ist also ein Tripel, das für Origami mit Paaren von Zylindern geeignet ist. Aus diesen Bestimmungsstücken lassen sich damit auch Zylinderflächen rekonstruieren, die als Origami realisierbar sind. Andererseits gelten diese Bedingungen nach Konstruktion auch für Tripel die für Origami mit Zylinderpaaren geeignet sind. Für eben diese wurden die Bedingungen in erster Linie bewiesen.

Mit diesen Ergebnissen ist es möglich eine Charakterisierung von $(\mathbf{c}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ -Tripeln, die als Origami von Paaren von Zylindern verwirklichtbar sind, zu formulieren. Dieses Ergebnis deckt sich mit der Charakterisierung in [19] und [20] von Röschel.

Satz 2.9. *Raumkurven $\mathbf{c}(s) \in C^3$ ohne Wendepunkte sind für Origami mit Zylinderpaaren mit Erzeugendenrichtungen $\mathbf{e}_{1,2} \neq \mathbf{o}$ genau dann geeignet, wenn einer der beiden Fälle erfüllt ist:*

- *$\mathbf{c}(s)$ ist eine ebene Kurve in der Ebene σ^* . Die Erzeugendenrichtungen $\mathbf{e}_{1,2}$ liegen entweder in σ^* , oder sie sind symmetrisch bezüglich σ^* .*
- *Die Tangentenvektoren $\mathbf{t}(s)$ von $\mathbf{c}(s)$ sind Erzeugendenrichtungen eines quadratischen Kegels mit Fokalstrahlen $\mathbf{e}_{1,2} \neq \mathbf{o}$.*

3 Konstruktion von Tripeln für Origami mit Kegel- und Zylinderflächen

Es wurden also charakteristische Eigenschaften von Raumkurven erkannt, ohne die ein Origami mit Kegeln und Zylindern nicht möglich ist. Konstruiert man nun Kurven, die in Kombination mit Kegelspitzen bzw. Erzeugendenrichtungen die Bedingungen eines Tripels für Origami erfüllen, so gibt es für diese eine Konstellation im Raum, sowie eine Verebnung, die durch Isometrien ineinander übergehen. φ_1 und φ_2 sind jene Isometrien, die jeweils eine der beiden an der Raumkurve \mathbf{c} hängenden Flächen in die Ebene abwickeln. Die Frage, ob es eine stetige Folge von Positionen im Raum gibt, die von den Flächen im Zuge der Abwicklung durchlaufen werden, wird in dieser Arbeit nicht behandelt. Es ist aber klar, dass Selbstdurchdringungen beim Falten durchaus zum Problem werden können. Als Beispiel für ein möglicherweise auftretendes Problem dient schon allein die Verebnung eines Kegels mit einer Spirale als Leitkurve: Wickelt man diesen Kegel ab, beginnt er nach einer gewissen Länge der Basiskurve sich selbst zu überlappen. Mehr zu Selbstdurchdringungen ist auch in [20] und [21] zu finden.

Für einige Beispiele von Kegel-, oder Zylinderpaaren sei auf [19], [20] und [21] verwiesen. Beispiele für $(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{e})$ -Tripel sind dort nicht zu finden, daher werden diese in diesem Abschnitt behandelt.

Sind eine Kegelspitze \mathbf{v} und eine Erzeugendenrichtung \mathbf{e} gegeben, lässt sich daraus ein Drehparaboloid Φ konstruieren. Der Brennpunkt ist dabei \mathbf{v} und die Achsenrichtung \mathbf{e} . Eine Kurve $\mathbf{d}(s)$ auf der Drehquadrik Φ liefert in jeder Stelle eine Tangentialebene $\tau(s)$. Die Gratlinie \mathbf{c} dieser einparametrischen Ebenenschar ist ein Bestimmungsstück des Origamitripels $(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{e})$. Um die Gratlinie bestimmen zu können, muss $\mathbf{d}(s)$ eine C^2 Kurve sein, da der Kurvenpunkt in die Berechnung der Tangentialebene eingeht und diese zweimal abgeleitet werden muss.

3.1 Beispiele von $(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{e})$ -Tripeln

Zuallererst ist es notwendig, einen Punkt \mathbf{v} für die Kegelspitze und eine Richtung \mathbf{e} für den Zylinder zu wählen. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, die folgenden Vektoren zu wählen:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Spitze \mathbf{v} und Erzeugendenrichtung \mathbf{e} sind dabei so gewählt, dass die Koordinaten $(x, y, z)^T$ der Punkte des Drehparaboloid Φ , das \mathbf{v} als Brennpunkt und \mathbf{e} als Achsenrichtung besitzt, die Gleichung $x^2 + y^2 = z$ erfüllen.

Für Kurven $\mathbf{d}(t) \subset \Phi$ bedeutet das, dass ihre Koordinaten die Form $(x(t), y(t), z(t))^T$ besitzen, wobei die Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ die Gleichung des Paraboloids, also $z(t) = x(t)^2 + y(t)^2$, erfüllen müssen.

Um die Tangentialebenen $\tau(t)$ entlang der Kurven $\mathbf{d}(t)$ zu bestimmen, wird der Normalvektor $\mathbf{n}(t)$ auf $\Phi(x(t), y(t))$ bestimmt[7]. Von den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi(x(t), y(t))}{\partial x(t)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x(t) \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial \Phi(x(t), y(t))}{\partial y(t)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y(t) \end{pmatrix}$$

wird das Kreuzprodukt gebildet, was Normalvektoren

$$\tilde{\mathbf{n}}(t) = \begin{pmatrix} -2x(t) \\ -2y(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von t liefert. Die Änderung der Orientierung des Normalvektors einer Ebene ändert ihre Lage nicht. Damit ist die Schar der Tangentialebenen $\tau(t)$ zu $\mathbf{d}(t)$ durch die Gleichung

$$\tau(t) : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x(t) \\ 2y(t) \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x(t) \\ 2y(t) \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

gegeben. Um die Gratlinie $\mathbf{c}(t)$ dieser Torse zu bestimmen, müssen sowohl $\dot{\tau}(t)$, als auch $\ddot{\tau}(t)$ berechnet werden. Das Gleichungssystem $\tau(t) = \dot{\tau}(t) = \ddot{\tau}(t) = 0$ liefert nach Satz 1.64 die gesuchte Kurve \mathbf{c} für das $(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{e})$ -Tripel für Origami.

3.1.1 Ebene Schnitte

Die einfachste Variante Kurven auf dem Paraboloid Φ zu finden ist es Φ mit einer Ebene zu schneiden und die Schnittkurve zu betrachten. Der Schnitt mit einer auf die Leitebene orthogonalen Ebene besitzt, bis auf Rotationssymmetrie, die Form

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} t \\ a \\ t^2 + a^2 \end{pmatrix},$$

wobei a die Distanz der Ebene zur Achse beschreibt.

Setzt man die Koordinaten für $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ in die Gleichung von $\tau(t)$ ein ergibt sich für das Gleichungssystem $\tau(t) = \dot{\tau}(t) = \ddot{\tau}(t) = 0$ die Form

$$\begin{aligned} \tau(t) : \quad 2tx + 2ay - z - t^2 - a^2 &= 0 \\ \dot{\tau}(t) : \quad \quad \quad 2x - 2t &= 0 \\ \ddot{\tau}(s) : \quad \quad \quad -2 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung. Nur der zur Richtung $(0, 1, 2a)^T$ gehörende Fernpunkt $(0 : 0 : 1 : 2a)^T$ erfüllt nach Homogenisieren des Gleichungssystems alle drei Gleichungen.

Eine analoge Rechnung liefert als Schnitt einer Ebene der Form $z = ky + d$ die Ausgangskurve

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{d + \frac{k^2}{4}} \cos(t) \\ \sqrt{d + \frac{k^2}{4}} \sin(t) + \frac{k}{2} \\ k \left(\sqrt{d + \frac{k^2}{4}} \sin(t) + \frac{k}{2} \right) + d \end{pmatrix}.$$

Für die Werte von d und k , bei denen diese Kurve existiert, handelt es sich bei der Gratlinie der zugehörigen Torse um einen eigentlichen Punkt mit den Koordinaten $(0, \frac{1}{2}k, -\frac{1}{4}k^2 - d)^T$.

In diesen Fällen sind die zugehörigen Gratlinien keine Kurven. Sie degenerieren bei diesen beiden Varianten von ebenen Schnitten stets zu Punkten oder Richtungen. Alle anderen ebenen Schnitte lassen sich durch Rotation um die Achse von Φ aus diesen Beispielen gewinnen. Damit sind sämtliche Kurven auf dem Drehparaboloid, die als Schnitt mit Ebenen gewonnen werden¹, für die Konstruktion eines Tripels für Origami ungeeignet.

¹Ebenen normal zur Leitebene liefern Parabeln, alle anderen Ellipsen.

3.1.2 Beispiel 1

Wird die Parabel in der xy -Ebene, die durch die Gleichung $x^2 = y$ dargestellt wird, auf das Drehparaboloid Φ in Richtung der z -Achse projiziert, ergibt sich

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 + t^4 \end{pmatrix}$$

als Darstellung einer möglichen Ausgangskurve auf Φ .

Das Gleichungssystem, das die Gratlinie $\mathbf{c}(t)$ als Lösung besitzen soll, hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \tau(t) : \quad 2tx + 2t^2y - z - t^2 - t^4 &= 0 \\ \dot{\tau}(t) : \quad x + 2ty - t - 2t^3 &= 0 \\ \ddot{\tau}(t) : \quad 2y - 1 - 6t^2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Kurve

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} -4t^3 \\ 3t^2 + \frac{1}{2} \\ -3t^4 \end{pmatrix}$$

ist die Lösung dieses Gleichungssystems.

Die Punkte von \mathbf{c} entstehen im Schnitt der drei *benachbarten* Tangentialebenen τ , $\dot{\tau}$, $\ddot{\tau}$ von Φ . Es handelt sich daher um die Pole der Schmiegeebenen von \mathbf{d} bezüglich Φ . Die Spitzen auf \mathbf{c} rühren von jenen Punkten auf \mathbf{d} her, in denen die Schmiegeebene von \mathbf{d} stationär ist. Diese Punkte werden oft als Henkelpunkte von \mathbf{d} bezeichnet.

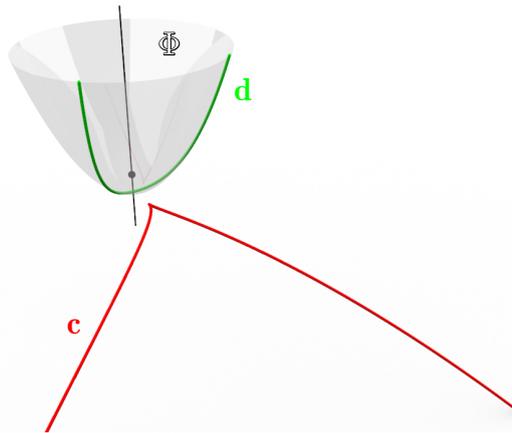


Abbildung 3.1: Die Parallelprojektion einer Parabel auf das Drehparaboloid Φ liefert die Kurve \mathbf{d} . Die Kurve \mathbf{c} ist die Gratlinie jener Fläche, die von den Tangentialebenen an Φ entlang von \mathbf{d} eingehüllt wird.

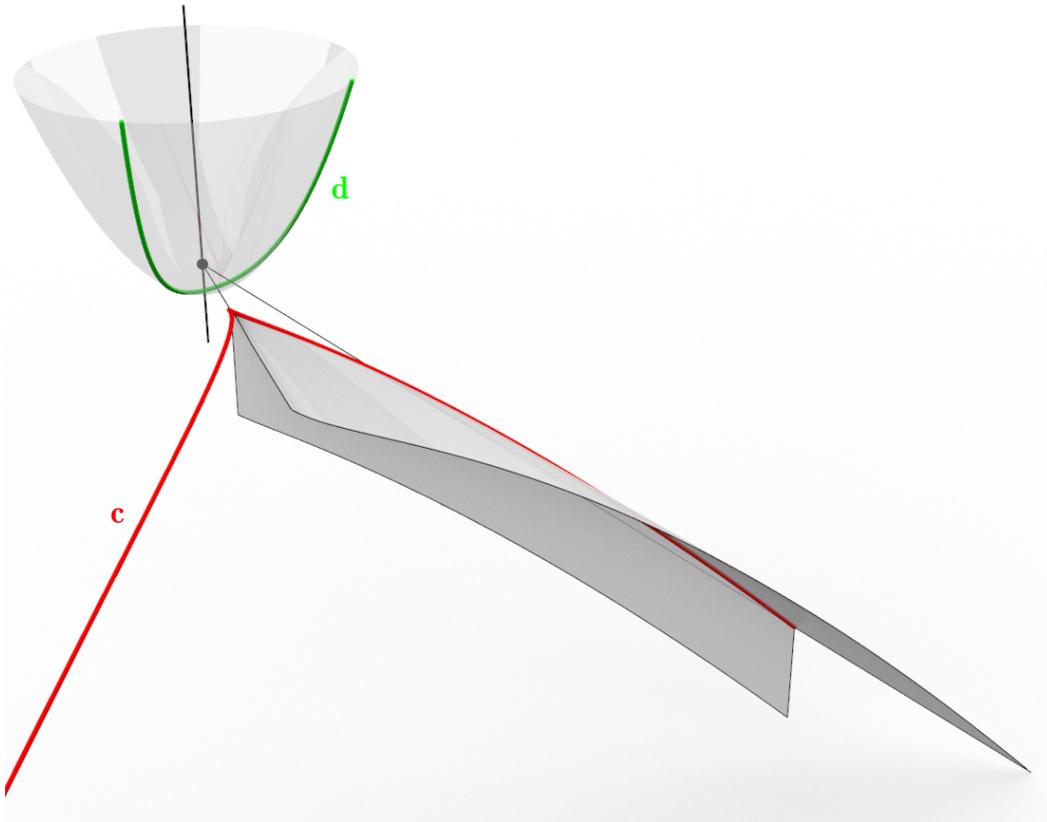


Abbildung 3.2: Ein Origami, bestehend aus einer Kegel- und einer Zylinderfläche, das zu einem Ast von c aus Abb. 3.1 gehört.

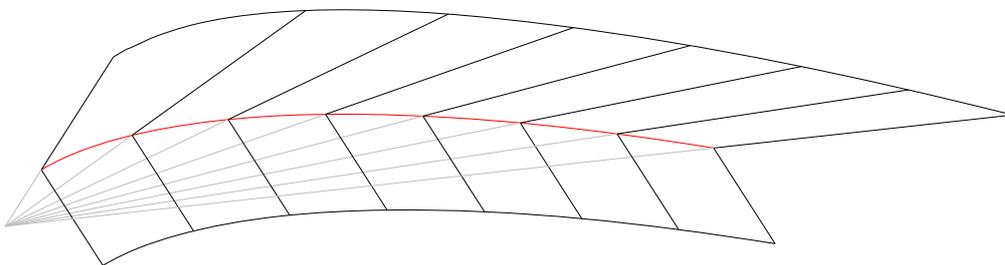


Abbildung 3.3: Verebnetes Origami aus Abb. 3.2.

3.1.3 Beispiel 2

Wird die Ellipse in der xy -Ebene mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ auf das Drehparaboloid Φ in Richtung der z -Achse projiziert, ergibt sich die Kurve

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \\ a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t) \end{pmatrix},$$

die zur Gänze in Φ liegt. Außerdem muss $a > b > 0$ gelten, da sonst eine ebene Kurve auftritt.

Das Gleichungssystem, das gelöst werden muss, um die gesuchte Gratlinie zu ermitteln besitzt die Form

$$\begin{aligned} \tau(t) : \quad & 2a \cos(t)x + 2b \sin(t)y - z - a^2 \cos^2(t) - b^2 \sin^2(t) &= 0 \\ \dot{\tau}(t) : \quad & -2a \sin(t)x + 2b \cos(t)y + (2a^2 - 2b^2) \cos(t) \sin(t) &= 0 \\ \ddot{\tau}(t) : \quad & -2a \cos(t)x - 2b \sin(t)y - 4(a^2 - b^2) \sin^2(t) + 2a^2 - 2b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Die zugehörige Gratlinie ist damit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{(a^2 - b^2) \cos^3(t)}{a} \\ -\frac{(a^2 - b^2) \sin^3(t)}{b} \\ -3(a^2 - b^2) \sin^2(t) + a^2 - 2b^2 \end{pmatrix}.$$

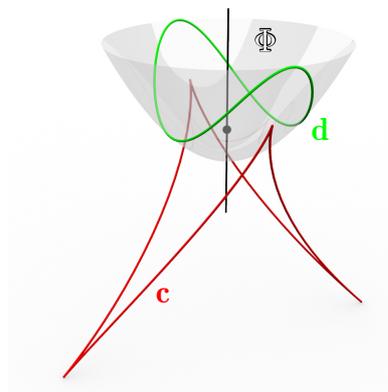


Abbildung 3.4: Die Kurve \mathbf{d} entsteht durch Parallelprojektion der Ellipse aus Bsp. 2 mit $a = 1$ und $b = 0.5$ auf das Drehparaboloid Φ . \mathbf{c} ist die zugehörige Gratlinie.

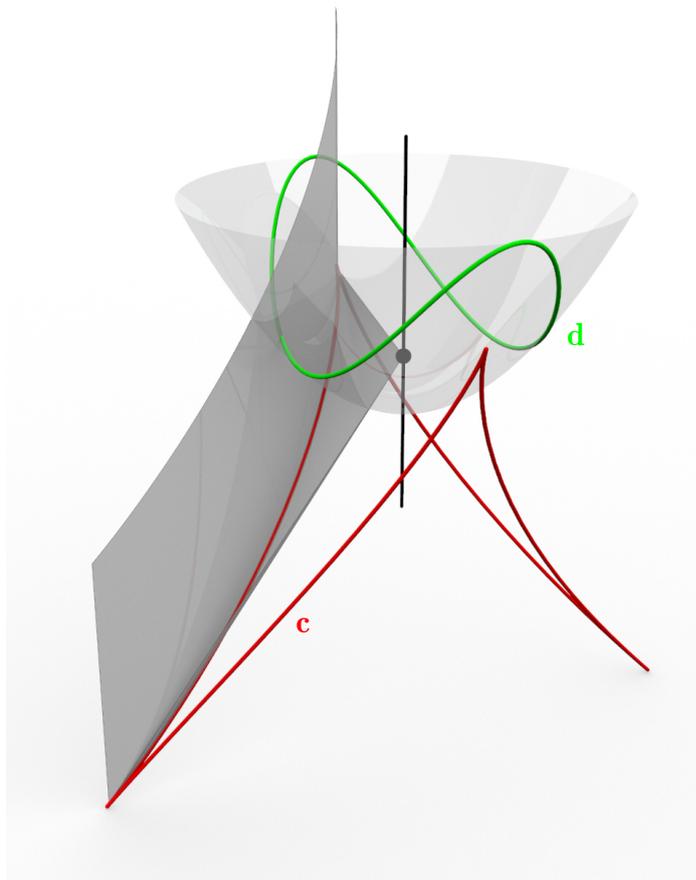


Abbildung 3.5: Aus einem Stück der Kurve c aus Abb. 3.4, sowie den zugehörigen Bestimmungsstücken des Origamitripels können Kegel- und eine Zylinderflächen rekonstruiert werden.

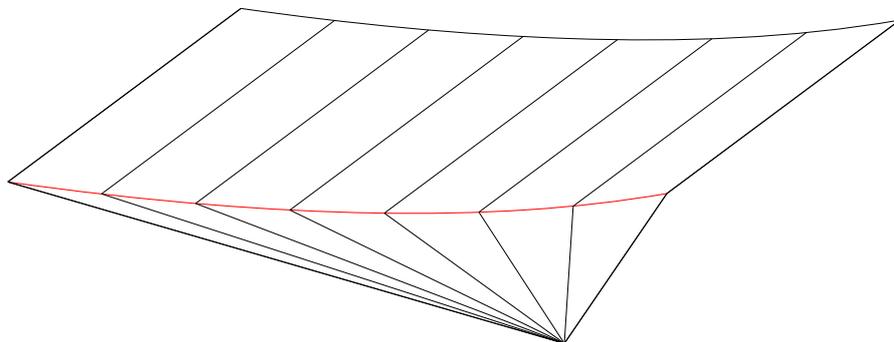


Abbildung 3.6: Verebnetes Origami aus Abb. 3.5.

3.1.4 Beispiel 3

Eine parabolische Spirale wird von der xy -Ebene in Richtung der z -Achse auf das Drehparaboloid Φ projiziert. Dadurch entsteht die Kurve

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} a\sqrt{t} \cos(t) \\ a\sqrt{t} \sin(t) \\ a^2 t \end{pmatrix},$$

mit $a \neq 0$, die auf dem Drehparaboloid Φ liegt.

Die Tangentialebenen $\tau(t)$, die vom Parameter t abhängen, erfüllen die Gleichung

$$\tau(t) : 2a\sqrt{t} \cos(t)x + 2a\sqrt{t} \sin(t)y - z - a^2 t = 0.$$

Analog zu den Rechnungen in den vorhergehenden Beispielen lässt sich auch für diese einparametrische Schar von Ebenen die zugehörige Gratlinie $\mathbf{c}(t)$ ermitteln. Für diese Kurve gilt:

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4at \cos(t) - (4at^2 + a) \sin(t)}{2(4t^2 + 3)\sqrt{t}} \\ \frac{(4at \sin(t) + (4at^2 + a) \cos(t))\sqrt{t}}{2(4t^3 + 3t)} \\ -\frac{4a^2 t^3 - a^2 t}{4t^2 + 3} \end{pmatrix}$$

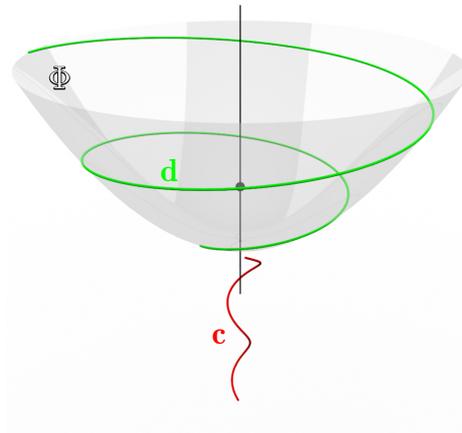


Abbildung 3.7: Die Kurve \mathbf{d} wird durch die Projektion einer parabolischen Spirale mit $a = 0.25$ in Richtung der Achse des Drehparaboloids Φ auf Φ gewonnen. Die zu \mathbf{d} gehörende Gratlinie \mathbf{c} bildet mit dem Brennpunkt und der Erzeugendenrichtung des Drehparaboloids ein Tripel für Origami.

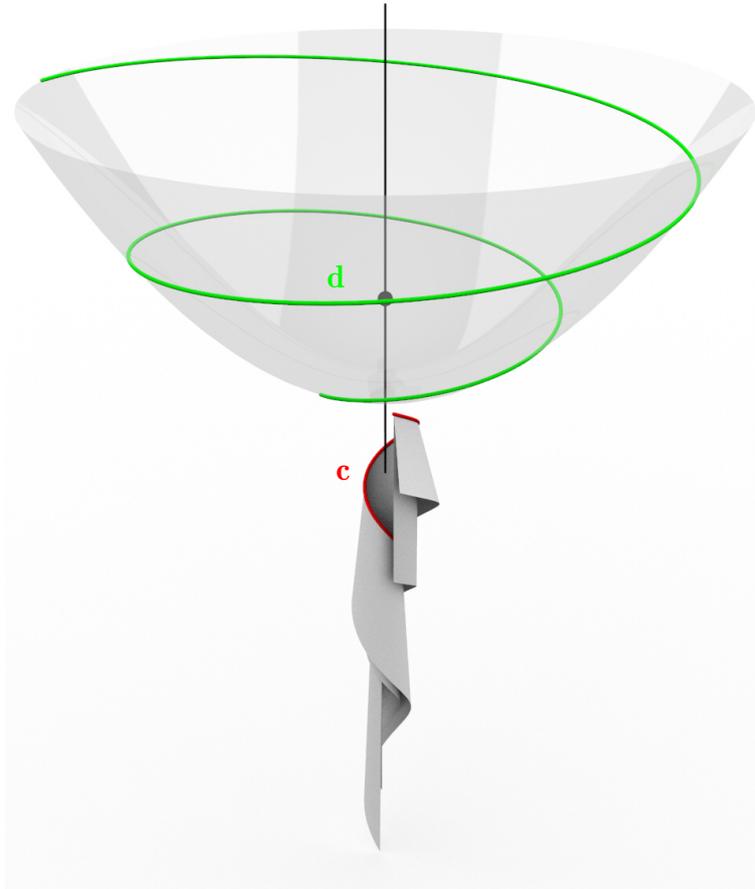


Abbildung 3.8: Ein Origami mit Kegel und Zylinder entlang der Kurve c . Die Kegelfläche liegt in dieser Abbildung außen, die Zylinderfläche innen. Hier können Durchdringungen abhängig von der Breite der Streifen und der Länge von c auftreten.

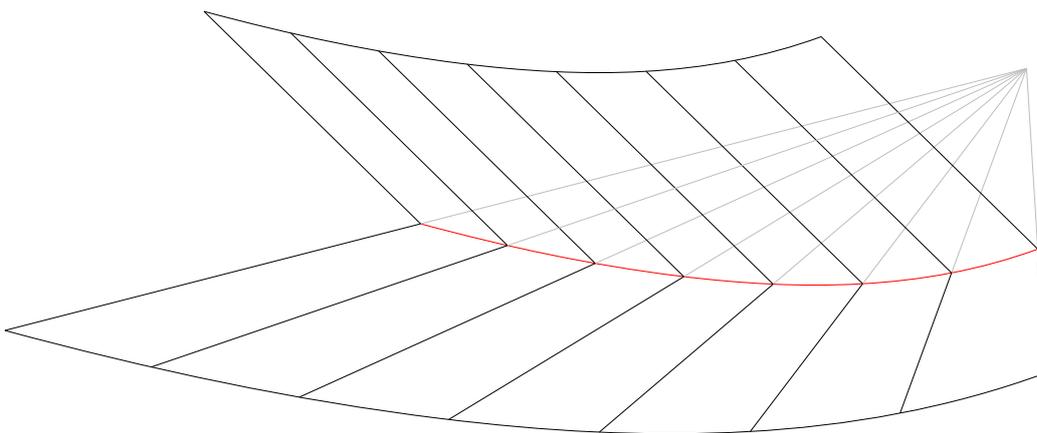


Abbildung 3.9: Verebnetes Origami aus Abb. 3.8.

3.1.5 Beispiel 4

Für dieses Beispiel wählen wir eine auf einem zum Drehparaboloid Φ coaxialen Zylinder aufgewickelte Zykloide $\tilde{\mathbf{d}}$. Sie wird aus der Achse von Φ auf Φ projiziert. Ein Zweig dieser Projektion sei die Basiskurve $\mathbf{d} \subset \Phi$.

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \cos(t)} \cos(t - \sin(t)) \\ \sqrt{1 - \cos(t)} \sin(t - \sin(t)) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

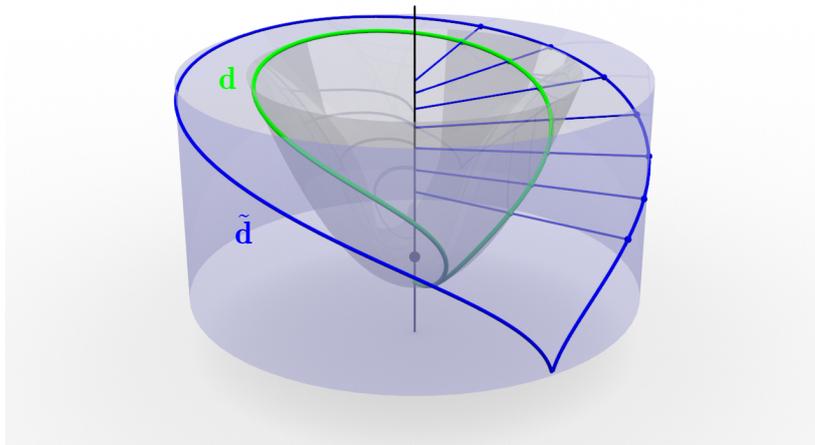


Abbildung 3.10: Die Kurve \mathbf{d} ist die Projektion einer Zykloide $\tilde{\mathbf{d}}$ auf einem coaxialen Zylinder auf das Drehparaboloid.

Die Tangentialebenen $\tau(t)$ können durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$\tau(t) : 2\sqrt{1 - \cos(t)} \cos(t - \sin(t))x + 2\sqrt{1 - \cos(t)} \sin(t - \sin(t))y - z + \cos(t) - 1 = 0$$

Die Lösung $\mathbf{c}(t)$ der Gleichungen $\tau(t) = 0$, $\dot{\tau}(t) = 0$ und $\ddot{\tau}(t) = 0$ besitzt keine Darstellung, die vernünftig auf einer Seite darstellbar wäre. Deshalb wird zwar auf die Parameterform von $\mathbf{c}(t)$ verzichtet, aber die Kurve trotzdem in Abb. 3.11 veranschaulicht. In dieser Abbildung fallen besonders die Spitzen von \mathbf{c} ins Auge. Daher werden die zu diesen Spitzen gehörenden Henkelpunkte $\mathbf{h}_{1,2,3}$ auf \mathbf{d} ebenfalls dargestellt.

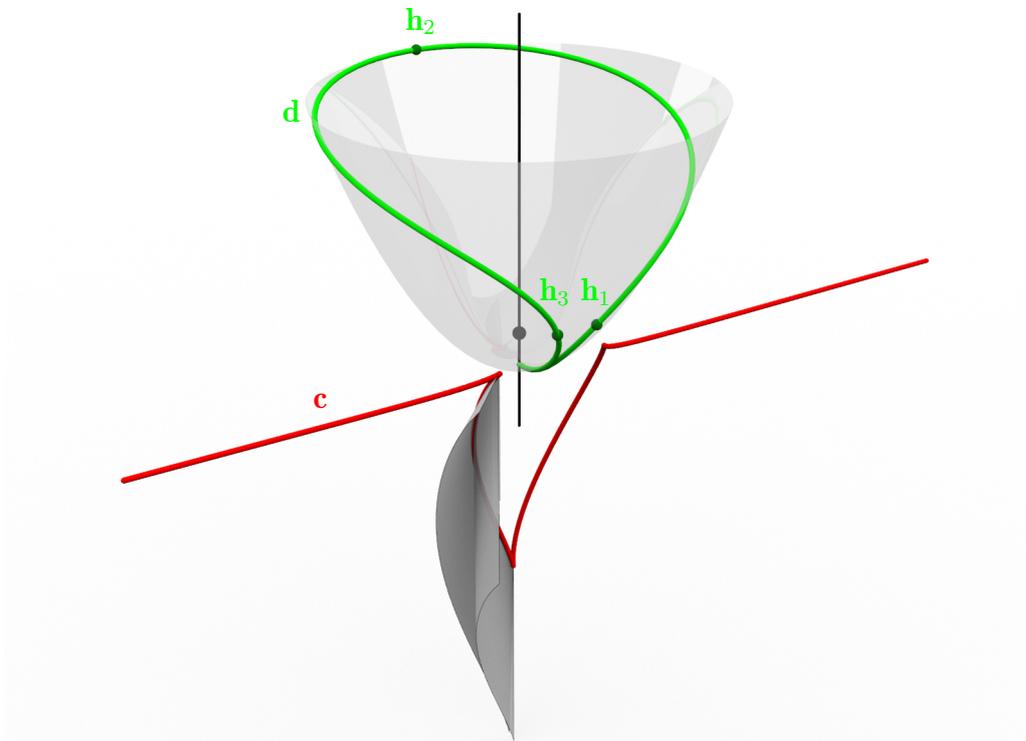


Abbildung 3.11: Origami mit Kegel- und Zylinderfläche aus Bsp. 4. Die Kurve d auf dem Drehparaboloid, ein Teil der Gratlinie c , sowie auch die zu den Spitzen von c gehörenden Henkelpunkte $h_{1,2,3} \in d$ sind hier dargestellt.

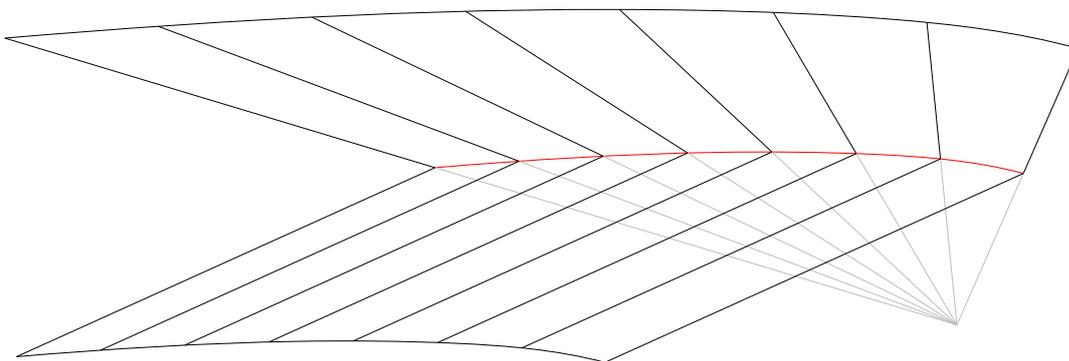


Abbildung 3.12: Verebnetes Origami aus Beispiel Abb. 3.11.

4 Conclusio

Mit Ausnahme von einigen Spezialfällen lassen sich die Tripel für Origami mit Kegel- und Zylinderflächen in drei Gruppen einteilen:

Ein Origami mit zwei Kegelflächen ist nur dann möglich, wenn die Schmiegebenen jener Faltkurve, entlang derer die Kegelflächen zusammenstoßen, tangential an eine Drehquadrik Φ , die entweder ein Drehellipsoid, oder ein zweischaliges Drehhyperboloid ist, liegen. Φ zeichnet sich dadurch aus, dass die Kegelspitzen den Brennpunkten von Φ entsprechen.

Ein Origami mit einer Kegel- und einer Zylinderfläche ist nur dann möglich, wenn die Schmiegebenen der Faltkurve, entlang derer sich die Flächen treffen, Tangentialebenen an ein Drehparaboloid Φ sind. Φ wird dadurch festgelegt, dass die Kegelspitze dem Brennpunkt und die Erzeugendenrichtung der Zylinderfläche der Achsenrichtung von Φ entspricht.

Ein Origami mit Paaren von Zylindern ist nur dann möglich, wenn die Tangentenvektoren der Schnittkurve beider Zylinder den Erzeugendenrichtungen eines quadratischen Kegels Γ entsprechen. Die Erzeugendenrichtungen der Zylinderflächen sind dabei die Richtungen der Fokalstrahlen von Γ .

Ebene Kurven, die in einer Ebene σ^* liegen, liefern die trivialen Ausnahmen dieser drei Fälle: Entweder liegen Paare von Kegel- bzw. Zylinderflächen symmetrisch bezüglich σ^* , oder die Kegel- und Zylinderflächen liegen beide in σ^* .

Literaturverzeichnis

- [1] Alperin, Roger C. und Lang, Robert J.: *One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms*. Origami 4 : Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education, Seiten 371–393, 2006.
- [2] Auckly, David und Cleveland, John: *Totally Real Origami and Impossible Paper Folding*. The American Mathematical Monthly, 102, August 2004.
- [3] Blaschke, Wilhelm und Leichtweiß, Kurt: *Elementare Differentialgeometrie*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 5. Auflage, 1973, ISBN 3-540-05889-3.
- [4] Brauner, Heinrich: *Differentialgeometrie*. Vieweg+Teubner Verlag, 1981, ISBN 978-3-528-03809-0,978-3-322-89712-1.
- [5] Demaine, Erik D., Demaine, Martin L., Koschitz, Duks und Tachi, Tomohiro: *Curved Crease Folding: a Review on Art, Design and Mathematics*. In: *Proceedings of the IABSE-IASS Symposium: Taller, Longer, Lighter (IABSE-IASS 2011)*, London, England, 20.-23. September 2011.
- [6] Demaine, Erik D. und O'Rourke, Joseph: *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007, ISBN 0521857570.
- [7] do Carmo, Manfredo P. und Grüter, Michael (Übers.): *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. vieweg studium; Aufbaukurs Mathematik. Vieweg+Teubner Verlag, 1993, ISBN 978-3-528-27255-5.
- [8] Fritzsche, Klaus: *Grundkurs Analysis 2: Differentiation und Integration in mehreren Veränderlichen*. Springer Spektrum, 2. Auflage, 2013, ISBN 978-3-642-37494-4,978-3-642-37495-1.
- [9] Fuchs, Dmitry und Tabachnikov, Serge: *More on Paperfolding*. American Mathematical Monthly, 106:27–35, Jänner 1999.
- [10] Glaeser, Georg, Stachel, Hellmuth und Odehnal, Boris: *The Universe of Conics: From the ancient Greeks to 21st century developments*. Springer Spektrum, 2016, ISBN 978-3-662-45449-7.

-
- [11] Kühnel, Wolfgang: *Differentialgeometrie Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten*. Springer, 6. Auflage, 2013, ISBN 9783658006150.
- [12] Kilian, Martin, Flöry, Simon, Chen, Zhonggui, Mitra, Niloy J., Sheffer, Alla und Pottmann, Helmut: *Curved Folding*. ACM Transactions on Graphics, 27(3):75:1–75:9, August 2008, ISSN 0730-0301. <http://doi.acm.org/10.1145/1360612.1360674>.
- [13] Koecher, Max und Krieg, Aloys: *Ebene Geometrie*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, 2009, ISBN 978-3-540-49327-3.
- [14] Königsberger, Karl: *Analysis 1*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2004, ISBN 9783540403715.
- [15] Koschitz, Duks, Demaine, Erik D. und Demaine, Martin L.: *Curved Crease Origami*. Abstracts from Advances in Architectural Geometry (AAG 2008), Seiten 29–32, Vienna, Austria, 13.-16. September 2008.
- [16] Kruppa, Erwin: *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie*. Springer-Verlag, 1957.
- [17] Lang, Johann: *Projektive Geometrie 2*, Skriptum, 1986.
- [18] Lang, Johann und Gfrerrer, Anton: *Projektive Geometrie 4: Nach einer Vorlesung von Hans Vogler*), Skriptum, 2015.
- [19] Röschel, Otto: *Curved Folding with Pairs of Cylinders*. In: 17th International Conference on Geometry and Graphics, Seiten 2:1–2:7, Beijing, China, 4.-8. August 2016.
- [20] Röschel, Otto: *Curved Folding with Pairs of Cylinders*. Journal for geometry and graphics, 21(2):193 – 200, 2017, ISSN 1433-8157.
- [21] Röschel, Otto: *Curved Folding with Pairs of Cones*. In: Cocchiarella, Luigi (Herausgeber): *ICGG 2018 - Proceedings of the 18th International Conference on Geometry and Graphics*, Seiten 381–388, Cham, 2019. Springer International Publishing, ISBN 978-3-319-95588-9.
- [22] Strubecker, Karl: *Differentialgeometrie II: Theorie der Flächenmetrik*. Walter de Gruyter & Co, 1969.
- [23] Wallner, Johannes: *Differentialgeometrie*. Institut für Geometrie der TU Graz- (Skriptum zur Vorlesung im SS 2014 von J. Wallner), 2014.
- [24] Wunderlich, Walter: *Darstellende Geometrie I*. Bibliographisches Institut, 1966.
- [25] Wunderlich, Walter: *Darstellende Geometrie II*. Bibliographisches Institut, 1967.