

Stefan Lichtenegger

Additive isotrope Plastizität bei großen
Verformungen mit finiten Elementen

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Diplom-Ingenieurs

Institut für Festigkeitslehre
Technische Universität Graz
Fakultät für Maschinenbau und Wirtschaftswissenschaften

Studienrichtung:
Wirtschaftsingenieurwesen-Maschinenbau

Betreuer: Assoc. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Ulz
Beurteiler: Assoc. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Ulz



Deutsche Fassung:
Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008
Genehmigung des Senates am 1.12.2008

EIDESSTÄTTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....
(Unterschrift)

Englische Fassung:

STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources / resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....
date

.....
(signature)

Abstract

This thesis presents a phenomenological material model on the material configuration for rate-independent, isotropic elasto-plastic material behaviour at finite strains. The constitutive model is based on an elastic potential, proposed by ASMANOGLO et al. [2] and KAISER et al. [14]. As proposed by MIEHE [27], for the constitutive formulation in the framework of additive plasticity, a plastic metric to describe the plastic deformations is introduced on the material configuration as a counterpart of the right Cauchy-Green tensor. Furthermore, to depict isotropic hardening behaviour, a hardening variable is defined in addition. The integration algorithm to solve the evolution equations of the internal variables features a classic "return mapping" scheme, based on the backward Euler method together with a local Newton algorithm. Furthermore, the constitutive model is implemented into the finite element computing environment **SOOFEA** (software for object-oriented finite element analysis). This is a modular, object-oriented finite element analysis software based on MATLAB[®], developed by members of the Institute of Strength of Materials at Graz University of Technology. Selected problems are simulated numerically, to verify the stability of the implementation and the constitutive model itself. Classical trilinear 8-node hexahedral elements are used for all simulations.

Kurzfassung

Diese Arbeit präsentiert ein auf der Ausgangskonfiguration formuliertes, phänomenologisches Materialmodell für dehnratenunabhängiges, isotrop elasto-plastisches Materialverhalten bei großen Verformungen. Als Ausgangsbasis für das Materialgesetz soll dabei das von ASMANOGLO et al. [2] und KAISER et al. [14] vorgeschlagene elastische Potenzial dienen. Wie von MIEHE [27] vorgeschlagen, wird für die Formulierung der Konstitutivgleichungen im Rahmen der additiven Plastizität, als Gegenstück zum rechten Cauchy-Green-Tensor, eine plastische Metrik zur Beschreibung der plastischen Verformungen auf der Ausgangskonfiguration eingeführt. Weiters wird für die Interne-Variablen-Formulierung ein Verfestigungsparameter für isotrope Verfestigung definiert. Im Integrationsalgorithmus zum Lösen der Evolutionsgleichungen der internen Variablen kommt ein klassisches „Return-Mapping“-Schema, basierend auf dem impliziten Euler-Verfahren in Verbindung mit einem lokalen Newton-Algorithmus, zur Anwendung. Ferner wird das Materialmodell in die FE-Berechnungsumgebung **SOOFEA** (software for object-oriented finite element analysis) implementiert. Es handelt sich dabei um ein MATLAB[®]-basiertes, objektorientiertes und modulares Finite-Elemente-Programm, entwickelt von Mitarbeitern des Instituts für Festigkeitslehre der Technischen Universität Graz. Damit werden durch ausgewählte numerische Simulationen die Implementierung und das Materialmodell selbst hinsichtlich ihrer Stabilität getestet. Für alle Simulationen werden klassische, trilineare 8-Knoten-Hexaederelemente verwendet.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Über die Plastizität fester Körper	1
1.1.1. Multiplikativer Ansatz	3
1.1.2. Additiver Ansatz	4
1.1.3. Anisotrope Plastizität	5
1.2. Ziel dieser Arbeit	6
1.3. Anmerkungen zur Notation	7
2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik	9
2.1. Kinematik	9
2.1.1. Bewegung	9
2.1.2. Deformation	10
2.1.3. Metrik und Verzerrungsmaße	12
2.2. Spannungen	13
2.3. Bilanz- und Erhaltungsgleichungen	15
3. Materialmodell und Implementierung	18
3.1. Clausius-Duhem-Ungleichung	18
3.2. Elastisches Potenzial	19
3.3. Fließfunktion	22
3.4. Interne Variablen	24
3.5. Lokaler Newton-Algorithmus	27
3.6. Implementierung	30
4. Numerische Beispiele	32
4.1. Ein-Element-Konvergenztest	32
4.2. Dickwandiges Rohr unter Innendruck	35
4.3. Ziehen einer dünnwandigen Kreisscheibe	41
5. Zusammenfassung und Ausblick	45
Literatur	46
A. Ableitungen	50
A.1. Elementare Ableitungen	50
A.2. Elastisches Potenzial	53
A.3. „level set“-Funktion	56

Abbildungsverzeichnis

1.1.	Kinematik der <i>multiplikativen Zerlegung</i> (nach APEL [1]): Die Punkte \mathbf{X} der Ausgangskonfiguration \mathcal{B} werden durch die Deformationsabbildung φ auf die Punkte \mathbf{x} in die Momentankonfiguration \mathcal{S} abgebildet. Motiviert durch physikalische Phänomene der Kristallplastizität wird die Tangentialabbildung $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ multiplikativ in einen plastischen Anteil \mathbf{F}_p und einen elastischen Anteil $\mathbf{F}_e := \mathbf{F}\mathbf{F}_p^{-1}$ aufgeteilt. Daraus folgt die Einführung einer lokal inkompatiblen Zwischenkonfiguration $\tilde{\mathcal{B}}$	3
1.2.	Kinematik der <i>additiven Zerlegung</i> einer lagrangeschen Verzerrungsgröße: Die Punkte \mathbf{X} der Ausgangskonfiguration \mathcal{B} werden durch die Deformationsabbildung φ auf die Punkte \mathbf{x} in die Momentankonfiguration \mathcal{S} abgebildet. Die Gesamtverformung wird auf der Ausgangskonfiguration durch ein Verzerrungsmaß \mathbf{E} gemessen. Der irreversible plastische Anteil der Gesamtverformung wird durch eine <i>verzerrungsähnliche</i> Größe \mathbf{E}_p der Ausgangskonfiguration angegeben.	5
1.3.	Zipfelbildung beim Tiefziehen (vgl. SINGH et al. [39]). Links: Experiment, Rechts: Finite-Elemente-Simulation	6
1.4.	In Walzrichtung ausgerichtete Mikrostruktur eines kaltgewalzten Tiefziehstahlblechs (vgl. ZHOU et al. [47]).	6
2.1.	Kinematik eines kontinuierlichen Körpers: Alle Punkte des Körpers befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ausgangskonfiguration \mathcal{B} , begrenzt durch den Rand $\partial\mathcal{B}$ und zum Zeitpunkt $t \neq 0$ in der Momentankonfiguration \mathcal{S} , begrenzt durch den Rand $\partial\mathcal{S}$. Die nichtlineare Abbildung φ bildet Punkte $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ der Ausgangskonfiguration auf die entsprechende Position $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{S}$ der Momentankonfiguration ab. Der Deformationsgradient $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ bildet Tangentenvektoren $d\mathbf{X} \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$ des lagrangeschen Tangentialraums auf die entsprechenden Tangentenvektoren $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$ des eulerschen Tangentialraums ab.	10
2.2.	Polare Zerlegung des Deformationsgradienten: Die Tangentialabbildung \mathbf{F} kann aufgefasst werden als eine Streckung auf der Ausgangskonfiguration, beschrieben durch den rechten Strecktensor \mathbf{U} und anschließende Rotation in die Momentankonfiguration, beschrieben durch den Rotationstensor \mathbf{R} oder als eine Rotation in die Momentankonfiguration, beschrieben durch den Rotationstensor \mathbf{R} mit anschließender Streckung in der Momentankonfiguration, beschrieben durch den linken Strecktensor \mathbf{V}	11

2.3.	Freigeschnittener Körper und Schnittgrößen: In der Schnittfläche der Momentankonfiguration \mathcal{S} wirkt im infinitesimalen Flächenelement da mit der Flächennormalen \mathbf{n} die Kontaktspannung \mathbf{t} . Die entsprechenden Größen auf der Ausgangskonfiguration \mathcal{B} ergeben sich durch geeignete Rücktransformationen.	15
3.1.	Von Mises-Fließfläche im Hauptspannungsraum \mathbb{R}_{Σ}^H der Mandel-Spannungen Σ : Der Spannungszustand Σ befindet sich auf der Fließfläche und das Spannungsinkrement $d\Sigma$ weist auf der Fließfläche nach außen und es gilt $\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} : d\Sigma > 0$. Der Spannungszustand $\Sigma + d\Sigma$ nach der plastischen Deformation liegt auf der neuen Fließfläche.	23
4.1.	Ein-Element-Konvergenztest – Geometrie und Randbedingungen: Gegeben ist eine Scheibe mit der konstanten Dicke $t_s = 1$ mm. Die Koordinaten der Knotenpunkte des Hexaederelementes sind in Tabelle 4.1 angegeben. Der untere Rand ist fest eingespannt, wobei am oberen Rand die Verschiebung $u = 0.1$ mm in y-Richtung in 10 Schritten aufgebracht wird. Die Verschiebung in z-Richtung ist für alle Knoten gesperrt.	33
4.2.	Vergleichsspannung und äquivalente plastische Verzerrung im Knoten C über den Zeitschritten n : Bis zum zweiten Zeitschritt erfolgt eine rein elastische Verformung. Die Spannung steigt linear bis zum Erreichen der Fließspannung. Bei weiterer Belastung tritt eine plastische Verformung auf und die Fließspannung steigt entsprechend der linearen Verfestigung.	34
4.3.	Dickwandiges Rohr unter Innendruck – Geometrie, Randbedingungen und FE-Diskretisierung: Gegeben sei ein Viertelsystem mit 10×10 Elementen in radiale und Umfangsrichtung. Die Elementgröße in radialer Richtung ist progressiv gestuft (Progressionsfaktor $q = 1.35$). In den Symmetrieebenen sind Verschiebungen nur in der Ebene zulässig und in axiale Richtung sind die Verschiebungen gesperrt. An der Innenfläche wird ein Druck $p_i = 280$ MPa in 140 Schritten aufgebracht.	36
4.4.	Dickwandiges Rohr unter Innendruck – radiale Verschiebungen bei (a) $p_i = 190$ MPa und (b) $p_i = 280$ MPa: Verteilung der Radialverschiebung über dem unverformten Scheibenelement (oben) und Verlauf der Radialverschiebung u_r über den Radius r der Scheibe (unten).	38
4.5.	Dickwandiges Rohr unter Innendruck – äquivalente plastische Verzerrung E_p^{eq} (links) und Vergleichsspannung σ_{vM} (Mitte und rechts): Bei beginnender Plastifizierung (a) ist E_p^{eq} überall gleich null. Die Vergleichsspannung σ_{vM} erreicht gerade die Fließspannung $y_0 = 350$ MPa. Bei weiterer Belastung (b) bis (d) wächst der plastifizierte Bereich, wobei die Vergleichsspannung nicht über die Fließspannung hinaus ansteigt.	39

Abbildungsverzeichnis

- 4.6. Dickwandiges Rohr unter Innendruck – analytische Lösung und Simulation: Die durchgehende Linie gibt den funktionalen Zusammenhang zwischen dem aufgeprägten Innendruck p_i und dem Radius der plastifizierten Zone r_p für die analytische Lösung wieder. Zum Vergleich sind daneben vier Punkte der Simulation dargestellt. 40
- 4.7. Ziehen einer dünnwandigen Kreisscheibe – Geometrie, Randbedingungen und FE-Diskretisierung: Gegeben sei ein Viertel einer Kreisring-Scheibe mit 10×10 Elementen in radialer Richtung und Umfangsrichtung. In den Symmetrieebenen sind Verschiebungen nur in der Ebene zulässig und in Dickenrichtung ist die Verschiebung der Plattenunterseite gesperrt. An der Innenkante der Scheibe wird in 750 Zeitschritten eine radiale Verschiebung $u_r = 75$ mm aufgebracht. 41
- 4.8. Ziehen einer dünnwandigen Kreisscheibe – Vergleichsspannung σ_{vM} bei unterschiedlichen Radialverschiebungen u_r der Scheiben-Innenfläche: Verteilung der Vergleichsspannung auf der verformten Scheibe (links), sowie radialer Verlauf der Vergleichsspannung (rechts). 43
- 4.9. Ziehen einer dünnwandigen Kreisscheibe – äquivalente plastische Verzerrung E_p^{eq} bei unterschiedlichen Radialverschiebungen u_r der Scheiben-Innenfläche: Verteilung der äquivalenten plastischen Verzerrung auf der verformten Scheibe (links), sowie radialer Verlauf der äquivalenten plastischen Verzerrung (rechts). 44

Tabellenverzeichnis

3.1. Lokaler Algorithmus zur Aktualisierung der internen Variablen	31
4.1. Ein-Element-Konvergenztest – Koordinaten der Knotenpunkte des unverformten, trilinearen Hexaederelementes	33
4.2. Ein-Element-Konvergenztest – Materialparameter	33
4.3. Lokales Konvergenzverhalten: Für die vier globalen Iterationen i des dritten Zeitschritts zeigen die Folgen $A_{\text{conv}}^{(k)}$ des lokalen Newton-Algorithmus eine hohe Konvergenzordnung.	34
4.4. Globales Konvergenzverhalten: Für die Zeitschritte $n = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ zeigen die Folgen $W_{\Delta}^{(i)}$ des globalen Algorithmus eine hohe Konvergenzordnung.	35
4.5. Dickwandiges Rohr unter Innendruck – Materialparameter	37
4.6. Ziehen einer dünnwandigen Kreisscheibe – Materialparameter	42

1. Einleitung

In diesem Kapitel wird ein kurzer Überblick über die Entwicklung der klassischen phänomenologischen Plastizitätstheorie gegeben. Speziell werden zwei Ansätze, die *multiplikative Plastizität* und die *additive Plastizität*, näher betrachtet, ehe auf das Ziel dieser Arbeit eingegangen wird. Abschließend folgen noch Anmerkungen zur mathematischen Notation.

1.1. Über die Plastizität fester Körper

Das Interesse, elastisch-plastisches Materialverhalten von festen Körpern unter äußeren Belastungen möglichst genau vorhersagen zu können, ist heute ebenso groß, wie die Anzahl der ungelösten Probleme auf diesem Gebiet. Obwohl diesbezüglich vor allem in den letzten 50 Jahren bereits große Fortschritte gemacht wurden, hält die Plastizitätstheorie auch heute noch interessante Forschungsthemen bereit.

Die Entwicklung der klassischen Plastizitätstheorie geht zurück auf die Arbeiten von Henri Édouard TRESCA, Adhémar Jean Claude Barré DE SAINT-VENANT, Lucien LÉVY und Johann BAUSCHINGER in den Jahren 1864 bis 1878. Später wurden deren Erkenntnisse durch die Arbeiten von Maksymilian Tytus HUBER, Richard Edler VON MISES, Heinrich HENCKY, Ludwig PRANDTL, András REUSS, Rodney HILL, William PRAGER, Daniel Charles DRUCKER, Hans ZIEGLER und vielen anderen maßgeblich weiterentwickelt. Für eine detailliertere Betrachtung der Geschichte sei der interessierte Leser an BERTRAM [3], BRUHNS [5] und STEIN [40] sowie MÜLLER [31] verwiesen.

In weiterer Folge entwickelte sich unter anderem eine lineare Theorie für raten-unabhängige Plastizität. Der entsprechende Satz an Konstitutivgleichungen ist heute unter dem Namen *Prandtl-Reuss-Gleichungen* [34, 35] bekannt.¹ Eine zentrale Annahme ist dabei, dass die Gesamtverzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}$, bzw. deren Rate $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, sich additiv in einen elastischen Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}$ bzw. $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{el}}$ und einen plastischen Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}}$ bzw. $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pl}}$ aufteilen lassen.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}} \quad (1.1a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{el}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pl}} \quad (1.1b)$$

Diese Annahme ist für kleine Verformungen durchaus berechtigt. Gerade viele metallische Konstruktionswerkstoffe zeigen ein linear-elastisches Verhalten mit einer ausgeprägten Fließgrenze. Ebenso sind die zu erwartenden elastischen Dehnungen bei Fließbeginn klein genug, um mit dieser Theorie gute strukturmechanische Voraussagen machen zu können. Dennoch gibt es Anwendungsgebiete, bei denen eine Einschränkung auf lineares Werkstoffverhalten und kleine Verformungen nicht

¹Für eine detaillierte theoretische Betrachtung siehe beispielsweise KHAN und HUANG [15]

1. Einleitung

zulässig ist. Beispielhaft seien hier sämtliche Umformprozesse genannt, bei denen naturgemäß sehr große Formänderungen auftreten. Eine elasto-plastische Theorie für große Verformungen kann abgeleitet werden, indem die additive Zerlegung der Dehnraten aus der linearen Theorie, wie in Gleichung 1.1b angegeben, auch für große Verformungen vereinbart wird. Dies führt zu einer additiven Zerlegung des *Verzerrungsgeschwindigkeitstensors* \mathbf{d} in der Form

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_p. \quad (1.2)$$

Für die hierbei eingeführten Größen \mathbf{d}_e und \mathbf{d}_p werden in völliger Analogie zur linearen Theorie Evolutionsgleichungen eingeführt. Für den plastischen Anteil \mathbf{d}_p werden diese im Allgemeinen durch eine Fließregel angegeben. Die Konstitutivgleichung für den elastischen Anteil \mathbf{d}_e wird durch ein sogenanntes *hypoelastisches Materialgesetz* wiedergegeben. Auf diese Weise wird die lineare *Prandtl-Reuss-Theorie* direkt in eine nichtlineare überführt. Die abhängigen und unabhängigen Variablen der Konstitutivgleichungen (\mathbf{d} , \mathbf{d}_e und \mathbf{d}_p , sowie die zu \mathbf{d} arbeitskonjugierte Spannungsgröße $\boldsymbol{\sigma}$ und deren Raten) sind Größen auf der *Momentankonfiguration* (siehe Abschnitt 2.1) und man spricht deshalb von einer *eulerschen Betrachtungsweise*. Ein klarer Vorteil einer derartigen Theorie ist die einfache Struktur der Konstitutivgleichungen, was eine effiziente Implementierung, beispielsweise in einem FE-Programm, erlaubt. Demgegenüber stehen einige Nachteile, wie eine eingeschränkte Eignung für anisotrope Plastizität und die *hypoelastische* Natur der Theorie. Diese, sowie weitere Aspekte und daraus resultierende Vor- und Nachteile werden in XIAO, BRUHNS und MEYERS [46] diskutiert. Weiters stellen KHAN und HUANG [15] und WU [45] eine grundlegende theoretische Betrachtung dieser Theorie an.

Obwohl der Ansatz, die lineare *Prandtl-Reuss-Theorie* für große Verformungen zu verallgemeinern, auf den ersten Blick ein recht pragmatischer ist, weisen XIAO, BRUHNS und MEYERS [46] darauf hin, dass der Schlüssel zu einer allgemeinen Plastizitätstheorie mit einer selbstkonsistenten Struktur der Konstitutivgleichungen basierend auf relevanten physikalischen Aspekten sehr wohl in einer eulerschen Beschreibung durch den *Verzerrungsgeschwindigkeitstensors* \mathbf{d} und die *Kirchhoff-Spannung* $\boldsymbol{\tau}$ liegen könnte. Eine additive Zerlegung, wie in Gleichung 1.2, ist hierbei keine a priori Annahme, sondern ergibt sich als Folge physikalischer Überlegungen.

Neben dieser hypoelastisch-plastischen Theorie entstanden ab den 1960er Jahren weitere Theorien mit zum Teil sehr unterschiedlichen Strukturen der Konstitutivgleichungen. Speziell waren zwei Ansätze, deren Grundsätze im Folgenden näher erläutert werden, in der Vergangenheit immer wieder Forschungsschwerpunkt der Plastizitätstheorie. Ergänzend sei hier erwähnt, dass sich bis heute, trotz intensiver Forschungstätigkeit, keine der beiden Theorien als allgemeine phänomenologische Plastizitätstheorie für große Verformungen durchsetzen konnte. In einigen fundamentalen Fragen, wie der korrekten Identifikation plastischer Verzerrungsmaße, steht nach wie vor kein Konsens in Aussicht. NAGHDI [32] und XIAO, BRUHNS und MEYERS [46] nehmen sich in ihren Rezensionen diesem Thema an.

1.1.1. Multiplikativer Ansatz

Ein sehr verbreitetes Modell basiert auf einer *multiplikativen Zerlegung* des *Deformationsgradienten* \mathbf{F} (siehe Unterabschnitt 2.1.2) in einen elastischen und einen plastischen Anteil:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p. \quad (1.3)$$

Eingeführt wurde diese von KRÖNER [18], welcher eine Theorie für Kristallplastizität formulierte. Denselben Zugang wählte später LEE [21], um phänomenologische Plastizität bei großen Verformungen zu beschreiben. In der Kristallplastizität nach Ekkhart KRÖNER beschreibt der elastische Anteil Starrkörperrotationen und Gitterverzerrungen, wohingegen der plastische Anteil das Wandern von Gitterversetzungen beschreibt. Wie in Abbildung 1.1 dargestellt, geht mit der oben genannten multiplikativen Zerlegung die Einführung einer *spannungsfreien Zwischenkonfiguration* einher. Anschaulich geht diese aus der Momentankonfiguration durch lokales spannungsfrei Machen hervor. Das heißt, sie unterscheidet sich lokal von der Momentankonfiguration durch die reversiblen elastischen Formänderungen und von der Ausgangskonfiguration durch die nicht-reversiblen plastischen Formänderungen.

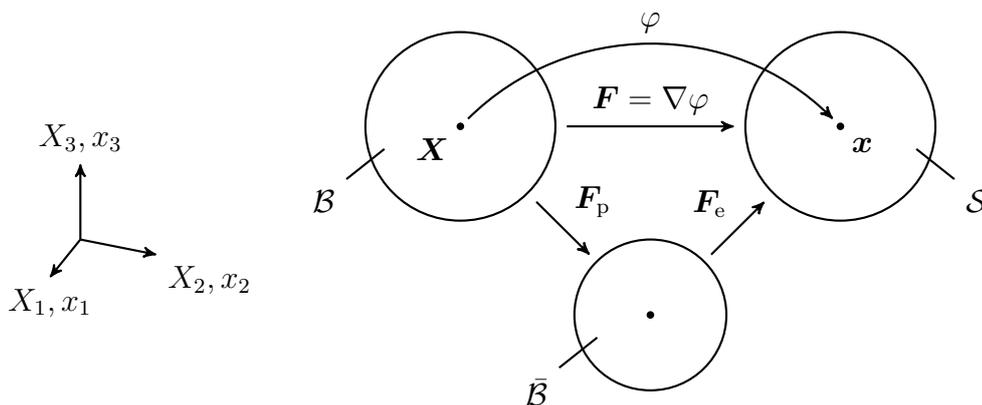


Abbildung 1.1. Kinematik der *multiplikativen Zerlegung* (nach APEL [1]): Die Punkte \mathbf{X} der Ausgangskonfiguration \mathcal{B} werden durch die Deformationsabbildung φ auf die Punkte \mathbf{x} in die Momentankonfiguration \mathcal{S} abgebildet. Motiviert durch physikalische Phänomene der Kristallplastizität wird die Tangentialabbildung $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ multiplikativ in einen plastischen Anteil \mathbf{F}_p und einen elastischen Anteil $\mathbf{F}_e := \mathbf{F}\mathbf{F}_p^{-1}$ aufgeteilt. Daraus folgt die Einführung einer lokal inkompatiblen Zwischenkonfiguration $\bar{\mathcal{B}}$.

Einerseits spricht die Tatsache, dass sich die kinematischen Überlegungen dieser Theorie sehr gut durch Phänomene der Kristallplastizität beschreiben lassen, sehr für diese. Andererseits gibt es aber auch einige grundlegende Einschränkungen, die gegen eine allgemeine phänomenologische Plastizitätstheorie basierend auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten sprechen. Zum Ersten ist die Zwischenkonfiguration, und damit auch die elastischen und plastischen Komponenten der Zerlegung, nicht eindeutig: Der Zwischenkonfiguration können willkürliche Starrkörperrotationen überlagert werden, ohne dass sich der Spannungszustand ändert. Eine kritische Diskussion zu diesem Thema in der Literatur führt im

1. Einleitung

Grunde zu zwei Standpunkten. Entweder wird angenommen, dass das elastische spannungsfrei Machen ohne Rotation vonstattengeht, oder es wird gefordert, dass die Zwischenkonfiguration nur eine von vielen möglichen Konfigurationen ist, welche alle dieselben Invarianzbedingungen erfüllen müssen. Eine umfangreiche Diskussion zu diesem Thema findet sich beispielsweise in LUBARDA und LEE [24] und CASEY und NAGHDI [6]. Zum Zweiten ist das Erreichen eines spannungsfreien Zustandes ohne eine weitere plastische Verformung laut NAGHDI [32] nur möglich, indem man zum Ursprung im Spannungsraum innerhalb der Fließfläche zurückkehrt. Für eine allgemeine Plastizitätstheorie stellt das insofern eine Einschränkung dar, als dass sich die Fließfläche im Spannungsraum infolge plastischer Prozesse bewegt. Für eine ausführliche Diskussion dieser und weiterer Aspekte der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten wird an dieser Stelle an XIAO, BRUHNS und MEYERS [46] verwiesen.

Trotz der genannten Nachteile hat sich die Theorie nicht nur in der Kristallplastizität, sondern auch in der phänomenologischen Plastizität erfolgreich durchgesetzt und findet heute eine weite Verbreitung in proprietären FE-Anwendungen.

1.1.2. Additiver Ansatz

Während bei kleinen Verformungen die aus Gleichung 1.1a hervorgehenden elastischen und plastischen Anteile $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}}$ der Gesamtverzerrung kinematisch relevante Größen im Sinne der Kontinuumsmechanik sind, kann die entsprechende Zerlegung

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_p \quad (1.4)$$

des *Green-Lagrange-Verzerrungstensors* \boldsymbol{E} (siehe Unterabschnitt 2.1.3) in einen elastischen und plastischen Anteil jedoch nicht so vereinbart werden, dass die jeweiligen Komponenten \boldsymbol{E}_e und \boldsymbol{E}_p eine kinematische Bedeutung haben. Im Allgemeinen sind plastische Prozesse pfadabhängig, womit auch die plastischen Verzerrungen ohnehin nicht als rein kinematische Größen im Sinne der Kontinuumsmechanik angesehen werden können. Es erscheint daher sinnvoll, eine verzerrungsähnliche Größe \boldsymbol{E}_p , zur Beschreibung der plastischen Verzerrung, als sogenannte *interne Variable* in die Konstitutivgleichungen einzuführen. Diese Idee wurde erstmals von GREEN und NAGHDI [9, 10] veröffentlicht. Laut XIAO, BRUHNS und MEYERS [46] stellte dies den ersten Versuch dar, thermo-elasto-plastisches Materialverhalten für große Verformungen umfassend mittels Kontinuumsmechanik und -thermodynamik zu beschreiben. Abbildung 1.2 zeigt die Kinematik einer Plastizitätstheorie mit additiver Zerlegung einer lagrangeschen Verzerrungsgröße. Es sei angemerkt, dass die explizite Einführung einer elastischen Größe $\boldsymbol{E}_e := \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_p$ überflüssig ist.

Im Vergleich zur multiplikativen Plastizität weist eine derartige Theorie eine ausgesprochen einfache Struktur der Konstitutivgleichungen auf. So kann das elastische Materialverhalten durch Einführen einer Potenzialfunktion einfach nach den Gesetzmäßigkeiten der Hyperelastizität formuliert werden. Für die Entwicklung der zusätzlich eingeführten internen Variable \boldsymbol{E}_p wird eine konstitutive Evolutionsgleichung in Ratenform angegeben. Obwohl damit eine sehr allgemeine Beschreibung des elastisch-plastischen Verhaltens vieler Materialien möglich ist, konnte sich die Theorie vor allem gegenüber dem multiplikativen Ansatz nicht wirklich durchsetzen. Weiters geben XIAO, BRUHNS und MEYERS [46] zu bedenken, dass die Einführung

1. Einleitung

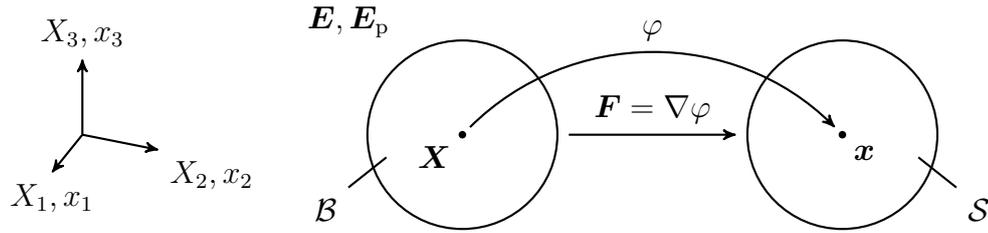


Abbildung 1.2. Kinematik der *additiven Zerlegung* einer lagrangeschen Verzerrungsgröße: Die Punkte \mathbf{X} der Ausgangskonfiguration \mathcal{B} werden durch die Deformationsabbildung φ auf die Punkte \mathbf{x} in die Momentankonfiguration \mathcal{S} abgebildet. Die Gesamtverformung wird auf der Ausgangskonfiguration durch ein Verzerrungsmaß \mathbf{E} gemessen. Der irreversible plastische Anteil der Gesamtverformung wird durch eine *verzerrungsähnliche* Größe \mathbf{E}_p der Ausgangskonfiguration angegeben.

der internen Variablen eher mathematisch motiviert ist und eben diesen somit keine definierte physikalische Bedeutung zukommt.

Ein etwas neuerer Ansatz für phänomenologische Plastizität bei großen Verformungen geht auf die Arbeiten von MIEHE [27, 28, 29] zurück. Anstelle einer plastischen Verzerrungsgröße \mathbf{E}_p wird hier eine sogenannte *plastische Metrik* \mathbf{G}_p auf der Ausgangskonfiguration als interne Variable eingeführt. In Analogie zum Green-Lagrange-Verzerrungstensor \mathbf{E} kann die Beziehung zwischen plastischer Metrik \mathbf{G}_p und plastischer Verzerrung \mathbf{E}_p angegeben werden als

$$\mathbf{E}_p := \frac{1}{2}(\mathbf{G}_p - \mathbf{G}), \quad (1.5)$$

wobei \mathbf{G} die *Metrik* (siehe Unterabschnitt 2.1.3) auf der Ausgangskonfiguration ist.

1.1.3. Anisotrope Plastizität

Ein Phänomen, das bisher nicht angesprochen wurde, ist die Richtungsabhängigkeit des elastisch-plastischen Materialverhaltens². Während das elastische Verhalten bei metallischen Werkstoffen weitestgehend richtungsunabhängig, also isotrop ist, kann es bei plastischen Verformungen zu einem ausgeprägten anisotropen Verhalten kommen. Ein prominentes Beispiel dafür ist die sogenannte Zipfelbildung beim Tiefziehen kaltgewalzter Bleche (siehe Abbildung 1.3). Für weiterführende Literatur zum Thema plastische Anisotropie im Zusammenhang mit Umformprozessen sei hier stellvertretend auf HOSFORD und CADDELL [13] verwiesen. Die Arbeiten zahlreicher Autoren beschäftigen sich damit, anisotropes Materialverhalten bei großen Verformungen in all seinen Aspekten zu modellieren. Beispielhaft sei hier APEL [1] erwähnt, der auch einen Vergleich zwischen additiver und multiplikativer Plastizität in Bezug auf anisotrope Plastizität anstellt. Zahlreiche weitere Literaturverweise sind dort zu finden.

²Eine ausführliche theoretische Behandlung richtungsabhängigen Materialverhaltens von polykristallinen Stoffen, zu denen Metalle im Allgemeinen gezählt werden, findet sich beispielsweise in KOCKS, TOMÉ und WENK [17].

1. Einleitung

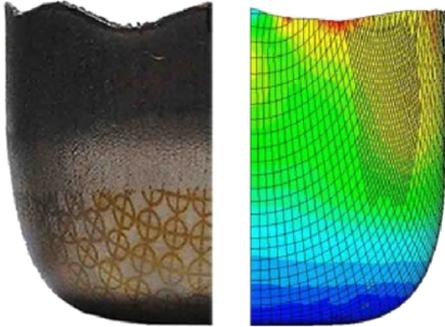


Abbildung 1.3. Zipfelbildung beim Tiefziehen (vgl. SINGH et al. [39]). Links: Experiment, Rechts: Finite-Elemente-Simulation

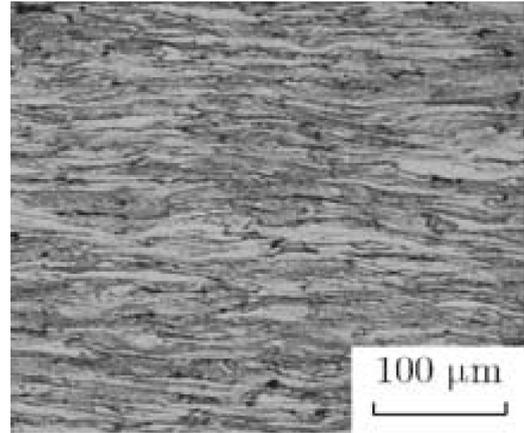


Abbildung 1.4. In Walzrichtung ausgerichtete Mikrostruktur eines kaltgewalzten Tiefziehstahlblechs (vgl. ZHOU et al. [47]).

Ein erwähnenswerter Aspekt plastischer Anisotropie ist, dass sich die Richtungsabhängigkeit mit dem Verlauf der plastischen Verformung ändern kann. Beispielsweise weisen kaltgewalzte Stahlbleche eine gerichtete Mikrostruktur auf (siehe Abbildung 1.4), welche für anisotrope Effekte verantwortlich ist. Durch inhomogene Verformungen als Folge von Blechumformprozessen werden lokale Bereiche nicht nur Streckungen, sondern auch Drehungen unterworfen, wodurch sich die lokale Ausrichtung der Mikrostruktur ändert. Damit ändert sich in jenen Bereichen auch die Richtungsabhängigkeit des Materialverhaltens entsprechend (siehe dazu auch DAFALIAS [7]).

In den Konstitutivgleichungen der Plastizitätstheorie wird dieses Phänomen durch eine eigene tensorielle Größe, den sogenannten *plastic spin*, beschrieben. Aus LU und PAPADOPOULOS [23] ist eine Theorie bekannt, die es erlaubt *sich entwickelnde plastische Anisotropie* im Rahmen eines additiven Ansatzes zu beschreiben.

1.2. Ziel dieser Arbeit

Aufbauend auf die Theorie von LU und PAPADOPOULOS [23] präsentierten ASMANOGLO et al. [2] einen Vorschlag für ein Prototyp-Modell. Dieses soll in der Lage sein, ein von KIM und YIN [16] experimentell bestätigtes Phänomen abzubilden: In einem einachsigen Zugversuch eines kaltgewalzten Blechs richtet sich die erste Anisotropie-Hauptachse im Laufe des Prozesses entlang der Hauptbelastungsrichtung aus. In einem *Ein-Element-Test* zeigte das vorgeschlagene Modell eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten. Im Entstehungszeitraum dieser Arbeit erschien außerdem die Veröffentlichung von KAISER et al. [14], in welcher ein detaillierteres Modell und komplexere, numerische Simulationen vorgestellt wurden.

Neben weiteren essentiellen Elementen eines Materialmodells wird hier das

1. Einleitung

vorgeschlagene *elastische Potenzial* ψ genannt. Dieses hat die Form

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{C}, \mathbf{C}_p, \kappa) := & \frac{\mu}{2} \left(\text{Sp}(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1}) - 2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} - 3 \right) \\ & + \frac{\lambda}{2} \ln^2 \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} + R_{\text{inv}} \left[\kappa + \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon_0}\right) \right], \end{aligned} \quad (1.6)$$

mit den Materialparametern μ , λ , R_{inv} und ε_0 sowie einem lagrangeschen Strecktensor, dem sogenannten *rechten Cauchy-Green-Tensor* \mathbf{C} (siehe Unterabschnitt 2.1.3) und den internen Variablen \mathbf{C}_p und κ .

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ausgehend von diesem Potenzial die Konstitutivgleichungen eines Materialmodells für isotrop-elastisch-plastisches Materialverhalten im Rahmen eines additiven Ansatzes herzuleiten. Ferner soll das abgeleitete Materialmodell in ein Programm für Finite-Elemente-Berechnungen implementiert werden. Außerdem soll das Konvergenzverhalten der Implementierung anhand eines einfachen *Ein-Element-Tests* überprüft und dokumentiert werden. Abschließend werden die Ergebnisse weiterer einfacher Probleme gezeigt und kurz diskutiert.

Die im Rahmen dieser Arbeit erarbeiteten Konstitutivgleichungen und die aus der Implementierung gewonnenen Erkenntnisse sollen als Grundlage für ein erweitertes Materialmodell für anisotrope Plastizität dienen.

1.3. Anmerkungen zur Notation

Vorab sei auf vereinbarte Konventionen und Spezifika der Notation im Rahmen dieser Arbeit hingewiesen.

Dezimaltrennzeichen

Für die Darstellung von Dezimalzahlen wird der Punkt als Dezimaltrennzeichen verwendet.

Koordinatensysteme

Für kontinuumsmechanische Beschreibungen werden ausschließlich rechtshändige kartesische Koordinaten mit der Basis

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

verwendet.

Tensoren

Für die Darstellung von Tensoren zweiter Stufe werden fettgedruckte Großbuchstaben (\mathbf{A} , \mathbf{B} , usw.) und für Tensoren vierter Stufe Buchstaben mit Doppelstrich (\mathbb{A} , \mathbb{B} , usw.) verwendet. Bei Tensoren höherer Stufen wird der Rang mit hochgesetzter Ziffer ($\overset{6}{\mathbb{A}}$, $\overset{6}{\mathbb{B}}$, usw.) angegeben.

1. Einleitung

Es wird sowohl die symbolische als auch die Index-Schreibweise verwendet. Aus Gründen der Einfachheit wird *nicht* zwischen Ko- und Kontravarianz unterschieden, d.h. Tensorkomponenten werden einheitlich unten indiziert. Außerdem sei die *einsteinsche Summenkonvention* vereinbart, wonach über doppelt auftretende Indizes innerhalb eines Produktes summiert wird, ohne dass ein Summenzeichen explizit angeschrieben wird. Dadurch werden Formeln in Index-Schreibweise mit vielen tensoriellen Größen erheblich übersichtlicher. Seien \mathbf{A} und \mathbf{B} Tensoren zweiter Stufe, dann gilt für die Produkte

$$\mathbf{AB} = \sum_{k=1}^3 A_{ik} B_{kj} \quad (1.8a)$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{ij} \quad (1.8b)$$

die äquivalente Darstellung

$$\mathbf{AB} = A_{ik} B_{kj} \quad (1.9a)$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}. \quad (1.9b)$$

Sofern nicht anders angegeben, wird beim Skalarprodukt immer über den letzten Index der ersten Größe und den ersten Index der zweitgenannten Größe summiert bzw. wird beim Frobenius-Skalarprodukt immer über die letzten beiden Indizes der ersten Größe und die ersten beiden Indizes der zweitgenannten Größe summiert. Für die Tensoren n-ter und m-ter Stufe \mathbb{A}, \mathbb{B} gilt also

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A} \underbrace{\dots}_{n-1} i \mathbb{B}_i \underbrace{\dots}_{m-1} \quad (1.10a)$$

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} = \mathbb{A} \underbrace{\dots}_{n-2} ij \mathbb{B}_{ij} \underbrace{\dots}_{m-2}. \quad (1.10b)$$

Abweichungen von dieser Regel werden an entsprechender Stelle angegeben.

Ausgezeichnete Tensoren

Für das *Kronecker-Symbol* δ gilt wie üblich

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}. \quad (1.11)$$

Nachfolgend wird eine Übersicht über einige wiederkehrende Tensoren gegeben:

$$\text{Einheitstensor zweiter Stufe:} \quad \mathbf{1}_{ij} = \delta_{ij} \quad (1.12a)$$

$$\text{Einheitstensor vierter Stufe:} \quad \mathbb{1}_{ijkl} := \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (1.12b)$$

$$\text{Symmetrie bildender Tensor:} \quad \mathbb{1}_{ijkl}^s := \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.12c)$$

$$\text{Spur bildender Tensor:} \quad \mathbb{1}_{ijkl}^{\text{Sp}} := (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (1.12d)$$

$$\text{Deviator bildender Tensor:} \quad \mathbb{D} := \mathbb{1} - \frac{1}{3} \mathbb{1}^{\text{Sp}} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (1.12e)$$

2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In diesem Kapitel wird kurz der kontinuumsmechanische Hintergrund der Arbeit erläutert. Es wird nur soweit darauf eingegangen, wie es dem Verständnis des plastischen Materialmodells im nächsten Kapitel dient. Eine umfangreiche Betrachtung des Themas findet sich in der facheinschlägigen Literatur, zum Beispiel in TRUESDELL und NOLL [41], MALVERN [25] und BONET und WOOD [4].

Zu Beginn des Kapitels wird die Kinematik eines Körpers erläutert. Ausgehend von der Kinematik wird eine mathematische Beschreibung von Verformungen abgeleitet und verschiedene Verzerrungsgrößen vorgestellt. Anschließend wird das Prinzip der Spannungen eingeführt. Abschließend werden geltende Erhaltungsgleichungen und Bilanzgleichungen der Kontinuumstheorie betrachtet. In weiten Teilen ist die hier gewählte Notation und Nomenklatur an jene in LAMBRECHT [19] und ULZ [43] angelehnt.

2.1. Kinematik

In der Kontinuumsmechanik betrachtet man einen Körper als eine Menge infinitesimaler Punkte, deren Lage im Raum zum Zeitpunkt $t = 0$ durch den Ortsvektor \mathbf{X} bezüglich eines globalen Koordinatensystems beschrieben werden. Man spricht in diesem Fall von der *Ausgangskonfiguration* oder *lagrangeschen Konfiguration*³ \mathcal{B} . Größen der Ausgangskonfiguration werden auch als *materielle* Größen bezeichnet. Als Folge von zeitabhängigen externen Volumen- und Flächenlasten verformt sich der Körper entsprechend. Die Lage der Punkte zum Zeitpunkt $t \neq 0$ wird durch die Ortsvektoren \mathbf{x} beschrieben. Man spricht hierbei von der *Momentankonfiguration* oder *eulerschen Konfiguration*⁴ \mathcal{S} . Größen auf dieser Konfiguration werden auch als *räumliche* Größen bezeichnet. Abbildung 2.1 zeigt schematisch beide Konfigurationen.

2.1.1. Bewegung

Der Zusammenhang zwischen Punkten der Ausgangskonfiguration und den entsprechenden Punkten der Momentankonfiguration wird durch eine nichtlineare Deformationsabbildung φ beschrieben:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

³engl. *material configuration* oder *Lagrangean configuration*

⁴engl. *current configuration* oder *Eulerian configuration*

2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

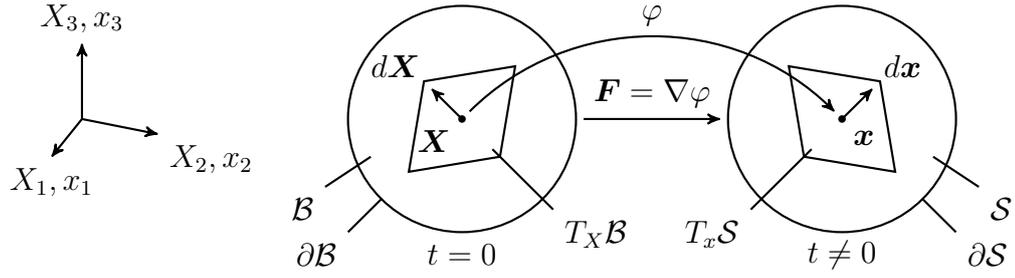


Abbildung 2.1. Kinematik eines kontinuierlichen Körpers: Alle Punkte des Körpers befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ausgangskonfiguration \mathcal{B} , begrenzt durch den Rand $\partial\mathcal{B}$ und zum Zeitpunkt $t \neq 0$ in der Momentankonfiguration \mathcal{S} , begrenzt durch den Rand $\partial\mathcal{S}$. Die nichtlineare Abbildung φ bildet Punkte $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ der Ausgangskonfiguration auf die entsprechende Position $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{S}$ der Momentankonfiguration ab. Der Deformationsgradient $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ bildet Tangentialvektoren $d\mathbf{X} \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$ des lagrangeschen Tangentialraums auf die entsprechenden Tangentialvektoren $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$ des eulerschen Tangentialraums ab.

Dabei ist $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ die Bahnlinie des Teilchens, welches sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle \mathbf{X} befunden hat.

2.1.2. Deformation

Um eine Aussage über die Deformation eines Körpers treffen zu können, müssen die Relativbewegungen von verschiedenen Punkten des Körpers untersucht werden. $d\mathbf{X}$ sei der Abstand zweier unmittelbar benachbarter Punkte P und Q der Ausgangskonfiguration:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P. \quad (2.2)$$

Zum Zeitpunkt $t \neq 0$ befinden sich die beiden Punkte p und q der Momentankonfiguration an der Stelle

$$\mathbf{x}_p = \varphi(\mathbf{X}_P, t) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_q = \varphi(\mathbf{X}_Q, t). \quad (2.3)$$

Daraus folgt für den Abstand der beiden Punkte in der Momentankonfiguration

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_q - \mathbf{x}_p = \varphi(\mathbf{X}_Q, t) - \varphi(\mathbf{X}_P, t). \quad (2.4)$$

Durch die Erweiterung mit Gleichung 2.2 folgt schließlich die Darstellung

$$d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}_P + d\mathbf{X}, t) - \varphi(\mathbf{X}_P, t). \quad (2.5)$$

Die Definition des *Deformationsgradienten* \mathbf{F} als

$$\mathbf{F} := \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{X}} = \nabla\varphi \quad (2.6)$$

führt schlussendlich zur Darstellung des Vektors $d\mathbf{x}$ in Abhängigkeit von $d\mathbf{X}$ in der Form

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad \text{bzw.} \quad dx_i = F_{iI}dX_I. \quad (2.7)$$

2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Betrachtet man die Konfigurationen \mathcal{B} und \mathcal{S} als differenzierbare Mannigfaltigkeiten, mit den Tangentialräumen $T_X\mathcal{B}$ und $T_x\mathcal{S}$ in den Punkten \mathbf{X} und \mathbf{x} , so ist \mathbf{F} die Tangentialabbildung

$$\mathbf{F} : \begin{cases} T_X\mathcal{B} & \rightarrow T_x\mathcal{S} \\ d\mathbf{X} & \mapsto d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \end{cases} \quad (2.8)$$

Da der Deformationsgradient \mathbf{F} Größen von einer Konfiguration in eine andere Konfiguration transformiert, ist er strenggenommen kein Tensor. Bisweilen spricht man daher auch von einem *Zwei-Punkt-Tensor*, um zu verdeutlichen, dass er Basen in unterschiedlichen Konfigurationen hat.

Weiters kann mittels einer polaren Zerlegung gezeigt werden, dass sich der Deformationsgradient in die Anteile \mathbf{R} und \mathbf{U} bzw. \mathbf{R} und \mathbf{V} zerlegen lässt, wobei gilt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \quad (2.9)$$

Hierbei ist der *Rotationstensor* \mathbf{R} ein orthogonaler Tensor, welcher reine Starrkörperrotationen beschreibt. Der *rechte Strecktensor* \mathbf{U} und der *linke Strecktensor* \mathbf{V} hingegen sind symmetrische Tensoren und beschreiben eine reine Streckung. Die Zerlegung ist in Abbildung 2.2 veranschaulicht.

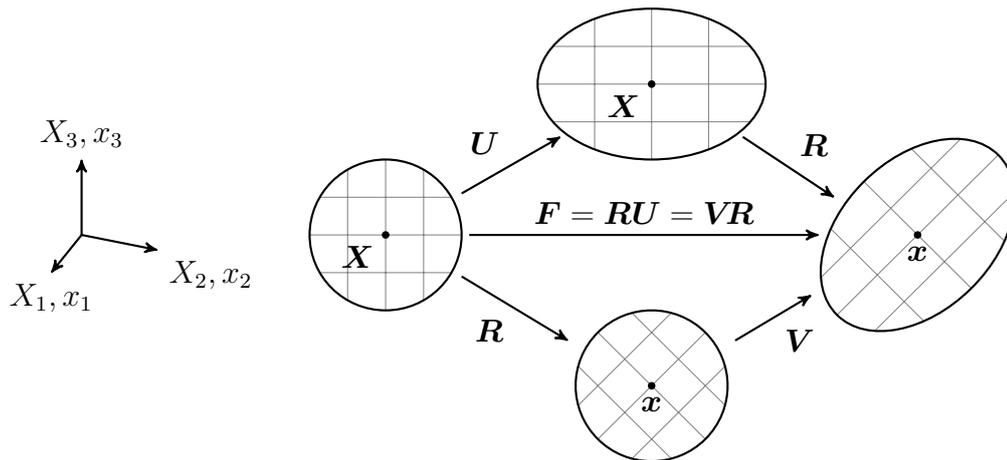


Abbildung 2.2. Polare Zerlegung des Deformationsgradienten: Die Tangentialabbildung \mathbf{F} kann aufgefasst werden als eine Streckung auf der Ausgangskonfiguration, beschrieben durch den rechten Strecktensor \mathbf{U} und anschließende Rotation in die Momentankonfiguration, beschrieben durch den Rotationstensor \mathbf{R} oder als eine Rotation in die Momentankonfiguration, beschrieben durch den Rotationstensor \mathbf{R} mit anschließender Streckung in der Momentankonfiguration, beschrieben durch den linken Strecktensor \mathbf{V} .

Neben den Längenänderungen beschreibt der Deformationsgradient \mathbf{F} also auch Starrkörperrotationen. Da aber Starrkörperbewegungen in einem Körper keine Spannungen hervorrufen, eignet sich \mathbf{F} nicht, um in den Konstitutivgleichungen die Formänderungen eines Körpers zu quantifizieren. Außerdem ist man in der Kontinuumsmechanik klassischerweise bestrebt, sich auf eine bestimmte Konfiguration zu beziehen, in welcher sämtliche Größen der Konstitutivgleichungen definiert sind, was für \mathbf{F} ebenfalls nicht zutrifft.

2.1.3. Metrik und Verzerrungsmaße

Man braucht deshalb ein Maß für die relative Längenänderung von Linienelementen infolge der Deformation. Die Länge dS eines infinitesimalen Linienelementes $d\mathbf{X}$ ist charakterisiert durch dessen Skalarprodukt. In der Differentialgeometrie definiert ein sogenannter *metrischer Tensor* dieses Skalarprodukt. Man nennt den metrischen Tensor auf der Ausgangskonfiguration die *materielle Metrik* \mathbf{G} und auf der Momentankonfiguration die *räumliche Metrik* \mathbf{g} . Seien $d\mathbf{X} \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$ und $d\tilde{\mathbf{X}} \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$ Tangentenvektoren in der Ausgangskonfiguration \mathcal{B} , dann gilt für das Skalarprodukt

$$d\mathbf{X} \cdot d\tilde{\mathbf{X}} := d\mathbf{X}\mathbf{G}d\tilde{\mathbf{X}} = |d\mathbf{X}||d\tilde{\mathbf{X}}| \cos(\angle(d\mathbf{X}, d\tilde{\mathbf{X}})). \quad (2.10)$$

Analoges gilt für Tangentenvektoren der Momentankonfiguration und die räumliche Metrik.

Die Komponenten eines metrischen Tensors ergeben sich aus dem Skalarprodukt der Basisvektoren. Für ein kartesisches Koordinatensystem, wie der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegt, entsprechen die Komponenten genau jenen des Kronecker-Symbols bzw. entspricht der metrische Tensor dem Einheitstensor zweiter Stufe:

$$G_{IJ} = g_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{G} = \mathbf{g} = \mathbf{1}. \quad (2.11)$$

Die räumliche Länge ds eines Linienelementes der Momentankonfiguration kann geschrieben werden als:

$$ds = |d\mathbf{x}|_g = \sqrt{d\mathbf{x}\mathbf{g}d\mathbf{x}}. \quad (2.12)$$

Unter Verwendung von Gleichung 2.7 führt dies zu

$$ds = \sqrt{dX_I F_{Ii} g_{ij} F_{jJ} dX_J} \quad \text{bzw.} \quad ds = \sqrt{d\mathbf{X}\mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{F} d\mathbf{X}}. \quad (2.13)$$

Hieraus folgt die Definition des *rechten Cauchy-Green Tensors* \mathbf{C} in der Form

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{F}. \quad (2.14)$$

Der Tensor \mathbf{C} ist eine Größe der Ausgangskonfiguration und quantifiziert die räumliche Länge ds eines verformten räumlichen Linienelementes $d\mathbf{x}$, ausgehend von dessen Abbildung $d\mathbf{X}$ auf der Ausgangskonfiguration. Eine analoge Betrachtung für die materielle Länge dS , wie in den Gleichungen 2.12 und 2.13, führt zur Definition des *linken Cauchy-Green Tensors* $\mathbf{b} := \mathbf{F}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^T$, auf dessen Bedeutung hier nicht weiter eingegangen wird.

Die Idee ist nun, die Länge eines Linienelementes vor und nach der Verformung zu vergleichen. Betrachtet man als Streckung λ beispielsweise die Hälfte der Differenz der jeweiligen Längen zum Quadrat, also $\lambda := \frac{1}{2}(ds^2 - dS^2)$, so folgt daraus mit Gleichung 2.13, Gleichung 2.14 und $dS^2 = d\mathbf{X}\mathbf{G}d\mathbf{X}$:

$$\lambda = d\mathbf{X}\mathbf{E}d\mathbf{X} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}), \quad (2.15)$$

wobei \mathbf{E} der *Green-Lagrange-Verzerrungstensor* ist. Basierend darauf definierten SETH [38] und HILL [11] eine ganze Klasse von Verzerrungsmaßen

$$\mathbf{E}^m(\mathbf{C}) := \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{C}^{\frac{m}{2}} - \mathbf{G}^{\frac{m}{2}}) & \forall m \in \mathbb{R}^{m \neq 0} \\ \frac{1}{2} \ln \mathbf{C} & \forall m = 0 \end{cases}. \quad (2.16)$$

2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Für $m = 2$ erhält man genau den Green-Lagrange-Verzerrungstensor aus Gleichung 2.15.

Setzt man in Gleichung 2.14 für den Deformationsgradienten die Polarzerlegung in \mathbf{R} und \mathbf{U} aus Gleichung 2.9 ein, so führt dies zur Darstellung:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{g} \mathbf{R} \mathbf{U} \quad \text{bzw.} \quad C_{IJ} = U_{IK} R_{Ki} g_{ij} R_{jL} U_{LJ}. \quad (2.17)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung 2.11, der Eigenschaft $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ und der Symmetrie von \mathbf{U} vereinfacht sich Gleichung 2.17 zu:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad \text{bzw.} \quad C_{IJ} = U_{IK} U_{KJ}. \quad (2.18)$$

Der rechte Cauchy-Green Tensor ist also von Starrkörperbewegungen unabhängig. Als positiv definite, symmetrische Größe der Ausgangskonfiguration eignen sich \mathbf{C} sowie die davon abgeleiteten Verzerrungsgrößen $\mathbf{E}^m(\mathbf{C})$ zur Quantifizierung der Verformung in den Konstitutivgleichungen einer lagrangeschen Betrachtungsweise.

2.2. Spannungen

Im letzten Abschnitt wurde eine geeignete Größe zur mathematischen Beschreibung der Kinematik eines deformierten Körpers eingeführt. Praktisch setzt ein Körper einer Verformung einen Widerstand entgegen. Dieser zweite Aspekt des Materialgesetzes soll in diesem Abschnitt betrachtet werden.

Gegeben sei ein verformter Körper in der Momentankonfiguration \mathcal{S} zum Zeitpunkt $t \neq 0$. Schneidet man den Körper gedanklich in zwei Hälften, wie in Abbildung 2.3 rechts, muss sogleich eine Kraftgröße an den Schnittflächen eingeführt werden, um die mechanische Wechselwirkung zwischen den beiden Teilen zu beschreiben. Sei $\Delta \mathbf{f}$ die Ersatzkraft, die auf einer Teilfläche Δa in der Umgebung eines Punktes \mathbf{x} auf der Schnittfläche wirkt, dann folgt für den Spannungsvektor:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) := \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da}. \quad (2.19)$$

Gemäß des *Cauchy'schen Spannungstheorems* gilt zwischen dem Spannungsvektor \mathbf{t} und der Flächennormalen \mathbf{n} ein linearer funktionaler Zusammenhang. Dies führt zur Definition des *Cauchy'schen Spannungstensors* $\boldsymbol{\sigma}$ in der Form

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) =: \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}. \quad (2.20)$$

Die Cauchy-Spannungen beziehen die tatsächlich wirkende Schnittkraft auf das tatsächlich verformte Flächenelement, weshalb man die Cauchy-Spannungen auch als wahre Spannungen bezeichnet. Der *Kirchhoff'sche Spannungstensor* $\boldsymbol{\tau}$ ergibt sich durch Multiplikation mit J :

$$\boldsymbol{\tau} := J \boldsymbol{\sigma} \quad \text{mit} \quad J = \det(\mathbf{F}). \quad (2.21)$$

Die Cauchy- und Kirchhoff-Spannungen sind Größen der Momentankonfiguration. Eine lagrangesche Betrachtungsweise erfordert jedoch die Definition von Verzerrungs- und Spannungsgrößen in der Ausgangskonfiguration.

2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Es sei $\tilde{\mathbf{T}}$ der nominale Spannungsvektor, der die wahre infinitesimale Flächenkraft $d\mathbf{f}$ auf das unverformte Flächenelement dA bezieht:

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) := \frac{d\mathbf{f}}{dA} = \frac{da}{dA} \mathbf{t}, \quad (2.22)$$

dann folgt mit $\mathbf{n}da = J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}dA$ (vgl. Kapitel 4.9 von [4]) eine alternative Form des Cauchy'schen Spannungstheorems:

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t)\mathbf{N} \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} := J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T}. \quad (2.23)$$

Der *erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* \mathbf{P} ist ein Zweifeldtensor und bildet die Flächennormale \mathbf{N} der unverformten Schnittfläche der Ausgangskonfiguration \mathcal{B} auf den nominalen Spannungsvektor $\tilde{\mathbf{T}}$ der Momentankonfiguration \mathcal{S} ab. Durch formale Rücktransformation von $\tilde{\mathbf{T}}$ mittels der inversen Tangentialabbildung \mathbf{F}^{-1} erhält man den *materiellen Spannungsvektor* \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}. \quad (2.24)$$

Das Einsetzen in Gleichung 2.23 liefert schließlich:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{S}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} := J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}. \quad (2.25)$$

Der *zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* \mathbf{S} ist auf der Ausgangskonfiguration \mathcal{B} definiert und bildet die Flächennormale \mathbf{N} der unverformten Schnittfläche auf den materiellen Spannungsvektor \mathbf{T} ab. Hier sollte erwähnt werden, dass die Definition der Größen \mathbf{T} und \mathbf{S} rein geometrisch/mathematisch motiviert ist. Obwohl sie keine physikalische Relevanz besitzen, sind sie dennoch zur Beschreibung in Konstitutivgleichungen geeignet.

In Abbildung 2.3 ist ein Körper in Ausgangs- und Momentankonfiguration mit den entsprechenden Schnittgrößen dargestellt.

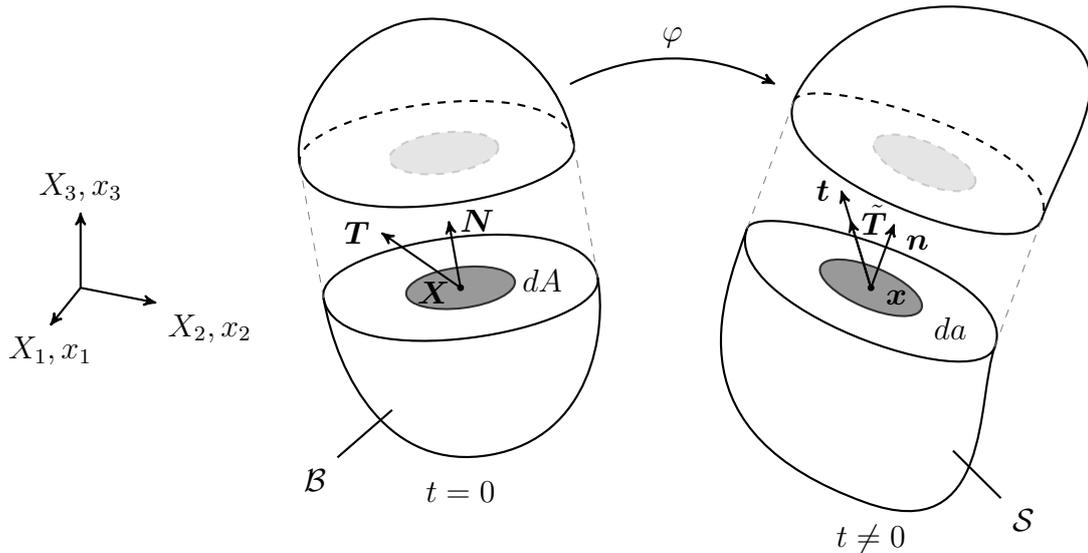


Abbildung 2.3. Freigeschnittener Körper und Schnittgrößen: In der Schnittfläche der Momentankonfiguration \mathcal{S} wirkt im infinitesimalen Flächenelement da mit der Flächennormalen \mathbf{n} die Kontaktspannung \mathbf{t} . Die entsprechenden Größen auf der Ausgangskonfiguration \mathcal{B} ergeben sich durch geeignete Rücktransformationen.

2.3. Bilanz- und Erhaltungsgleichungen

In diesem Abschnitt werden die Erhaltungssätze für Masse und Impuls, sowie der erste und zweite Hauptsatz der Thermodynamik in differentieller Form für eine lagrangesche Formulierung von quasistatischen und adiabaten Problemen angegeben. Für eine umfassende Betrachtung der physikalischen Bilanzgleichungen in der Kontinuumsmechanik siehe beispielsweise MALVERN [25].

Massenerhaltung

Die Erhaltung der Masse kann angegeben werden als:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \quad (2.26)$$

mit der materiellen Dichte ρ_0 .

Impulserhaltung

Die lokale Form der Impulserhaltung kann angegeben werden als:

$$\text{DIV}[\mathbf{P}] + \rho_0 \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (2.27)$$

wobei $\text{DIV}[\mathbf{P}] = \mathbf{P}_{Ji,J}$ die Divergenz des ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors bezüglich der materiellen Koordinaten \mathbf{X} , ρ_0 die materielle Dichte und $\boldsymbol{\gamma}$ die Körperkraft pro Einheitsmasse ist.

Drehimpulserhaltung

In der eulerschen Betrachtungsweise manifestiert sich die Drehimpulserhaltung in der Symmetrie des Cauchy'schen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$. Analog dazu gilt in der Ausgangskonfiguration, dass der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \boldsymbol{S} symmetrisch ist:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^T. \quad (2.28)$$

Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Die totale Energie E ist die Summe aus innerer Energie U und kinetischer Energie K . Der erste Hauptsatz der Thermodynamik für adiabate Systeme besagt, dass die zeitliche Änderung der totalen Energie gleich der mechanischen Leistung P_{ext} ist:

$$\frac{d}{dt}(K + U) = P_{\text{ext}}, \quad (2.29)$$

wobei für die kinetische und die innere Energie gilt:

$$K := \int_S \frac{1}{2} |\boldsymbol{v}|^2 \underbrace{\rho}_{dm} dv \quad \text{und} \quad U := \int_S u \rho dv. \quad (2.30)$$

Hierbei ist \boldsymbol{v} die Geschwindigkeit des infinitesimalen Massenpunktes dm und u dessen spezifische innere Energie. Für die mechanische Leistung P_{ext} gilt:

$$P_{\text{ext}} := \int_{\partial S} \boldsymbol{t} \boldsymbol{v} da + \int_S \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{v} \rho dv, \quad (2.31)$$

mit der Kontaktspannung \boldsymbol{t} und der Körperkraft $\boldsymbol{\gamma}$. Durch Anwenden des gaußschen Integralsatzes und Einsetzen der dynamischen Impulsgleichung erhält man nach einigen Umformungen für Gleichung 2.31 die alternative Darstellung⁵:

$$P_{\text{ext}} := \frac{d}{dt} \int_S \frac{1}{2} |\boldsymbol{v}|^2 \rho dv + \int_S \boldsymbol{\sigma} : \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{l}} dv, \quad (2.32)$$

mit dem *Geschwindigkeitsgradienten* \boldsymbol{l} , für den gilt:

$$\boldsymbol{l} := \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{F}^{-1}. \quad (2.33)$$

Das Einsetzen der Gleichungen 2.32 und 2.30 in Gleichung 2.29 und die Tatsache, dass der erste Hauptsatz für jedes beliebige Teilvolumen $\tilde{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}$ erfüllt sein muss, führt schließlich zur lokalen, eulerschen Darstellung der Bilanz für die innere Energie adiabater Systeme:

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{l}. \quad (2.34)$$

Auf der Ausgangskonfiguration gilt entsprechend:

$$\rho_0 \dot{u} = \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}}. \quad (2.35)$$

⁵vgl. MALVERN [25]

2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Weiters sind durch Einführung der lokalen Spannungsleistung \mathcal{P} die sogenannten arbeitskonjugierten Paare definiert:

$$\mathcal{P} := \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}, \quad (2.36)$$

mit dem Deformationsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)$.

Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Während der erste Hauptsatz der Thermodynamik die Energieumwandlung während eines Prozesses beschreibt, trifft der zweite Hauptsatz eine Aussage darüber, in welche Richtung diese Umwandlung abläuft. Eine in der Kontinuumsmechanik häufig angewandte Form ist die sogenannte *Clausius-Duhem-Ungleichung*. Für adiabate Prozesse lautet diese in lagrangescher Formulierung:

$$\mathcal{D} := \mathcal{P} - \dot{\psi} \geq 0, \quad (2.37)$$

mit der Dissipation \mathcal{D} , der lokalen Spannungsleistung \mathcal{P} und der *helmholtzschen freien Energie* ψ . Für reversible Prozesse ist die Dissipation gleich null, für irreversible Prozesse strikt größer als null.

3. Materialmodell und Implementierung

Dieses Kapitel widmet sich der Herleitung der Konstitutivgleichungen des plastischen Materialmodells, sowie ihrer algorithmischen Formulierung und Implementierung in ein bestehendes Finite-Elemente-Programm.

Zu Beginn werden, ausgehend vom zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, die grundlegenden Zusammenhänge für eine Interne-Variablen-Formulierung hergeleitet. Anschließend wird das elastische Potenzial, das einen wesentlichen Teil dieser Arbeit darstellt, definiert, ehe die Fließfunktion als zweite entscheidende Randbedingung des plastischen Materialmodells eingeführt wird. Danach werden die Evolutionsgleichungen der internen Variablen über ein implizites Einschritt-Integrationsverfahren hergeleitet und es wird ein iterativer Algorithmus zur Lösung dieses gekoppelten impliziten Gleichungssystems vorgestellt. Abschließend wird kurz auf die Implementierung des plastischen Materialmodells in das Finite-Elemente Programm **SOOFEA** eingegangen.

3.1. Clausius-Duhem-Ungleichung

Den Ausgangspunkt für die Herleitung des Materialmodells stellt die *Clausius-Duhem-Ungleichung* aus Gleichung 2.37 dar. Hierin ist die *helmholtzsche freie Energie* $\psi(\mathbf{C}, \mathbf{C}_p, \kappa)$ eine Funktion des rechten Cauchy-Green Tensors \mathbf{C} , der plastischen Metrik \mathbf{C}_p und einer Verfestigungsvariable κ . Für die Rate der freien Energie gilt dementsprechend:

$$\dot{\psi} = \frac{d}{dt}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}_p} : \dot{\mathbf{C}}_p + \frac{\partial\psi}{\partial\kappa} \dot{\kappa}. \quad (3.1)$$

Die Größen \mathbf{C}_p und κ sind interne Variablen zur Beschreibung der Pfadabhängigkeit plastischer Prozesse. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt

$$\mathbf{C}_p|_{t=0} = \mathbf{G} \quad \text{und} \quad \kappa|_{t=0} = 0. \quad (3.2)$$

Ausgehend von Gleichung 2.15 folgt für die Rate des Green-Lagrange-Verzerrungstensors, dass gilt:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{d}{dt}\mathbf{E} = \underbrace{\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{C}}}_{\frac{1}{2}\overset{s}{\mathbf{I}}} : \dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{G}} : \underbrace{\dot{\mathbf{G}}}_0 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}. \quad (3.3)$$

Die lokale Spannungsleistung \mathcal{P} kann also angegeben werden als:

$$\mathcal{P} = \mathbf{S} : \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}. \quad (3.4)$$

3. Materialmodell und Implementierung

Das Einsetzen der Gleichungen 3.1 und 3.4 in Gleichung 2.37 führt zur Darstellung:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathbf{S} : \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} - \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} - \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}_p} : \dot{\mathbf{C}}_p - \frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\dot{\kappa} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\mathbf{S} - \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}}\right) : \dot{\mathbf{C}}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}_p} : \dot{\mathbf{C}}_p - \frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\dot{\kappa}}_{\textcircled{2}} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Für rein elastische und damit reversible Prozesse muss Gleichung 3.5 ebenfalls erfüllt sein. Genau genommen gilt

$$\dot{\mathbf{C}} \neq \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{C}}_p = \mathbf{0}, \quad \dot{\kappa} = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{D} = 0 \quad (3.6)$$

bei rein elastischem Materialverhalten. Aus Gleichung 3.5 kann damit geschlossen werden, dass

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}}. \quad (3.7)$$

Tatsächlich ist das die Formulierung der aktuellen Spannungen infolge eines deformierten Zustandes für *hyperelastisches Materialverhalten*⁶, eine Eigenschaft, welche das hier abgeleitete Materialmodell ebenfalls aufweisen soll. Gleichung 3.7 wird deshalb als Definition der zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungen verwendet. Der gesamte Term $\textcircled{1}$ in 3.5 wird damit identisch gleich null und es folgt für die Dissipation \mathcal{D} :

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{S} - \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}}\right) : \dot{\mathbf{C}} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} = -\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}_p} : \dot{\mathbf{C}}_p - \frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\dot{\kappa} \geq 0. \quad (3.8)$$

Für die negativen Ableitungen des elastischen Potentials ψ nach den internen Variablen \mathbf{C}_p und κ werden zudem die Bezeichnungen $\tilde{\Sigma}$ und q eingeführt. Man nennt diese die *thermodynamisch konjugierten, spannungsähnlichen Größen* zu den entsprechenden *verformungsähnlichen Größen* \mathbf{C}_p und κ :

$$\tilde{\Sigma} := -\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}_p} \quad \text{und} \quad q := -\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}. \quad (3.9)$$

3.2. Elastisches Potenzial

Wie eingangs erwähnt, soll in dieser Arbeit ein Materialmodell basierend auf dem vorgeschlagenen elastischen Potenzial aus ASMANOGLO et al. [2] abgeleitet werden. Dieses Potenzial wurde in Gleichung 1.6 bereits angegeben. Darin bildet der letzte Term ein nichtlineares Verfestigungsverhalten ab. Im Gegensatz dazu soll in dieser Arbeit nur lineare, isotrope Verfestigung berücksichtigt werden. Das Potenzial wird

⁶Hier ist die verrichtete Verformungsarbeit nur vom anfänglichen und aktuellen Verformungszustand, nicht aber vom Verformungspfad abhängig, was auf elastische Formänderungen zutrifft. Die Spannungsantwort eines Verformungszustandes wird dabei von einem elastischen Potenzial ψ abgeleitet. Siehe auch BONET und WOOD [4].

3. Materialmodell und Implementierung

daher entsprechend angepasst:

$$\psi := \underbrace{\frac{\mu}{2} \left(\text{Sp}(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1}) - 2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} - 3 \right)}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\frac{\lambda}{2} \ln^2 \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})}}_{\textcircled{1}} + \frac{1}{2} h \kappa^2, \quad (3.10)$$

mit den Materialparametern μ , λ und h , dem rechten Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} , der plastischen Metrik \mathbf{C}_p und der Verfestigungsvariable κ . Mit dem Term $\textcircled{1}$ wird die isotrope Verfestigung abgebildet. Der restliche Ausdruck $\textcircled{2}$ entspricht dem Vorschlag von ASMANOGLO et al. [2].

Ableitungen

Wie aus den Gleichungen 3.7 und 3.9 hervorgeht, können die unterschiedlichen Spannungen und spannungsähnlichen Größen als Ableitungen des elastischen Potentials nach \mathbf{C} , \mathbf{C}_p und κ ausgedrückt werden. An dieser Stelle werden die ersten, zweiten und gemischten Ableitungen angegeben. Eine stringente Ableitung ausgehend von Gleichung 3.10 befindet sich im Anhang A.2.

Für die erste Ableitung von ψ nach \mathbf{C} erhält man

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\mu}{2} (\mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{C}^{-1}) + \frac{\lambda}{2} \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \mathbf{C}^{-1}, \quad (3.11)$$

bzw. unter Berücksichtigung von Gleichung 3.7 folgt

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = \mu (\mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.12)$$

für den zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor.

Für die erste Ableitung von ψ nach \mathbf{C}_p erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung 3.9

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}_p} = -\tilde{\Sigma} = \frac{\mu}{2} (\mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_p^{-1}) - \frac{\lambda}{2} \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \mathbf{C}_p^{-1}. \quad (3.13)$$

Der Ausdruck für $\tilde{\Sigma}$ kann umgeschrieben werden, sodass

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= \frac{1}{2} \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C} \underbrace{\left[\mu (\mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \mathbf{C}^{-1} \right]}_{\mathbf{S}} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C} \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Mit der Einführung des *Mandel-Spannungstensors*⁷ Σ gilt außerdem:

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{2} \mathbf{C}_p^{-1} \Sigma \quad \text{mit} \quad \Sigma := \mathbf{C} \mathbf{S}. \quad (3.15)$$

⁷Benannt nach Jean MANDEL; alternative Spannungsgröße, die in der Plastizitätstheorie häufig angewandt wird. Ursprünglich im Rahmen der multiplikativen Plastizität definiert als $\Sigma_e := \mathbf{C}_e \mathbf{S}_e$, mit $\mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e$ und $\mathbf{S}_e = 2 \frac{\partial \psi(\mathbf{C}_e)}{\partial \mathbf{C}_e}$ (vgl. MANDEL [26]). Streng genommen stellt Σ nach Gleichung 3.15 eine Mandel-Spannungstensor-ähnliche Größe dar.

3. Materialmodell und Implementierung

Im Fall von isotroper Plastizität ist Σ symmetrisch.

Ferner gilt für die Ableitungen nach κ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \kappa} = -q = h\kappa \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \kappa \partial \kappa} = 0. \quad (3.16)$$

An späterer Stelle werden außerdem die zweiten und gemischten Ableitungen des elastischen Potentials nach \mathbf{C} und \mathbf{C}_p benötigt. Diese lauten wie folgt:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \ln \sqrt{\det(\mathbf{C} \mathbf{C}_p^{-1})} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}_p} = -\frac{\lambda}{4} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{C}_p}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C}_p \partial \mathbf{C}} = -\frac{\lambda}{4} \mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{C}_p}, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C}_p \partial \mathbf{C}_p} &= \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1} - \ln \sqrt{\det(\mathbf{C} \mathbf{C}_p^{-1})} \frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{C}_p} \right) \\ &\quad + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{C}_p} - \mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2 \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\text{mit: } \mathbb{K}_{1IJKL} = \left(\frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{C}_p} \right)_{IMKL} C_{MN} C_{pNJ}^{-1} \quad \text{und}$$

$$\mathbb{K}_{2IJKL} = C_{pIM}^{-1} C_{MN} \left(\frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{C}_p} \right)_{NJKL}.$$

\mathbf{C} und \mathbf{C}_p sind symmetrische Tensoren zweiter Stufe. Für die Ableitung der Inversen (siehe Anhang A.1) gilt:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right)_{IJKL} = -\frac{1}{2} (C_{IK}^{-1} C_{LJ}^{-1} + C_{IL}^{-1} C_{KJ}^{-1}), \quad (3.21a)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{C}_p} \right)_{IJKL} = -\frac{1}{2} (C_{pIK}^{-1} C_{pLJ}^{-1} + C_{pIL}^{-1} C_{pKJ}^{-1}). \quad (3.21b)$$

Weiter lauten die Ableitungen des Mandel-Spannungstensors:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{C}} = \mu \overset{s}{\mathbb{1}} \mathbf{C}_p^{-1} + \frac{\lambda}{2} \mathbb{1} \otimes \mathbf{C}^{-1}, \quad (3.22)$$

$$\text{mit: } \left(\overset{s}{\mathbb{1}} \mathbf{C}_p^{-1} \right)_{IJKL} = \overset{s}{\mathbb{1}}_{IMKL} C_{pMJ}^{-1}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{C}_p} = \mu \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{C}_p} - \frac{\lambda}{2} \mathbb{1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1}. \quad (3.23)$$

3.3. Fließfunktion

Wie in Gleichung 3.6 angegeben, sind die Raten der internen Variablen gleich null für rein elastische Formänderungen. Für elastisch-plastische Formänderungen hingegen gilt

$$\dot{\mathbf{C}}_p \neq \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \dot{\kappa} \neq 0. \quad (3.24)$$

Die Formulierung der Konstitutivgleichungen bedarf also der Fallunterscheidung, ob ein Lastschritt nur elastische, oder elastisch-plastische Verformungen hervorruft. Experimente wie der einachsige Zugversuch legen nahe, dass plastische Verformungen erst ab einer bestimmten Belastung einsetzen. Modelliert wird dieser Sachverhalt typischerweise, indem man eine *Fließfunktion* \mathfrak{F} einführt, die einen Bereich von Spannungszuständen festlegt, innerhalb derer rein elastische Formänderungen auftreten. Den Belastungszustand, ab dem bei weiterer Belastung plastische Formänderungen eintreten, nennt man die Fließgrenze. Sich verfestigende Materialien zeichnen sich dadurch aus, dass der Fließbeginn bei erneuter Belastung später einsetzt, als bei der erstmaligen Plastifizierung. Die Fließgrenze verschiebt sich also und der Bereich der „elastischen“ Spannungszustände wächst. Die Argumente einer Fließfunktion müssen also erstens den aktuellen Spannungszustand und zweitens den Verfestigungszustand widerspiegeln. In dieser Arbeit soll zur Beschreibung des Spannungszustandes der Mandel-Spannungstensor Σ aus 3.15 verwendet werden. Die Verfestigung wird durch die spannungsähnliche Größe $q(\kappa)$ aus 3.16 modelliert. Benötigt wird also eine Fließfunktion

$$\mathfrak{F} : \begin{cases} D_{\mathfrak{F}} & \rightarrow \mathbb{R}_0^- \\ (\Sigma, q) & \mapsto \mathfrak{F}(\Sigma, q) \leq 0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad D_{\mathfrak{F}} = \{(\Sigma, q) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \mid \mathfrak{F}(\Sigma, q) \leq 0\}, \quad (3.25)$$

die den Definitionsbereich⁸ $D_{\mathfrak{F}}$ auf die „elastischen“ Spannungszustände beschränkt. Der Rand $\partial D_{\mathfrak{F}}$ dieses Bereiches ist eine Schar von Hyperflächen im \mathbb{R}^6 -Spannungsraum mit dem Scharparameter q und wird als *Fließfläche* bezeichnet:

$$\partial D_{\mathfrak{F}} = \{(\Sigma, q) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \mid \mathfrak{F}(\Sigma, q) = 0\}. \quad (3.26)$$

Zustandsänderungen, also Be- und Entlastungen, innerhalb der Fließfläche rufen nur elastische Formänderungen hervor. Erreicht ein Spannungszustand die Fließfläche und erfolgt eine weitere Belastung, so verlaufen die weiteren Formänderungen plastisch. Während einer plastischen Verformung bleibt der Spannungszustand stets auf der (wachsenden) Fließfläche, das heißt es gilt $\mathfrak{F} = 0$.

Allgemein kann eine Fließfunktion auch dargestellt werden als

$$\mathfrak{F} = \phi(\Sigma, q) - c, \quad (3.27)$$

mit der „level set“-Funktion ϕ und einer konstanten Schranke c . Im Spannungsraum zeigt der Vektor $\partial_{\Sigma}\phi$ in Richtung der äußeren Flächennormale der Fließfläche und das infinitesimale Spannungsinkrement $d\Sigma$ kann als allgemeiner Vektor im Spannungsraum aufgefasst werden. Damit kann nun ein Kriterium für plastische Verformungen formuliert werden:

⁸Für allgemeine, 3-dimensionale Probleme ist der Raum des symmetrischen Tensors Σ 6-dimensional.

3. Materialmodell und Implementierung

$$\mathfrak{F} < 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} : d\Sigma \in \mathbb{R} \quad \text{elastische Deformation,} \quad (3.28a)$$

$$\mathfrak{F} = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} : d\Sigma < 0 \quad \text{elastische Entlastung,} \quad (3.28b)$$

$$\mathfrak{F} = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} : d\Sigma = 0 \quad \text{neutrale Spannungsumlagerung,} \quad (3.28c)$$

$$\mathfrak{F} = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} : d\Sigma > 0 \quad \text{plastische Deformation.} \quad (3.28d)$$

Neutrale Spannungsumlagerungen stellen einen Sonderfall dar, bei dem die Spannungstrajektorie genau tangential entlang der Fließfläche verläuft. Es wird angenommen, dass dieser Vorgang elastisch verläuft. Plastische Formänderungen treten also genau dann auf, wenn sich der aktuelle Spannungszustand auf der Fließfläche befindet und das Spannungsinkrement $d\Sigma$ nach außen zeigt.⁹ Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 3.1 schematisch dargestellt.

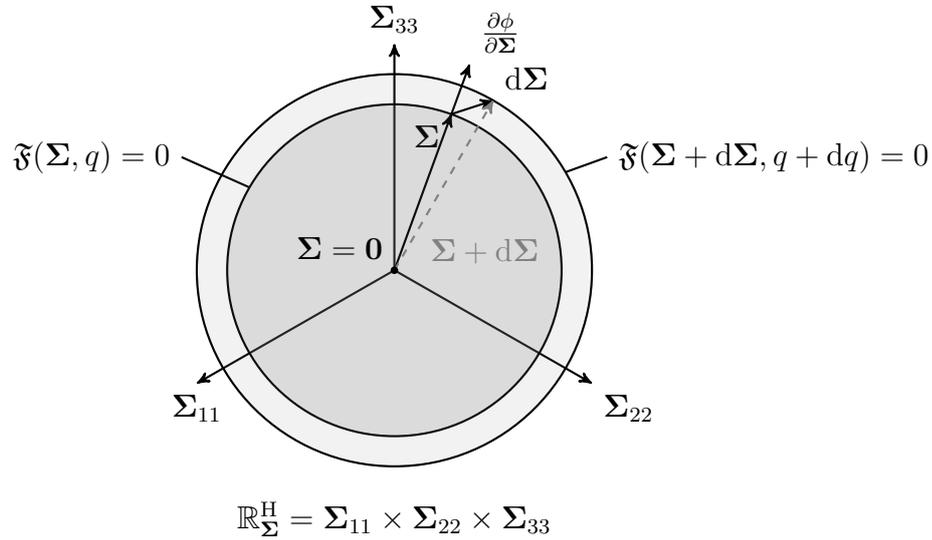


Abbildung 3.1. Von Mises-Fließfläche im Hauptspannungsraum \mathbb{R}_{Σ}^H der Mandel-Spannungen Σ : Der Spannungszustand Σ befindet sich auf der Fließfläche und das Spannungsinkrement $d\Sigma$ weist auf der Fließfläche nach außen und es gilt $\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} : d\Sigma > 0$. Der Spannungszustand $\Sigma + d\Sigma$ nach der plastischen Deformation liegt auf der neuen Fließfläche.

Im Hinblick auf die Erweiterbarkeit des Modells auf Anisotropie soll in dieser Arbeit eine Fließfunktion der Form

$$\mathfrak{F}(\Sigma, q) = \underbrace{\sqrt{\Sigma : \mathbb{H} : \Sigma}}_{\phi(\Sigma, q)} + \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}}q - \sqrt{\frac{2}{3}}y_0}_c \quad (3.29)$$

verwendet werden. Durch entsprechende Wahl des 4-stufigen *Hill-Tensors* \mathbb{H} können unterschiedliche anisotrope Materialien modelliert werden. Setzt man für \mathbb{H} den *Deviator bildenden Tensor* \mathbb{D} aus Gleichung 1.12e ein, dann folgt aus Gleichung 3.29 die

⁹Für eine ausführlichere Erläuterung siehe KHAN und HUANG [15].

3. Materialmodell und Implementierung

klassische *Huber-von Mises*-Fließfunktion. Die Größe y_0 gibt darin die anfängliche Fließspannung an (vgl. ULZ [42]).

Die Fließfunktion im Sinne dieser Arbeit lautet also:

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \phi - c \quad \text{mit} \quad \phi := \sqrt{\underbrace{\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{D} : \boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\Sigma}^{\text{D}}}} + \sqrt{\frac{2}{3}}q \quad \text{und} \quad c := \sqrt{\frac{2}{3}}y_0, \quad (3.30)$$

mit $\mathbb{D} = \mathbb{1} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$ aus Gleichung 1.12 und dem Deviator der Mandel-Spannungen $\boldsymbol{\Sigma}^{\text{D}} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{D}$.

Ableitungen

Vorgreifend auf den nachfolgenden Abschnitt werden hier die ersten und zweiten Ableitungen der „*level set*“-Funktion angegeben. Eine Herleitung findet sich im Anhang A.3.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{\text{D}}}{\sqrt{\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Sigma}^{\text{D}}}} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial q} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma} \partial \boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\mathbb{D}}{\sqrt{\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Sigma}^{\text{D}}}} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{\text{D}} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{\text{D}}}{(\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Sigma}^{\text{D}})^{3/2}} \quad (3.33)$$

Die zweite Ableitung $\partial_{qq}^2 \phi$ ist offenbar gleich null.

3.4. Interne Variablen

Nun stellt sich die Frage, wie sich die internen Variablen \mathbf{C}_p und κ während einer plastischen Formänderung entwickeln. Konkret werden Evolutionsgleichungen für die internen Variablen gesucht. Diese erhält man aus dem *Prinzip der maximalen Dissipation*:

$$\mathcal{D} = \max_{(\boldsymbol{\Sigma}, q) \in D_{\tilde{\mathfrak{F}}}} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\mathbf{C}}_p + q\dot{\kappa} \right\}. \quad (3.34)$$

Um dieses Optimierungsproblem mit der Nebenbedingung $\tilde{\mathfrak{F}} \leq 0 \leftrightarrow \phi \leq c$ zu lösen, wird die Lagrange-Funktion definiert:

$$\mathcal{L} := \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\mathbf{C}}_p + q\dot{\kappa} - \lambda(\phi - c), \quad (3.35)$$

mit dem Lagrange- oder plastischen Multiplikator λ ¹⁰. Werden nun die Ableitungen dieser Funktion gleich null gesetzt, folgen daraus Evolutionsgleichungen für die internen Variablen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} = \underbrace{\mathbb{1} : \dot{\mathbf{C}}_p}_{\dot{\mathbf{C}}_p} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} \quad \xrightarrow{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} = 0} \quad \boxed{\dot{\mathbf{C}}_p = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \dot{\kappa} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q} \quad \xrightarrow{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0} \quad \boxed{\dot{\kappa} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q}}. \quad (3.37)$$

¹⁰Nicht zu verwechseln mit dem Materialparameter λ in Gleichung 3.10.

3. Materialmodell und Implementierung

Für den plastischen Multiplikator λ muss außerdem eine Konsistenzbedingung, die so genannte *Karush-Kuhn-Tucker-Bedingung* des Optimierungsproblems, gelten:

$$\lambda \in \mathcal{K}, \mathcal{K} := \{\lambda \mid \lambda \geq 0; \phi \leq c; \lambda(\phi - c) = 0\}. \quad (3.38)$$

Die Ableitung $\partial_q \phi$ in 3.37 ist bereits aus Gleichung 3.32 bekannt. Die Größe $\partial_{\tilde{\Sigma}} \phi$ in 3.36 wird mit der Kettenregel berechnet:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\Sigma}} = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma}}_{\text{Gl. 3.31}} : \frac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{\Sigma}}, \quad (3.39)$$

wobei für $\partial_{\tilde{\Sigma}} \Sigma$ aus Gleichung 3.15 folgt, dass

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{\Sigma}} = 2\mathbf{C}_p \overset{s}{\mathbb{1}}. \quad (3.40)$$

Integration der internen Variablen

Die Evolutionsgleichungen sind nun in Ratenform gegeben. Finite-Elemente-Probleme werden jedoch in diskreten Zeitschritten gelöst. Betrachtet wird deshalb ein beliebiger Zeitschritt $[t_n, t_{n+1}]$. Zum Zeitpunkt t_n seien die internen Variablen gegeben. Integration der Raten über das gegebene Zeitintervall liefert:

$$\mathbf{C}_{p_{n+1}} = \mathbf{C}_{p_n} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\Sigma}} d\tau, \quad (3.41)$$

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q} d\tau. \quad (3.42)$$

Die Integrale in den Gleichungen 3.41 und 3.42 können nicht explizit ausgewertet werden, weshalb an dieser Stelle eine numerische Integration eingeführt wird. Verwendet wird in dieser Arbeit das *implizite Euler-Verfahren*. Damit werden die Evolutionsgleichungen für die internen Variablen überführt in:

$$\mathbf{C}_{p_{n+1}} := \mathbf{C}_{p_n} + \gamma \left. \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\Sigma}} \right|_{n+1}, \quad (3.43)$$

$$\kappa_{n+1} := \kappa_n + \gamma \left. \frac{\partial \phi}{\partial q} \right|_{n+1}, \quad (3.44)$$

mit dem inkrementellen plastischen Multiplikator $\gamma = \lambda(t_{n+1} - t_n)$, für den analog zu Gleichung 3.38 gilt:

$$\gamma \in \mathcal{K}_{n+1}, \mathcal{K}_{n+1} := \{\gamma \mid \gamma \geq 0; \phi_{n+1} \leq c; \lambda(\phi_{n+1} - c) = 0\}. \quad (3.45)$$

Ableitungen

Bevor nun im nächsten Abschnitt ein iterativer Algorithmus zum Lösen der impliziten Gleichungen 3.43 und 3.44 vorgestellt wird, werden hier vorab noch Ableitungen von $\mathbf{C}_{p_{n+1}}$ und κ_{n+1} nach γ und \mathbf{C} angegeben.

3. Materialmodell und Implementierung

Ableiten von Gleichung 3.43 mit der Kettenregel führt zunächst zur impliziten Darstellung:

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{p_{n+1}}}{\partial \gamma} = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\Sigma}} \Big|_{n+1} + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\Sigma} \partial \mathbf{C}_p} \Big|_{n+1} : \frac{\partial \mathbf{C}_{p_{n+1}}}{\partial \gamma} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_p}{\partial \mathbf{C}} \Big|_{n+1} = \gamma \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\Sigma} \partial \mathbf{C}} \Big|_{n+1} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\Sigma} \partial \mathbf{C}_p} \Big|_{n+1} : \frac{\partial \mathbf{C}_p}{\partial \mathbf{C}} \Big|_{n+1} \right] \quad (3.47)$$

Durch Auflösen der Gleichungen 3.46 und 3.47 nach $\partial_\gamma \mathbf{C}_{p_{n+1}}$ und $\partial_{\mathbf{C}_{n+1}} \mathbf{C}_{p_{n+1}}$ erhält man schließlich die explizite Form:

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{p_{n+1}}}{\partial \gamma} = \mathbb{A}_{n+1}^{-1} : \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\Sigma}} \Big|_{n+1} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_p}{\partial \mathbf{C}} \Big|_{n+1} = \gamma \mathbb{A}_{n+1}^{-1} : \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\Sigma} \partial \mathbf{C}} \Big|_{n+1}, \quad (3.49)$$

mit dem 4-stufigen Tensor \mathbb{A} , wobei

$$\mathbb{A} := \mathbb{1} - \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\Sigma} \partial \mathbf{C}_p}. \quad (3.50)$$

Ableiten von Gleichung 3.44 führt unter Berücksichtigung von Gleichung 3.32 direkt zu:

$$\frac{\partial \kappa_{n+1}}{\partial \gamma} = \frac{\partial \phi}{\partial q} \Big|_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{C}} \Big|_{n+1} = \mathbf{0}. \quad (3.52)$$

In den Gleichungen 3.49 und 3.50 tauchen die bisher unbekanntenen Ableitungen $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \Sigma \mathbf{C}} \phi$ und $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \Sigma \mathbf{C}_p} \phi$ auf. Erstere ergibt sich durch Ableitung von Gleichung 3.39 nach \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\Sigma} \partial \mathbf{C}} \right)_{IJKL} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{KL}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} \right)_{MN} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{\Sigma}} \right)_{MNIJ} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} \right) : \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{\Sigma}} \right)}_{\mathbf{0}} \\ &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \Sigma \partial \mathbf{C}} \right)_{MNKL} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{\Sigma}} \right)_{MNIJ}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

wobei für die Größe $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \Sigma \mathbf{C}} \phi$ gilt:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \Sigma \partial \mathbf{C}} = \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \Sigma \partial \Sigma}}_{\text{Gl. 3.33}} : \underbrace{\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{C}}}_{\text{Gl. 3.22}}. \quad (3.54)$$

3. Materialmodell und Implementierung

Die zweite Unbekannte ergibt sich durch Ableitung von Gleichung 3.39 nach \mathbf{C}_p :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\Sigma} \partial \mathbf{C}_p} \right)_{IJKL} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{pKL}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} \right)_{MN} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{\Sigma}} \right)_{MNIJ} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} \right)_{MN} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{pKL}} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{\Sigma}} \right)_{MNIJ}}_{\mathbb{D}^6} \\ &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \Sigma \partial \mathbf{C}_p} \right)_{MNKL} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{\Sigma}} \right)_{MNIJ} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} \right)_{MN} \mathbb{D}^6_{MNIJKL}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

wobei für die Größe $\partial_{\tilde{\Sigma} \mathbf{C}_p}^2 \phi$ gilt:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \Sigma \partial \mathbf{C}_p} = \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \Sigma \partial \Sigma}}_{\text{Gl. 3.33}} : \underbrace{\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{C}_p}}_{\text{Gl. 3.23}}. \quad (3.56)$$

Der 6-stufige Tensor \mathbb{D}^6 ist definiert als:

$$\mathbb{D}^6_{IJKLMN} := \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{pMN}} \left(2 \mathbf{C}_{pIO} \mathbb{1}_{OJKL} \right) = 2 \mathbb{1}_{IOMN}^s \mathbb{1}_{OJKL}^s. \quad (3.57)$$

Ebenso können die Ableitungen $\partial_{\mathbf{C}_p} \phi$ und $\partial_{\kappa} \phi$ angegeben werden als:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{C}_p} = \frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} : \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{C}_p} \quad \text{und} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} &= \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \kappa} \\ &= - \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \kappa \partial \kappa}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

3.5. Lokaler Newton-Algorithmus

Um die impliziten Evolutionsgleichungen 3.43 und 3.44 in jedem Zeitschritt $[t_n, t_{n+1}]$ zu lösen, wird ein *Newton-Verfahren* angewandt. Zusätzlich zu den gesuchten internen Variablen $\mathbf{C}_{p_{n+1}}$ und κ_{n+1} muss außerdem der inkrementelle plastische Multiplikator γ bestimmt werden. Als zusätzliche Bestimmungsgleichung kann dafür die Bedingung verwendet werden, dass der Spannungszustand während einer plastischen Verformung immer auf der Fließfläche bleiben muss, sprich $\mathfrak{F} = 0$ bzw. $\phi - c = 0$. In einem nichtkonvergierten Zustand sind die Gleichungen 3.43, 3.44 und $\phi_{n+1} - c = 0$ nicht erfüllt und deren Residuen können angegeben werden als:

$$\boxed{1} : \quad \mathbf{R}_{\mathbf{C}_p} := -\mathbf{C}_{p_{n+1}} + \mathbf{C}_{p_n} + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\Sigma}} \Big|_{n+1} \quad (3.60)$$

$$\boxed{2} : \quad R_{\kappa} := -\kappa_{n+1} + \kappa_n + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial q} \Big|_{n+1} \quad (3.61)$$

$$\boxed{3} : \quad R_{\phi} := \phi_{n+1} - c. \quad (3.62)$$

3. Materialmodell und Implementierung

Die Linearisierung der Residuen nach \mathbf{C}_{pn+1} , κ_{n+1} und γ liefert:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}_p} &= \mathbf{R}_{\mathbf{C}_p} - \underbrace{\left(\mathbb{1} - \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\Sigma} \partial \mathbf{C}_p} \Big|_{n+1} \right)}_{\mathbb{A}_{n+1}} : \Delta \mathbf{C}_{pn+1} \\ \boxed{1} \xrightarrow{\text{lin.}} \boxed{1} : & \quad + \underbrace{\gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\Sigma} \partial \kappa}}_0 \Big|_{n+1} \Delta \kappa_{n+1} \\ & \quad + \underbrace{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\Sigma}} \Big|_{n+1} + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\Sigma} \partial \mathbf{C}_p} \Big|_{n+1} : \frac{\partial \mathbf{C}_{pn+1}}{\partial \gamma} \right)}_{\text{Gl. 3.46}} \Delta \gamma \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\boxed{2} \xrightarrow{\text{lin.}} \boxed{2} : \quad \overline{R}_\kappa = R_\kappa - \Delta \kappa_{n+1} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \Big|_{n+1} \Delta \gamma \quad (3.64)$$

$$\boxed{3} \xrightarrow{\text{lin.}} \boxed{3} : \quad \overline{R}_\phi = R_\phi + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{C}_p} \Big|_{n+1} : \Delta \mathbf{C}_{pn+1} + \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} \Big|_{n+1} \Delta \kappa_{n+1}. \quad (3.65)$$

Im gesuchten Lösungspunkt müssen alle Residuen verschwinden. Die Inkremente für das iterative Näherungsverfahren erhält man durch Nullsetzen der linearisierten Formen und Auflösen nach $\Delta \mathbf{C}_{pn+1}$, $\Delta \kappa_{n+1}$ und $\Delta \gamma$. Aus $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ folgt jeweils

$$\boxed{1} \xrightarrow{\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}_p}=0} \quad \Delta \mathbf{C}_{pn+1} = \mathbb{A}_{n+1}^{-1} : \left(\mathbf{R}_{\mathbf{C}_p} + \frac{\partial \mathbf{C}_{pn+1}}{\partial \gamma} \Delta \gamma \right) \quad (3.66)$$

$$\boxed{2} \xrightarrow{\overline{R}_\kappa=0} \quad \Delta \kappa_{n+1} = R_\kappa + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial q} \Big|_{n+1}}_{\text{Gl. 3.51}} \Delta \gamma. \quad (3.67)$$

Aus $\boxed{3}$ und den Gleichungen 3.66 und 3.67 erhält man schlussendlich:

$$\Delta \gamma = \frac{-R_\phi - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{C}_p} \Big|_{n+1} : \mathbb{A}_{n+1}^{-1} : \mathbf{R}_{\mathbf{C}_p} - \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} \Big|_{n+1} R_\kappa}{\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{C}_p} \Big|_{n+1} : \mathbb{A}_{n+1}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{C}_{pn+1}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} \Big|_{n+1} \frac{\partial \kappa_{n+1}}{\partial \gamma}}. \quad (3.68)$$

Damit können nun die internen Variablen \mathbf{C}_p und κ sowie der inkrementelle plastische Multiplikator γ zum Zeitpunkt t_{n+1} berechnet werden. Die iterative Berechnungsvorschrift lautet¹¹:

$$\gamma^{(k+1)} \leftarrow \gamma^{(k)} + \Delta \gamma, \quad (3.69a)$$

$$\mathbf{C}_{pn+1}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{C}_{pn+1}^{(k)} + \Delta \mathbf{C}_{pn+1}, \quad (3.69b)$$

$$\kappa_{n+1}^{(k+1)} \leftarrow \kappa_{n+1}^{(k)} + \Delta \kappa_{n+1}. \quad (3.69c)$$

¹¹Die Angabe $(\bullet)^{(\bullet)}$ bezieht sich auf die lokale Iteration, während sich $(\bullet)_{n+1}$ auf den Zeitpunkt t_{n+1} des globalen Newton-Verfahrens bezieht.

3. Materialmodell und Implementierung

Die Berechnung wird so lange wiederholt, bis der Lösungspunkt hinreichend genau bestimmt ist. Bei Annäherung an den Lösungspunkt konvergieren sowohl die Residuen als auch die Inkremente gegen Null, weshalb daraus ein Konvergenzkriterium formuliert werden kann. Der Lösungspunkt ist erreicht, wenn gilt:

$$\{\|\mathbf{R}_{\mathbf{C}_p} \circ \Delta \mathbf{C}_{p,n+1}\|_F \wedge R_\kappa \Delta \kappa_{n+1} \wedge R_\phi \Delta \gamma\} \leq c_{\text{conv}}. \quad (3.70)$$

Hierin ist c_{conv} ein vorgegebenes Konvergenzkriterium, $\|\bullet\|_F$ ist die Frobeniusnorm und $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ ist das *Hadamard-Produkt*¹².

Algorithmische Spannung und Tangentenmodul

Nachdem die internen Variablen bestimmt wurden, sollen auch die Spannungen zum Zeitpunkt t_{n+1} , sowie die Spannungsantwort auf ein Verzerrungsincrement $d\mathbf{C}_{n+1}$ berechnet werden. Dies ist der letzte Teil der Konstitutivgleichungen für die Finite-Elemente-Implementierung.

Die aktuellen Spannungen infolge eines deformierten Zustandes wurden bereits in Gleichung 3.7 angegeben. Dementsprechend werden die algorithmischen Spannungen und die algorithmus-konsistenten, elastisch-plastischen Tangentenmoduli als die erste und zweite Ableitung des elastischen Potentials ψ nach dem rechten Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} definiert:

$$\mathbf{s}_{n+1} := 2 \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \right|_{n+1} \quad (3.71)$$

Gl. 3.11

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n+1}^{\text{ep}} &:= 4 \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \right) \right|_{n+1} \\ &= 4 \left[\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right|_{n+1} + \alpha^p \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}_p} \right|_{n+1} : \left(\left. \frac{\partial \mathbf{C}_p}{\partial \mathbf{C}} \right|_{n+1} + \left. \frac{\partial \mathbf{C}_{p,n+1}}{\partial \gamma} \otimes \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Gl. 3.17 Gl. 3.18 Gl. 3.49 Gl. 3.48

Hierbei wurde die Variable α^p als „Schalter“ für elastische oder plastische Zustandsänderungen eingeführt, wobei gilt:

$$\alpha^p := \begin{cases} 1 & \text{für } \gamma > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.73)$$

Die unbekannte Ableitung $\partial_{\mathbf{C}} \gamma$ kann wiederum aus der Fließbedingung $\phi - c = 0$ durch *implizite Differentiation* bestimmt werden. Zunächst erhält man mittels der Kettenregel das totale Differential:

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} : \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{C}_p} : \frac{\partial \mathbf{C}_p}{\partial \mathbf{C}} \right) : d\mathbf{C} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} : \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{C}_p} : \frac{\partial \mathbf{C}_p}{\partial \gamma} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \gamma} \right) d\gamma. \end{aligned} \quad (3.74)$$

¹²Elementweises Matrizenprodukt [12]

3. Materialmodell und Implementierung

Für plastische Formänderungen gilt weiters:

$$d\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial\gamma}{\partial\mathbf{C}} = - \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\Sigma}} : \left(\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\mathbf{C}} + \frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\mathbf{C}_p} : \frac{\partial\mathbf{C}_p}{\partial\mathbf{C}} \right)}{\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\Sigma}} : \frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\mathbf{C}_p} : \frac{\partial\mathbf{C}_p}{\partial\gamma} + \frac{\partial\phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial\kappa} \frac{\partial\kappa}{\partial\gamma}}. \quad (3.75)$$

Damit sind die Konstitutivgleichungen komplett und für die Spannungsantwort $d\mathbf{S}_{n+1}$ infolge eines Verzerrungsincrements $d\mathbf{C}_{n+1}$ gilt:

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \mathbb{C}_{n+1}^{\text{ep}} : d\mathbf{C}_{n+1}. \quad (3.76)$$

3.6. Implementierung

Das in den vorangegangenen Abschnitten hergeleitete plastische Materialmodell wurde in das Finite-Elemente-Programm **SOOFEA** implementiert. Es handelt sich dabei um ein objektorientiertes, modulares FE-Programm für einfache 2- oder 3-dimensionale Probleme, basierend auf MATLAB[®]. Entwickelt wurde es von den Mitarbeitern des Instituts für Festigkeitslehre an der Technischen Universität Graz, an dem auch diese Arbeit entstanden ist. Zum Einlesen von FE-Netzen bietet das Programm eine Schnittstelle zu **Gmsh**[®], einer Open-Source-Software zum Erstellen von parametrisierten Netzen (vgl. GEUZAINÉ und REMACLE [8]). Die Visualisierung von Ergebnissen erfolgt über eine Schnittstelle zu **Paraview**[®], eine Open-Source-Software zur Datenanalyse und -visualisierung (vgl. [20]). Aufgrund der objektorientierten Programmierung eignet sich **SOOFEA** besonders für die Implementierung einer neuen Material-Klasse, weil große Teile des Programms unverändert wiederverwendet werden können. Das betrifft insbesondere den Lösungsalgorithmus für das globale FE-Gleichungssystem. Auch können gegebenenfalls erforderliche Anpassungen des bestehenden Codes mit geringem Aufwand durchgeführt werden. Als Ausgangsbasis für die Implementierung des plastischen Materials diente eine Version, die ausschließlich elastische Probleme berechnen kann. Ohne zu sehr in die Programmstruktur einzusteigen, wird hier auf die Klasse **Material** näher eingegangen. In der FE-Prozedur dient diese Klasse dazu, alle materialabhängigen Konstitutivgesetze abzubilden. Im plastischen Fall erfolgt hier nicht nur die Berechnung der algorithmischen Spannung und des konsistenten Tangentenmoduls, sondern auch die Ausführung des lokalen Newton-Algorithmus zur Aktualisierung der internen Variablen. Der Ablauf des lokalen Algorithmus ist in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Als Ausgangswerte $\mathbf{C}_{p,n+1}^{(0)}$ und $\kappa_{n+1}^{(0)}$ für die iterative Näherungslösung dienen immer die aktuellen Werte der letztgültigen konvergierten Lösung und der inkrementelle plastische Multiplikator wird zu Beginn der Iteration stets gleich null gesetzt. Für $R_\phi^{(0)} < 0$ treten nur elastische Formänderungen auf; die internen Variablen bleiben unverändert.

Die Implementierung des plastischen Materials erfolgt nur für allgemeine 3-dimensionale Lastfälle. Reduzierte 2-dimensionale Probleme, wie der ebene Verzerrungszustand oder der ebene Spannungszustand, müssen durch entsprechende Randbedingungen modelliert werden.

3. Materialmodell und Implementierung

Anmerkung: Global werden in SOOFEA der Green-Lagrange-Verzerrungstensor \mathbf{E} und der plastische Verzerrungstensor \mathbf{E}_p verwendet, während in der Klasse `Material` der rechte Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} und die plastische Metrik \mathbf{C}_p verwendet werden. Die Umrechnung erfolgt nach Gleichung 2.15 bzw. Gleichung 1.5.

Tabelle 3.1. Lokaler Algorithmus zur Aktualisierung der internen Variablen

<p>1. Setze Anfangswerte für Newton-Iteration: $\gamma^{(0)} = 0, \mathbf{C}_{p_{n+1}}^{(0)} = \mathbf{C}_{p_n}, \kappa_{n+1}^{(0)} = \kappa_n$</p> <p>2. Berechne die Residuen: $\mathbf{R}_{\mathbf{C}_p}^{(0)} = [-\mathbf{C}_{p_{n+1}} + \mathbf{C}_{p_n} + \gamma \partial_{\tilde{\Sigma}} \phi_{n+1}]^{(0)}$ $R_\kappa^{(0)} = [-\kappa_{n+1} + \kappa_n + \gamma \partial_q \phi_{n+1}]^{(0)}$ $R_\phi^{(0)} = [\phi_{n+1} - c]^{(0)}$</p> <p>3. Wenn $R_\phi^{(0)} < 0$; gehe zu Schritt 8, sonst; setze $k = 0$ und gehe weiter zu Schritt 4.</p> <p>4. Berechne die Inkremente: $\Delta\gamma = \left[\frac{-R_\phi - \partial_{\mathbf{C}_p} \phi_{n+1} : \mathbb{A}_{n+1}^{-1} : \mathbf{R}_{\mathbf{C}_p} - \partial_\kappa \phi_{n+1} R_\kappa}{\partial_{\mathbf{C}_p} \phi_{n+1} : \mathbb{A}_{n+1}^{-1} : \partial_\gamma \mathbf{C}_{p_{n+1}} + \partial_\kappa \phi_{n+1} \partial_\gamma \kappa_{n+1}} \right]^{(k)}$ $\Delta\mathbf{C}_{p_{n+1}} = [\mathbb{A}_{n+1}^{-1} : (\mathbf{R}_{\mathbf{C}_p} + \partial_\gamma \mathbf{C}_{p_{n+1}} \Delta\gamma)]^{(k)}$ $\Delta\kappa_{n+1} = [R_\kappa + \partial_q \phi_{n+1} \Delta\gamma]^{(k)}$</p> <p>5. Aktualisiere die internen Variablen: $\gamma^{(k+1)} \leftarrow \gamma^{(k)} + \Delta\gamma$ $\mathbf{C}_{p_{n+1}}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{C}_{p_{n+1}}^{(k)} + \Delta\mathbf{C}_{p_{n+1}}$ $\kappa_{n+1}^{(k+1)} \leftarrow \kappa_{n+1}^{(k)} + \Delta\kappa_{n+1}$</p> <p>6. Berechne die aktualisierten Residuen: $\mathbf{R}_{\mathbf{C}_p}^{(k+1)} = [-\mathbf{C}_{p_{n+1}} + \mathbf{C}_{p_n} + \gamma \partial_{\tilde{\Sigma}} \phi_{n+1}]^{(k+1)}$ $R_\kappa^{(k+1)} = [-\kappa_{n+1} + \kappa_n + \gamma \partial_q \phi_{n+1}]^{(k+1)}$ $R_\phi^{(k+1)} = [\phi_{n+1} - c]^{(k+1)}$</p> <p>7. Überprüfe das Konvergenzkriterium: Wenn $\{\ \mathbf{R}_{\mathbf{C}_p} \circ \Delta\mathbf{C}_{p_{n+1}}\ _F \vee R_\kappa \Delta\kappa_{n+1} \vee R_\phi \Delta\gamma\}^{(k+1)} > c_{\text{conv}}$; setze $k = k + 1$ und gehe zu Schritt 4, sonst; gehe weiter zu Schritt 8.</p> <p>8. Überprüfe, ob plastische Verformung vorliegt: Wenn $\gamma^{(k+1)} > 0$; setze $\alpha = 1, \mathbf{C}_{p_{n+1}} = \mathbf{C}_{p_{n+1}}^{(n+1)}, \kappa_{n+1} = \kappa_{n+1}^{(n+1)}$, sonst; $\alpha = 0, \mathbf{C}_{p_{n+1}} = \mathbf{C}_{p_n}, \kappa_{n+1} = \kappa_n$</p>

4. Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt werden die Berechnungsergebnisse einfacher Beispiele vorgestellt und diskutiert. Als finite Elemente werden trilineare Hexaederelemente verwendet und für die numerische Integration kommt eine Gauß-Quadratur zur Anwendung. Grafisch dargestellt wird der Spannungszustand über die *von Mises Vergleichsspannung*:

$$\sigma_{\text{vM}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}, \quad (4.1)$$

mit dem Cauchy'schen Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Als Maß für die plastische Formänderung wird die *äquivalente plastische Verzerrung* verwendet. Diese ist im Sinne dieser Arbeit definiert als

$$E_{\text{p}}^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{E}_{\text{p}} : \mathbf{E}_{\text{p}}}. \quad (4.3)$$

$\mathbf{E}_{\text{p}}^{\text{eq}}$ quantifiziert den aktuellen plastischen Verzerrungszustand und ist nicht mit der Größe

$$\overline{E}_{\text{p}}(t_n) = \int_{t=0}^{t_n} \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}}_{\text{p}} : \dot{\mathbf{E}}_{\text{p}}} dt \quad (4.4)$$

zu verwechseln, welche die *Länge der Trajektorie im plastischen Verzerrungsraum* wiedergibt. In der Fachliteratur wird \overline{E}_{p} bisweilen auch als äquivalente plastische Verzerrung bezeichnet (vgl. KHAN und HUANG [15]).

4.1. Ein-Element-Konvergenztest

Das erste numerisch berechnete Beispiel beinhaltet einen Konvergenztest zum Nachweis der fehlerfreien Implementierung des lokalen Newton-Algorithmus. Für diesen Zweck wird eine viereckige Scheibe mit der Dicke $t_S = 1$ mm mit einem einzigen Hexaederelement diskretisiert, wobei die Kantenlängen geringfügig voneinander abweichen, um numerische Singularitäten zu vermeiden. Ein Rand der Scheibe sei fest eingespannt, während am gegenüberliegenden Rand eine Verschiebung $u = 0.1$ mm in 10 Schritten aufgebracht wird. Diese Anordnung ist in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt, während Tabelle 4.1 die Knotenpunktkoordinaten der unverformten Scheibe beinhaltet. Weiters sind in Tabelle 4.2 die in der Simulation verwendeten Materialparameter angegeben.

4. Numerische Beispiele

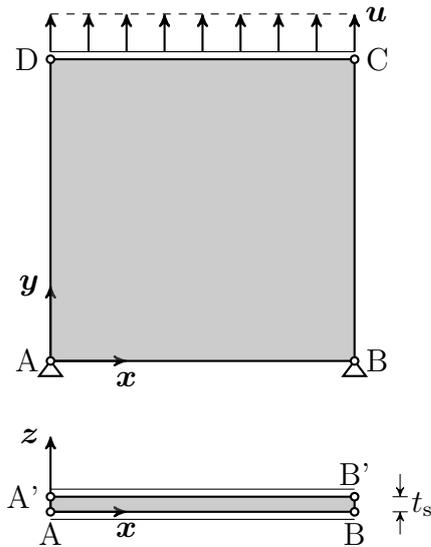


Abbildung 4.1. Ein-Element-Konvergenztest – Geometrie und Randbedingungen: Gegeben ist eine Scheibe mit der konstanten Dicke $t_s = 1$ mm. Die Koordinaten der Knotenpunkte des Hexaederelementes sind in Tabelle 4.1 angegeben. Der untere Rand ist fest eingespannt, wobei am oberen Rand die Verschiebung $u = 0.1$ mm in y-Richtung in 10 Schritten aufgebracht wird. Die Verschiebung in z-Richtung ist für alle Knoten gesperrt.

Tabelle 4.1. Ein-Element-Konvergenztest – Koordinaten der Knotenpunkte des unverformten, trilinearen Hexaederelementes

Punkt	Koordinaten		
	x [mm]	y [mm]	z [mm]
A	0.05	0	0
B	10	0.05	0
C	10.1	10.1	0
D	0	10	0
A'	0.05	0	1
B'	10	0.05	1
C'	10.1	10.1	1
D'	0	10	1

Tabelle 4.2. Ein-Element-Konvergenztest – Materialparameter

Elastizitätsmodul	E	210	GPa
Querkontraktionszahl	ν	0.3	-
Anfängliche Fließspannung	y_0	450	MPa
Verfestigungsparameter	h	129.24	MPa

4. Numerische Beispiele

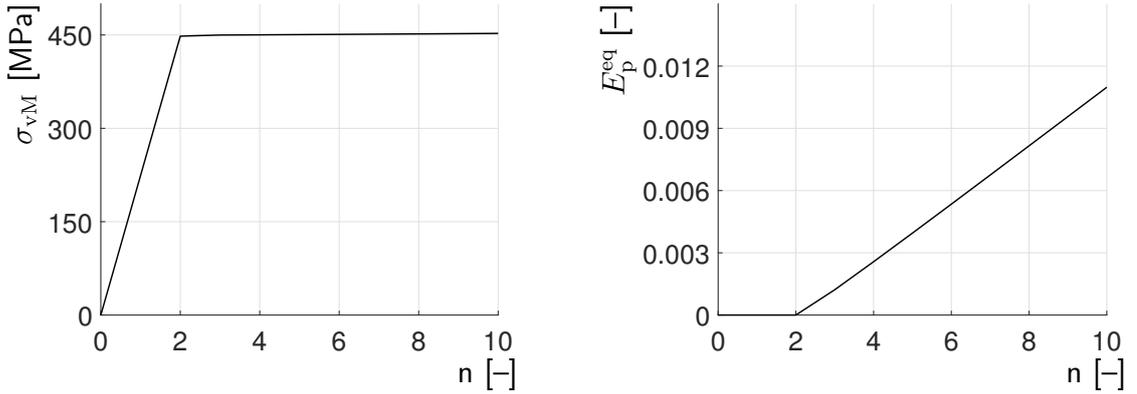


Abbildung 4.2. Vergleichsspannung und äquivalente plastische Verzerrung im Knoten C über den Zeitschritten n : Bis zum zweiten Zeitschritt erfolgt eine rein elastische Verformung. Die Spannung steigt linear bis zum Erreichen der Fließspannung. Bei weiterer Belastung tritt eine plastische Verformung auf und die Fließspannung steigt entsprechend der linearen Verfestigung.

Abbildung 4.2 zeigt als Ergebnis der Simulation den Verlauf der Vergleichsspannung und der äquivalenten plastischen Verzerrung in Punkt C .

Das Konvergenzverhalten des lokalen Newton-Algorithmus kann anhand der Entwicklung der Inkremente $\Delta\gamma$, $\Delta\mathbf{C}_{p_{n+1}}$ und $\Delta\kappa_{n+1}$ sowie der Residuen der Bestimmungsgleichungen R_ϕ , \mathbf{R}_{C_p} und R_κ bewertet werden. Dazu wird eine skalare Größe definiert:

$$A_{\text{conv}} := \sqrt{(\|\mathbf{R}_{C_p} \circ \Delta\mathbf{C}_{p_{n+1}}\|_F)^2 + (R_\kappa \Delta\kappa_{n+1})^2 + (R_\phi \Delta\gamma)^2}. \quad (4.5)$$

Das Newton-Verfahren zeichnet sich dadurch aus, dass es in einer gewissen näheren Umgebung des Lösungspunktes quadratisch konvergiert, d.h. dass sich die Anzahl der gültigen Dezimalstellen in jedem Iterationsschritt verdoppelt. Entsprechend sollte auch die oben definierte Größe mit höherer Ordnung gegen null konvergieren. In Tabelle 4.3 sind Folgen $A_{\text{conv}}^{(k)}$ eines Integrationspunktes für mehrere globale Iterationen angegeben. Die hier erkennbare hohe Konvergenzordnung legt nahe, dass der lokale Newton-Algorithmus korrekt implementiert wurde.

Tabelle 4.3. Lokales Konvergenzverhalten: Für die vier globalen Iterationen i des dritten Zeitschritts zeigen die Folgen $A_{\text{conv}}^{(k)}$ des lokalen Newton-Algorithmus eine hohe Konvergenzordnung.

$k \backslash i$	$A_{\text{conv}}^{(k)}$ während der i -ten globalen Iteration			
	1	2	3	4
1	6.512117e-06	1.095435e-05	1.106879e-05	1.106883e-05
2	2.966581e-19	1.441646e-18	1.483911e-18	1.484449e-18
3	5.795316e-25	7.862273e-25	2.658291e-25	8.343787e-25
4	3.722053e-28	2.710764e-28	1.053726e-28	7.617977e-29

In Analogie dazu kann über das Konvergenzverhalten des globalen Algorithmus eine Aussage dahingehend getroffen werden, ob die algorithmische Spannung und

4. Numerische Beispiele

der konsistente Tangentenmodul korrekt implementiert wurden; bei falscher Implementierung konvergiert der globale Algorithmus nicht oder nur langsam. In jedem globalen Iterationsschritt wird letzten Endes aus einer globalen Steifigkeitsmatrix \mathbf{A}_{glob} und einem Residuum-Kraftvektor $\mathbf{f}_{\text{res}} = \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}$ ein Feld inkrementeller Knotenpunktverschiebungen $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_{\text{res}}$ ermittelt. Das Skalarprodukt $W_{\Delta} = \mathbf{f}_{\text{res}} \Delta \mathbf{u}$ wird *unbalanced energy* genannt und ist analog zu A_{conv} ein Maß für die Konvergenz des globalen Algorithmus. In Tabelle 4.4 sind Folgen $W_{\Delta}^{(i)}$ des globalen Algorithmus für mehrere Zeitschritte angegeben. Die Konvergenzordnung lässt auch hier auf eine korrekte Implementierung schließen.

Tabelle 4.4. Globales Konvergenzverhalten: Für die Zeitschritte $n = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ zeigen die Folgen $W_{\Delta}^{(i)}$ des globalen Algorithmus eine hohe Konvergenzordnung.

$i \backslash n$	$W_{\Delta}^{(i)}$ für die Zeitschritte n				
	2	4	6	8	10
1	3.81833e+02	3.87908e+02	3.88971e+02	3.84397e+02	3.89867e+02
2	8.69577e-07	1.80697e-02	1.11729e-01	1.98882e+00	2.57085e-02
3	3.15265e-20	2.91830e-08	7.73449e-06	3.57874e-04	4.77611e-07
4		8.88722e-20	3.72705e-14	4.21057e-11	6.90464e-16
5			3.03837e-24	2.81784e-20	2.04170e-24

4.2. Dickwandiges Rohr unter Innendruck

Für das dickwandige Rohr unter Innendruck kann unter starken Vereinfachungen eine analytische Lösung für das plastische Materialverhalten gefunden werden. Gegeben sei ein Rohr mit Innenradius r_i und Außenradius r_a , dessen Enden so gelagert sind, dass in axialer Richtung keine Verschiebungen auftreten können. An der Innenfläche wird der Druck p_i aufgeprägt. Unter der Annahme *starr-idealplastischen*, isotropen Materialverhaltens gibt SCHREIBER [37] für diesen Belastungsfall eine algebraische Gleichung für den aufgeprägten Innendruck p_i in Abhängigkeit des Radius der plastifizierten Zone r_p an:

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 \left[1 + 2 \ln \left(\frac{r_p}{r_i} \right) - \left(\frac{r_p}{r_a} \right)^2 \right]. \quad (4.6)$$

Hierbei ist σ_0 die Fließspannung der zugrunde gelegten von Mises-Fließfunktion. Aufgrund des starren Materialverhaltens gilt Gleichung 4.6 nur für sehr kleine Verformungen in guter Näherung. In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse einer numerischen Simulation mit der analytischen Lösung dieses Problems verglichen werden. Dazu wird ein Viertel eines Scheibenelementes des Rohrs mit 10x10 Elementen in radialer Richtung und Umfangsrichtung diskretisiert. Wie zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, kommt für die numerische Integration eine Gauß-Quadratur zum Einsatz. Naturgemäß liegen also die Integrationspunkte im Inneren der Elemente und nicht auf den Knotenpunkten. Größen wie die von Mises Vergleichsspannung σ_{vM} und die äquivalente plastische Verzerrung \mathbf{E}_p^{eq} werden

4. Numerische Beispiele

in den Integrationspunkten ausgewertet und müssen zur Visualisierung auf die Knotenpunkte umgerechnet werden. Um Extrapolationsfehler am inneren Rand, an dem die Plastifizierung zuerst einsetzt, zu minimieren, wird das Netz an dieser Stelle in radialer Richtung verfeinert. Die Symmetrie des Problems wird durch geeignete Verschiebungsrandbedingungen abgebildet. Abbildung 4.3 zeigt schematisch die Geometrie, die Randbedingungen sowie die FE-Diskretisierung des Problems.

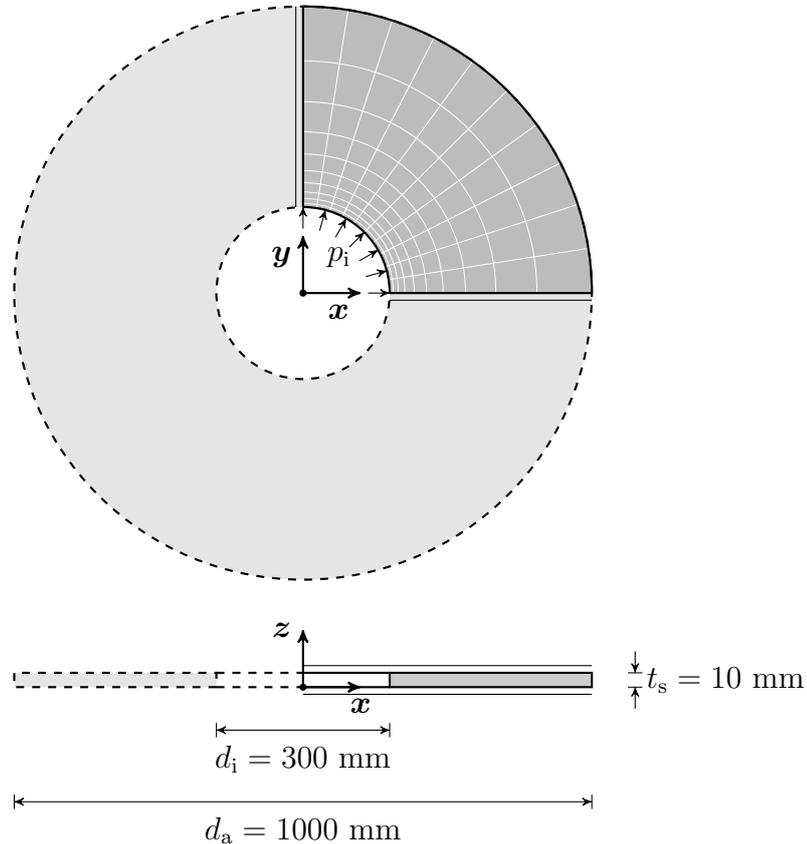


Abbildung 4.3. Dickwandiges Rohr unter Innendruck – Geometrie, Randbedingungen und FE-Diskretisierung: Gegeben sei ein Viertelsystem mit 10×10 Elementen in radiale und Umfangsrichtung. Die Elementgröße in radialer Richtung ist progressiv gestuft (Progressionsfaktor $q = 1.35$). In den Symmetrieebenen sind Verschiebungen nur in der Ebene zulässig und in axiale Richtung sind die Verschiebungen gesperrt. An der Innenfläche wird ein Druck $p_i = 280$ MPa in 140 Schritten aufgeprägt.

In einer lastgesteuerten Simulation wird an der Innenfläche der Scheibe ein Druck p_i von maximal 280 MPa aufgeprägt, wobei pro Zeitschritt $\Delta t = 1/140$ s ein Druckinkrement von $\Delta p_i = 2$ MPa aufgebracht wird. Entsprechend der eingangs getroffenen Annahmen werden die Axialverschiebungen der Knotenpunkte gesperrt. In Tabelle 4.5 sind die Materialparameter der Simulation angegeben. Um den Annahmen der analytischen Lösung betreffend des plastischen Verhaltens zu entsprechen, wurde hier der Verfestigungsparameter $h = 0$ gesetzt. Daraus resultiert ein *hyperelastisch-idealplastisches* Materialverhalten.

4. Numerische Beispiele

Tabelle 4.5. Dickwandiges Rohr unter Innendruck – Materialparameter

Elastizitätsmodul	E	210	GPa
Querkontraktionszahl	ν	0.3	-
Anfängliche Fließspannung	y_0	350	MPa
Verfestigungsparameter	h	0	MPa

Simulationsergebnis:

In Abbildung 4.4 ist die radiale Verschiebung bei beginnender Plastifizierung $p_i = 190$ MPa und bei Höchstbelastung $p_i = 280$ MPa dargestellt. Die maximale radiale Verschiebung an der Innenfläche beträgt 0.344 mm. Das entspricht einer Dehnung von ca. 0.23%. Im Allgemeinen geht man davon aus, dass geometrische Nichtlinearitäten bis zu einer Dehnung von 1% vernachlässigt werden können. Die Beschränkung der analytischen Lösung auf „kleine“ Verformungen trifft also näherungsweise zu.

In Abbildung 4.5 sind die Verteilungen der äquivalenten plastischen Verzerrung E_p^{eq} und der Vergleichsspannung σ_{vM} für unterschiedliche Belastungszustände dargestellt. Bei einer Belastung von $p_i = 190$ MPa beginnt die plastische Verformung. Bis dahin gilt auf der gesamten Scheibe $E_p^{eq} = 0$. Die Vergleichsspannung ist am inneren Rand am höchsten und erreicht dort gerade die Fließspannung $y_0 = 350$ MPa. Bei weiterer Belastung wächst der plastifizierte Bereich, wobei die Vergleichsspannung nicht über y_0 ansteigt. Die Fließspannung bleibt auch bei fortschreitender plastischer Verformung konstant, was dem idealplastischen Materialverhalten entspricht.

Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass die Vergleichsspannung an der Innenfläche bei beginnender Plastifizierung um ca. 1.76% über der Fließspannung liegt. Dies liegt am zuvor angesprochenen Extrapolationsfehler. Die Überprüfung der Fließbedingung (Gleichung 3.28) erfolgt an den Integrationspunkten der Elemente. Da die Integrationspunkte der hier verwendeten Gauß-Quadratur aber im Inneren der Elemente¹³ liegen, also dort wo die Spannungen geringer sind als am Rand, verzögert sich der Fließbeginn dementsprechend. Der Extrapolationsfehler fällt umso geringer aus, je kleiner die Elemente im Randbereich sind. Auf eine noch feinere Vernetzung wurde hier zugunsten geringerer Rechenzeit verzichtet.

Abbildung 4.6 zeigt den Vergleich der analytischen Lösung mit den Ergebnissen der Simulation. Es fällt auf, dass sich der Fließbeginn und die weitere Ausdehnung der plastifizierten Zone bei der Simulation zu höheren Drücken hin verschiebt: Während die analytische Lösung die erstmalige plastische Verformung bei 184 MPa voraussagt, tritt diese im Falle der Simulation erst bei 190 MPa ein. Zumindest ein Teil dieser „verzögerten“ Plastifizierung kann durch den oben genannten Extrapolationsfehler erklärt werden. Es ist aber auch bekannt, dass gerade bei plastischen Problemen der verwendete Element-Typ eine wichtige Rolle spielt. Beispielsweise stellen RICE et al. [36] fest, dass gewisse Element-Typen und FE-Netze in Verbindung mit achsensymmetrischen Problemen zu einer zu hohen Steifigkeit im plastischen Regime führen. In der Literatur wurden zahlreiche spezielle Elemente

¹³Für die Gauß-Quadratur vom Grad 2 liegen die Stützstellen bezüglich des Intervalls $[-1, 1]$ bei $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

4. Numerische Beispiele

für plastische Probleme vorgeschlagen und untersucht. APEL [1] beispielsweise verwendet ein 8-Knoten Schalenelement mit unterschiedlichen Quadraturen. In der hier verwendeten FE-Umgebung SOOFEA sind derartige Elemente jedoch nicht implementiert, weshalb hier für die Simulation einfache trilineare Hexaederelemente verwendet wurden. Die Möglichkeit, dass die verspätete Plastifizierung der Simulation im Vergleich zur analytischen Lösung durch eben solche „Locking-Effekte“ verursacht wird, kann nicht ausgeschlossen werden. Eine genauere Untersuchung diesbezüglich sollte Gegenstand einer weiterführenden Arbeit sein.

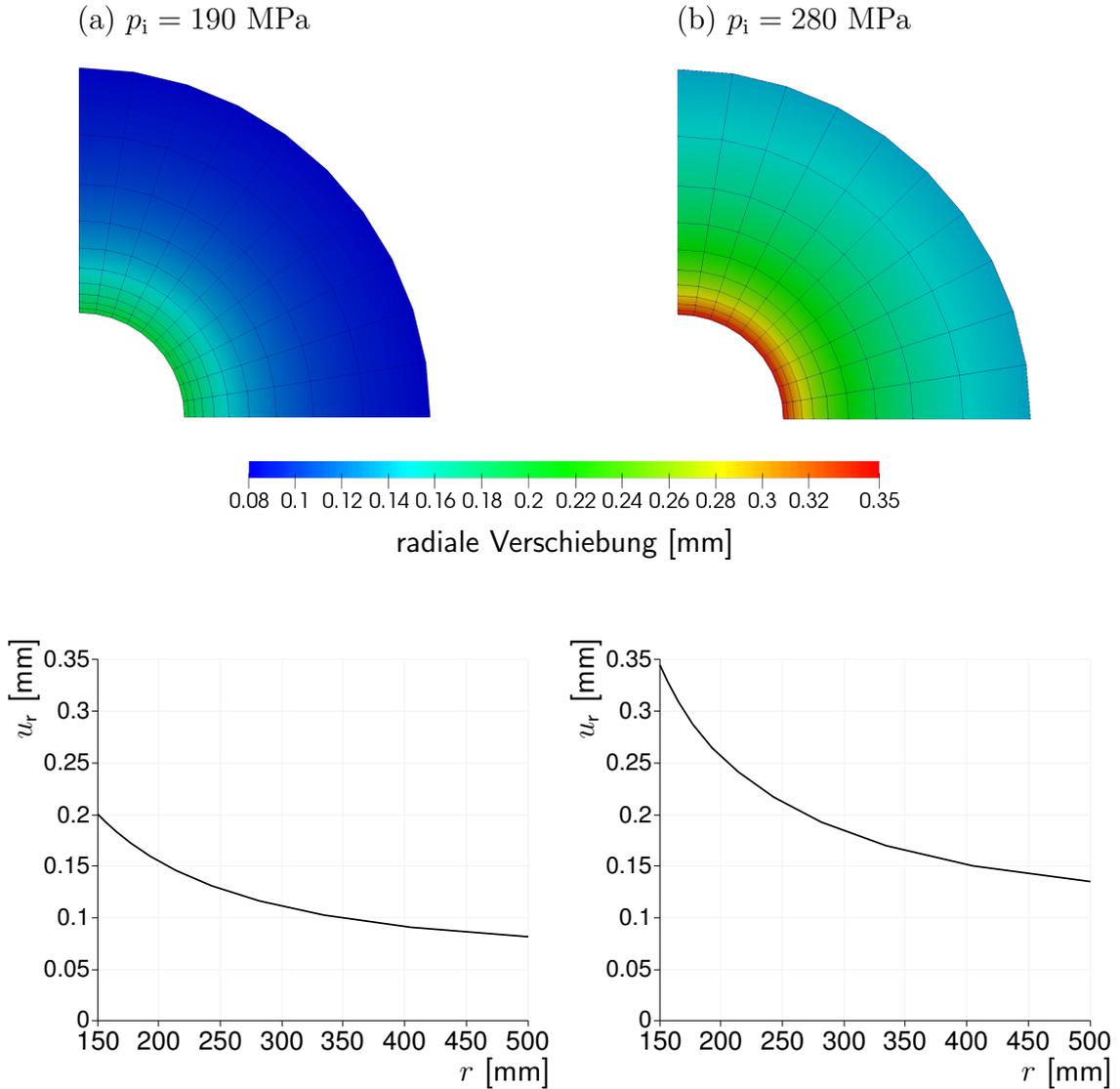
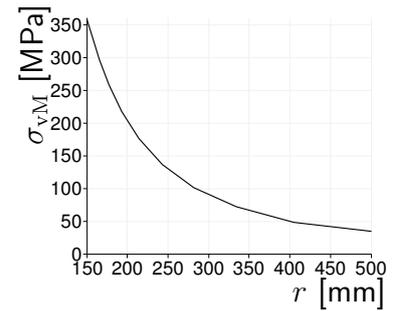
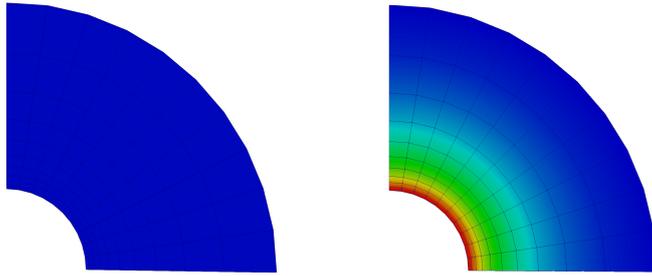


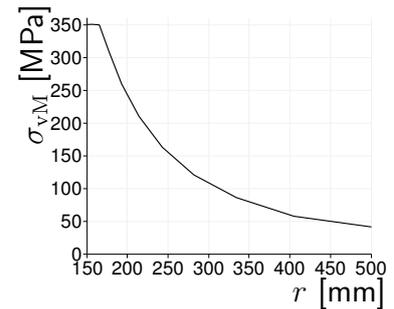
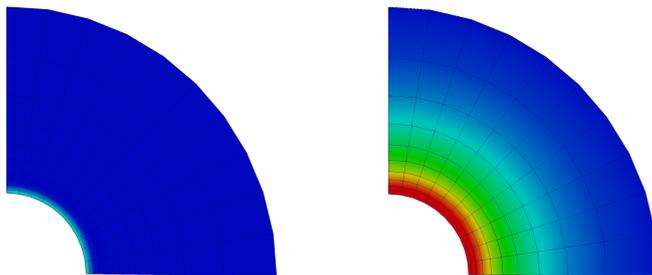
Abbildung 4.4. Dickwandiges Rohr unter Innendruck – radiale Verschiebungen bei (a) $p_i = 190 \text{ MPa}$ und (b) $p_i = 280 \text{ MPa}$: Verteilung der Radialverschiebung über dem unverformten Scheibenelement (oben) und Verlauf der Radialverschiebung u_r über den Radius r der Scheibe (unten).

4. Numerische Beispiele

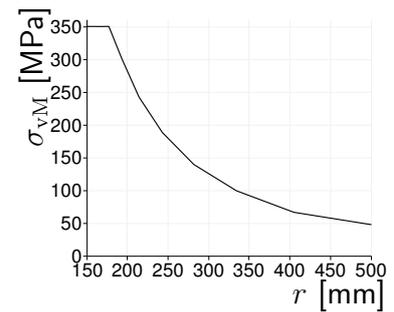
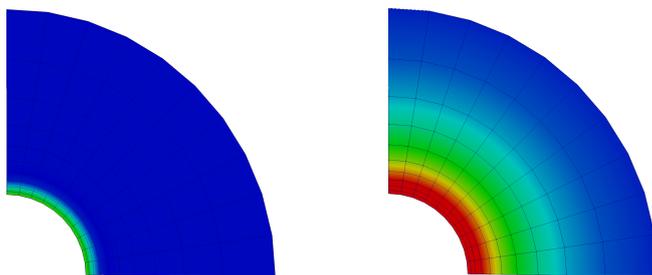
(a) $p_i = 190$ MPa



(b) $p_i = 222$ MPa



(c) $p_i = 248$ MPa



(d) $p_i = 280$ MPa

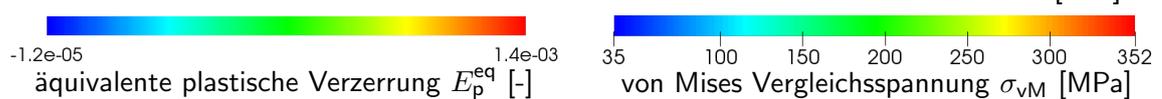
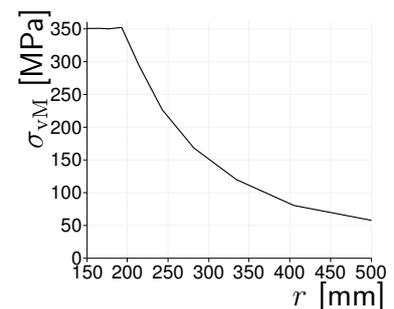
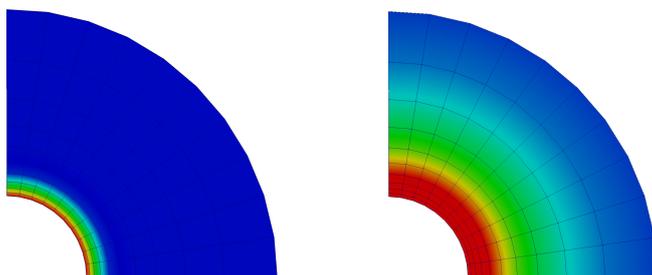


Abbildung 4.5. Dickwandiges Rohr unter Innendruck – äquivalente plastische Verzerrung E_p^{eq} (links) und Vergleichsspannung σ_{vM} (Mitte und rechts): Bei beginnender Plastifizierung (a) ist E_p^{eq} überall gleich null. Die Vergleichsspannung σ_{vM} erreicht gerade die Fließspannung $y_0 = 350$ MPa. Bei weiterer Belastung (b) bis (d) wächst der plastifizierte Bereich, wobei die Vergleichsspannung nicht über die Fließspannung hinaus ansteigt.

4. Numerische Beispiele

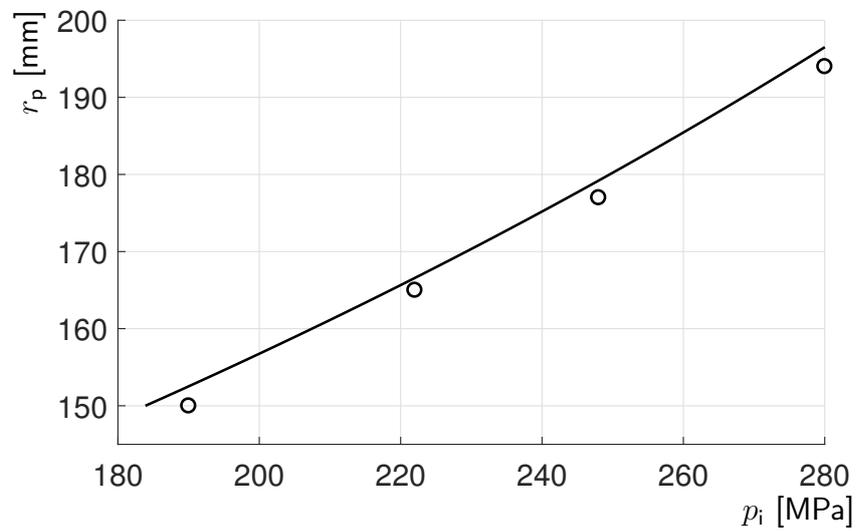


Abbildung 4.6. Dickwandiges Rohr unter Innendruck – analytische Lösung und Simulation: Die durchgehende Linie gibt den funktionalen Zusammenhang zwischen dem aufgeprägten Innendruck p_i und dem Radius der plastifizierten Zone r_p für die analytische Lösung wieder. Zum Vergleich sind daneben vier Punkte der Simulation dargestellt.

4.3. Ziehen einer dünnwandigen Kreisscheibe

Um zu testen, ob das Materialmodell bzw. die Implementierung im Stande ist, auch große Verformungen abzubilden, wird ein weiteres Beispiel simuliert. Das nach innen Ziehen einer dünnen kreisringförmigen Scheibe ist ein verbreitetes Beispiel um (anisotrope) elasto-plastische Materialmodelle zu testen, wie zum Beispiel in PAPADOPOULOS und LU [33], MIEHE, APEL und LAMBRECHT [30], LÖBLEIN, SCHRÖDER und GRUTTMANN [22] und ULZ [43]. Das Problem bildet idealisiert die elastisch-plastischen Vorgänge im ebenen Teil der Ronde beim Tiefziehen ab.

Dazu wird das Viertel einer Scheibe mit Innendurchmesser $d_i = 400$ mm, Außendurchmesser $d_a = 800$ mm und Dicke $t_s = 10$ mm mit 10×10 Hexaederelementen in radialer Richtung und Umfangsrichtung diskretisiert. An den Schnittflächen werden geeignete Verschiebungsrandbedingungen gewählt, um die Symmetrieeigenschaften der vollständigen Scheibe abzubilden. Um ein Beulen zu verhindern wird eine Scheibenfläche in Dickenrichtung festgehalten. Abbildung 4.7 zeigt schematisch die Geometrie, die Randbedingungen, sowie die FE-Diskretisierung des Problems.

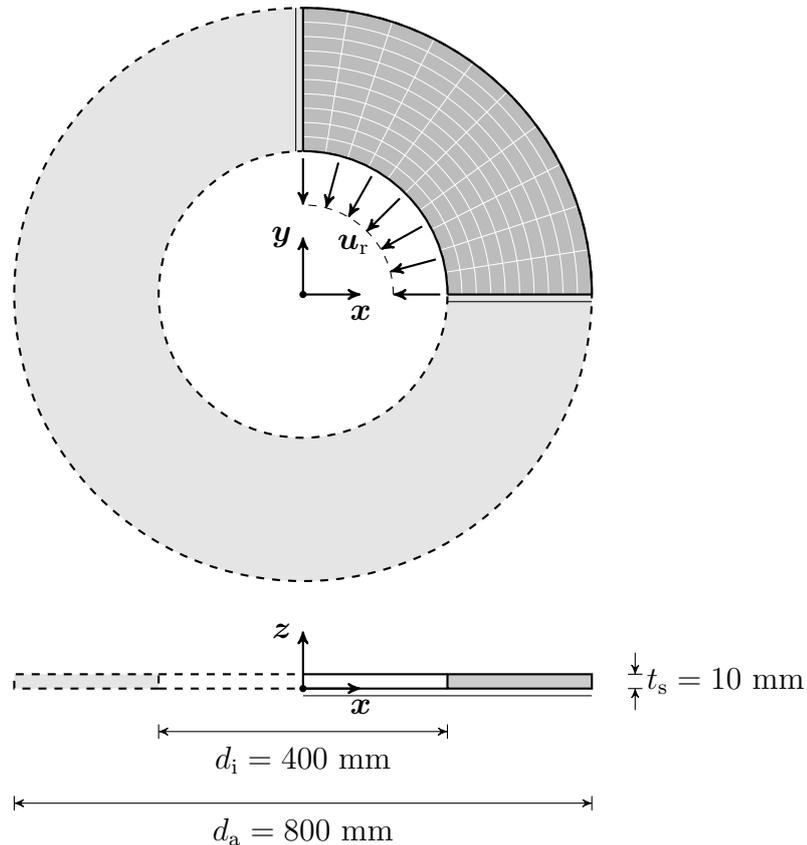


Abbildung 4.7. Ziehen einer dünnwandigen Kreisscheibe – Geometrie, Randbedingungen und FE-Diskretisierung: Gegeben sei ein Viertel einer Kreisring-Scheibe mit 10×10 Elementen in radialer Richtung und Umfangsrichtung. In den Symmetrieebenen sind Verschiebungen nur in der Ebene zulässig und in Dickenrichtung ist die Verschiebung der Plattenunterseite gesperrt. An der Innenkante der Scheibe wird in 750 Zeitschritten eine radiale Verschiebung $u_r = 75$ mm aufgebracht.

4. Numerische Beispiele

In einer lastgesteuerten Simulation wird an der Innenfläche der Scheibe eine radiale Gesamtverschiebung $u_r = 75$ mm aufgebracht, wobei pro Lastschritt n ein Verschiebungsinkrement von $\Delta u_r = 0.1$ mm aufgebracht wird. In Tabelle 4.6 sind die Materialparameter der Simulation angegeben.

Tabelle 4.6. Ziehen einer dünnwandigen Kreisscheibe – Materialparameter

Elastizitätsmodul	E	210	GPa
Querkontraktionszahl	ν	0.3	-
Anfängliche Fließspannung	y_0	450	MPa
Verfestigungsparameter	h	129.24	MPa

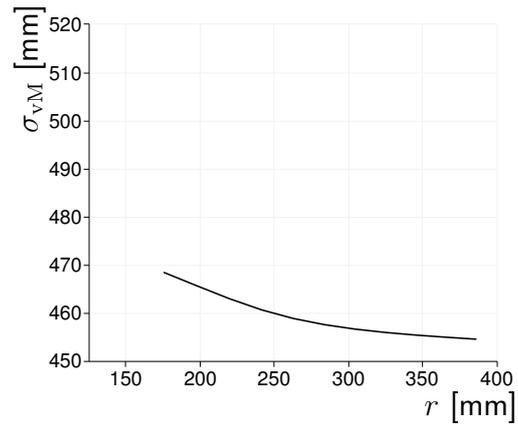
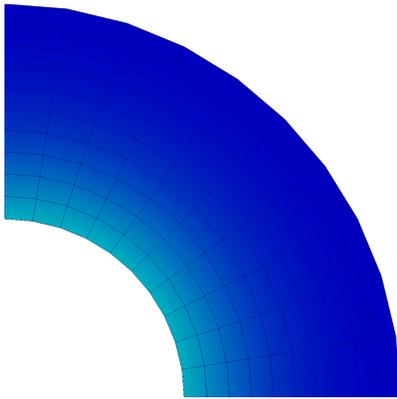
Simulationsergebnis:

In Abbildung 4.8 ist die Verteilung der Vergleichsspannung am verformten FE-Netz und der entsprechende radiale Verlauf für unterschiedliche Verformungszustände dargestellt. In ähnlicher Weise ist in Abbildung 4.9 die äquivalente plastische Verzerrung dargestellt.

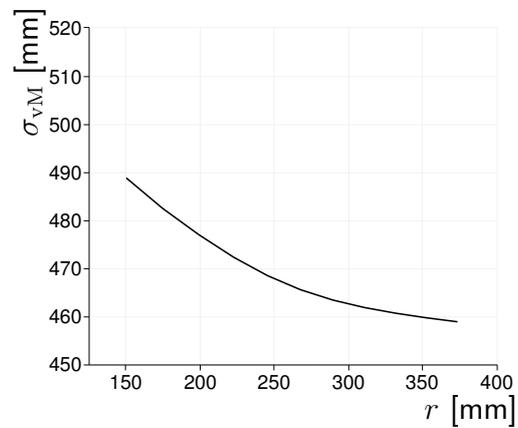
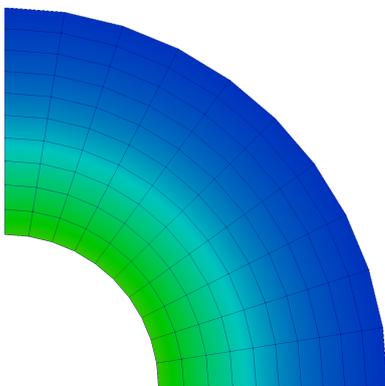
Während der Simulation sind keinerlei Fehler oder Auffälligkeiten aufgetreten; sowohl im lokalen als auch im globalen Newton-Algorithmus konnte auch bei großen Verformungen quadratische Konvergenz beobachtet werden. In diesem Sinne ist das Materialmodell durchaus für große Verformungen geeignet.

4. Numerische Beispiele

(a) $u_r = 25$ mm



(b) $u_r = 50$ mm



(c) $u_r = 75$ mm

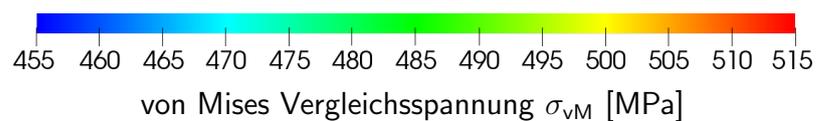
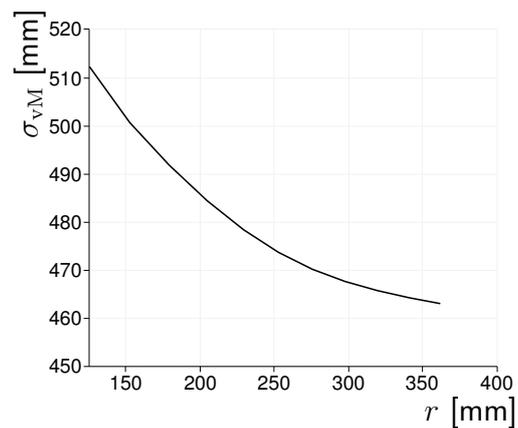
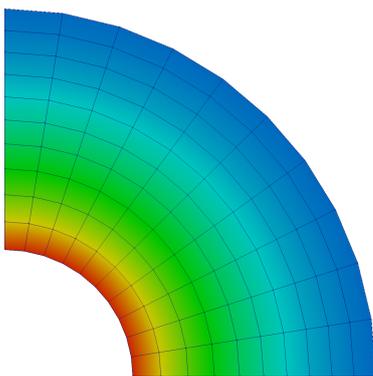
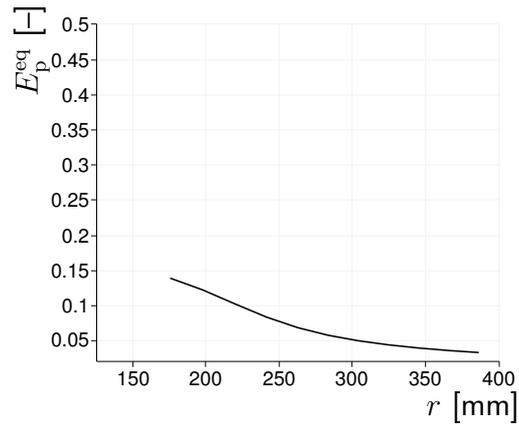
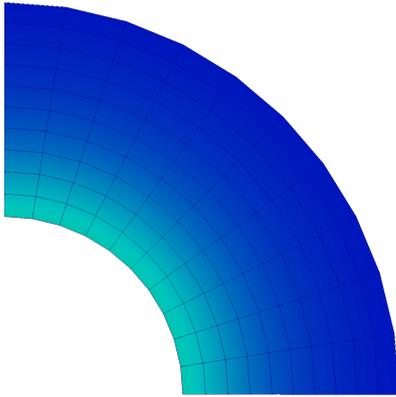


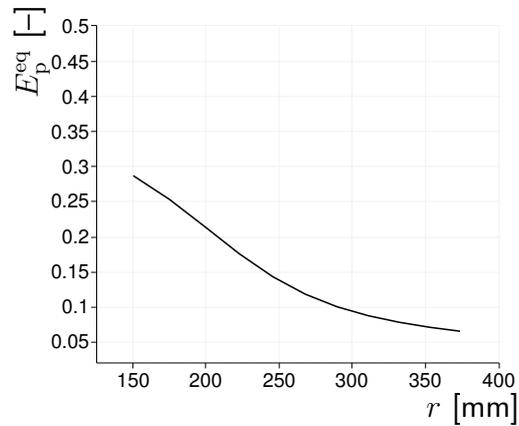
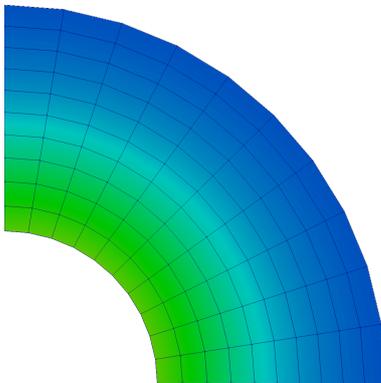
Abbildung 4.8. Ziehen einer dünnwandigen Kreisscheibe – Vergleichsspannung σ_{vM} bei unterschiedlichen Radialverschiebungen u_r der Scheiben-Innenfläche: Verteilung der Vergleichsspannung auf der verformten Scheibe (links), sowie radialer Verlauf der Vergleichsspannung (rechts).

4. Numerische Beispiele

(a) $u_r = 25$ mm



(b) $u_r = 50$ mm



(c) $u_r = 75$ mm

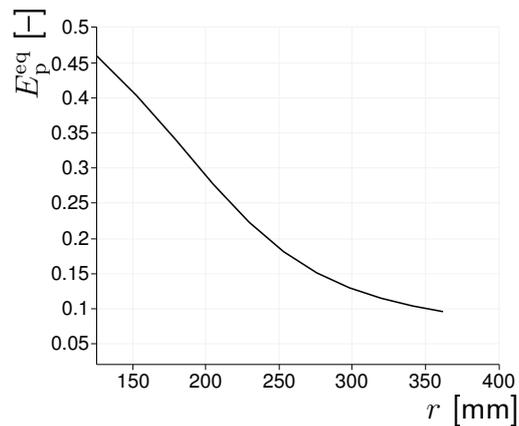
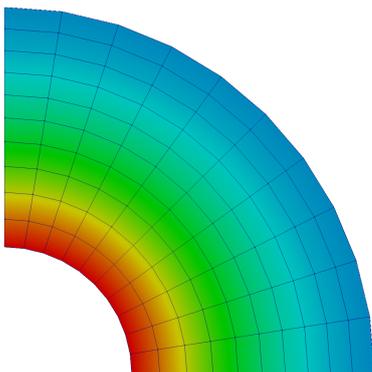


Abbildung 4.9. Ziehen einer dünnwandigen Kreisscheibe – äquivalente plastische Verzerrung E_p^{eq} bei unterschiedlichen Radialverschiebungen u_r der Scheiben-Innenfläche: Verteilung der äquivalenten plastischen Verzerrung auf der verformten Scheibe (links), sowie radialer Verlauf der äquivalenten plastischen Verzerrung (rechts).

5. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Materialmodell für isotropes elastisch-plastisches Materialverhalten vorgestellt und in eine Berechnungsumgebung für Finite-Elemente implementiert. Für die Herleitung der Konstitutivgleichungen wird auf ein von ASMANOGLO et al. [2] und KAISER et al. [14] vorgeschlagenes elastisches Potenzial zurückgegriffen, wobei der Term für das Verfestigungsverhalten dabei angepasst wurde. Das elastische Potenzial ist charakterisiert durch den rechten Cauchy-Green Tensors \mathbf{C} und die verzerrungsähnliche Größe \mathbf{C}_p zur Quantifizierung der plastischen Formänderungen. Gemäß der Theorie der additiven Plastizität sind \mathbf{C} und \mathbf{C}_p auf der Ausgangskonfiguration definiert. Um der leichteren Erweiterbarkeit auf anisotropes Verhalten Sorge zu tragen wird außerdem eine Hill-Fließfunktion verwendet. Der Hill-Tensor wurde zunächst so gewählt, dass daraus isotropes Materialverhalten resultiert. Unter Verwendung der Clausius-Duhem-Ungleichung kann mittels Prinzip der maximalen Dissipation eine Interne-Variablen-Formulierung abgeleitet werden. Zur Integration der internen Variablen kommt das implizite Euler-Verfahren zur Anwendung. Zur Lösung des daraus resultierenden gekoppelten, impliziten Gleichungssystems wird ein lokaler Newton-Algorithmus eingeführt. Schließlich werden die algorithmischen Spannungen und die konsistenten Tangentenmoduli als die ersten und zweiten Ableitungen des elastischen Potenzials nach dem rechten Cauchy-Green Tensor identifiziert.

Die so abgeleiteten Konstitutivgleichungen wurden anschließend in die objektorientierte Finite-Elemente-Berechnungsumgebung **SOOFEA** implementiert. Hierbei handelt es sich um ein MATLAB[®]-basiertes FE-Berechnungsprogramm, entwickelt von Mitarbeitern des Instituts für Festigkeitslehre der TU Graz. Um die Implementierung zu testen wurde ein erstes numerisches Beispiel simuliert: Eine unregelmäßige Geometrie wurde mit einem einzigen trilinearen Hexaederelement diskretisiert und in zehn Lastschritten verschiebungsgesteuert verformt. Dabei konnte sowohl lokal als auch global eine quadratische Konvergenz beobachtet werden, was auf eine korrekte Implementierung schließen lässt. In einem weiteren Test sollte ein einfaches idealisiertes Problem simuliert und die Ergebnisse mit jenen einer analytischen Lösung verglichen werden. Hier fällt auf, dass die plastischen Formänderungen bei der Simulation leicht verspätet einsetzen. Diese Abweichung ist zum Teil einem Extrapolationsfehler geschuldet, welcher durch eine feinere Vernetzung begrenzt werden kann. Andererseits führen die verwendeten 8-Knoten-Hexaederelemente bei derartigen plastischen Problemen oft zu einem zu „steifen“ Verhalten und sind daher hierfür vermutlich ungeeignet. Für eine weiterführende Arbeit erscheint es deshalb sinnvoll, das Materialmodell in eine FE-Umgebung zu implementieren, in welcher auch geeignete Element-Typen zur Verfügung stehen. In einer dritten Simulation konnte gezeigt werden, dass das Materialmodell und die Implementierung im Stande sind, auch große Verformungen darzustellen. Die abgeleiteten Konstitutivgleichungen können als Ausgangsbasis für ein anisotropes Materialmodell dienen.

Literatur

- [1] N. APEL. “Approaches to the Description of Anisotropic Material Behaviour at Finite Elastic and Plastic Deformations. Theory and Numerics”. Dissertation. Stuttgart: Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart, 2004.
- [2] T. ASMANOGLO, J. LU, A. MENZEL und P. PAPADOPOULOS. “On the modelling of evolving material symmetries in finite strain plastic deformations”. In: *7th GACM Colloquium on Computational Mechanics for Young Scientists from Academia and Industry*. Hrsg. von M. v. K. SCHEVEN und M.-A. K. NILS. Stuttgart: Institute for Structural Mechanics, University of Stuttgart, 2017, S. 773–776.
- [3] A. BERTRAM. “On the History of Material Theory – A Critical Review”. In: *The History of Theoretical, Material and Computational Mechanics - Mathematics Meets Mechanics and Engineering*. Hrsg. von E. STEIN. Bd. 1. Lecture Notes in Applied Mathematics and Mechanics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2014, S. 119–131.
- [4] J. BONET und R. D. WOOD. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. 2. Aufl. The Edinburgh Building, Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [5] O. T. BRUHNS. “Some Remarks on the History of Plasticity – Heinrich Hencky, a Pioneer of the Early Years”. In: *The History of Theoretical, Material and Computational Mechanics - Mathematics Meets Mechanics and Engineering*. Hrsg. von E. STEIN. Bd. 1. Lecture Notes in Applied Mathematics and Mechanics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2014, S. 133–152.
- [6] J. CASEY und P. M. NAGHDI. “Discussion: ”A Correct Definition of Elastic and Plastic Deformation and Its Computational Significance””. In: *Journal of Applied Mechanics* 48 (4 1981), S. 983–984.
- [7] Y. F. DAFALIAS. “Orientational evolution of plastic orthotropy in sheet metal”. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (11 2000), S. 2231–2255.
- [8] C. GEUZAIN und J.-F. REMACLE. “Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities”. In: *International Journal for numerical Methods in Engineering* 79 (11 2009), S. 1309–1331.
- [9] A. E. GREEN und P. M. NAGHDI. “A general theory of an elastic-plastic continuum”. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 18 (4 1965), S. 251–281.

- [10] A. E. GREEN und P. M. NAGHDI. “A Thermodynamic Development of Elastic-Plastic Continua”. In: *Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids*. Hrsg. von H. PARKUS und L. I. SEDOV. Wien: Springer, 1968, S. 117–131.
- [11] R. HILL. “On constitutive inequalities for simple materials – I”. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 16 (5 1968), S. 315–322.
- [12] R. A. HORN und C. R. JOHNSON. *Matrix Analysis*. 2. Aufl. 32 Avenue of the Americas, New York: Cambridge University Press, 2013.
- [13] W. F. HOSFORD und R. M. CADDELL. *Metal Forming*. Mechanics and Metallurgy. 4. Aufl. 32 Avenue of the Americas, New York: Cambridge University Press, 2011.
- [14] T. KAISER, J. LU, A. MENZEL und P. PAPADOPOULOS. “A covariant formulation of finite plasticity with plasticity-induced evolution of anisotropy: Modeling, algorithmics, simulation, and comparison to experiments”. In: *International Journal of Solids and Structures* (online verfügbar 6. August 2019). DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2019.08.005.
- [15] A. S. KHAN und S. HUANG. *Continuum Theory of Plasticity*. New York: Wiley, 1995.
- [16] K. H. KIM und J. J. YIN. “Evolution of anisotropy under plane stress”. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (5 1997), S. 841–851.
- [17] U. F. KOCKS, C. N. TOMÉ und H.-R. WENK. *Texture and Anisotropy*. Preferred Orientations in Polycrystals and their Effect on Materials Properties. The Edinburgh Building, Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [18] E. KRÖNER. “Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen”. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 4 (1 1959), S. 273–334.
- [19] M. LAMBRECHT. “Theorie und Numerik von Materialinstabilitäten elasto-plastischer Festkörper auf der Grundlage inkrementeller Variationsformulierungen”. Dissertation. Stuttgart: Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart, 2002.
- [20] *Large Data Visualization Made Easier*. Sep. 2019. URL: www.paraview.org/overview/.
- [21] E. H. LEE. “Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains”. In: *Journal of Applied Mechanics* 1 (36 1969), S. 1–6.
- [22] J. LÖBLEIN, J. SCHRÖDER und F. GRUTTMANN. “Application of generalized measures to an orthotropic finite elasto-plasticity model”. In: *Computational Materials Science* 28 (3-4 2003), S. 696–703.
- [23] J. LU und P. PAPADOPOULOS. “A covariant formulation of anisotropic finite plasticity: theoretical developments”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139 (48–51 2004), S. 5339–5358.
- [24] V. A. LUBARDA und E. H. LEE. “A Correct Definition of Elastic and Plastic Deformation and Its Computational Significance”. In: *Journal of Applied Mechanics* 48 (1 1981), S. 35–40.

Literatur

- [25] L. E. MALVERN. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 1969.
- [26] J. MANDEL. *Plasticité classique et viscoplasticité*. Bd. 97. CISM Courses and Lectures. Wien: Springer-Verlag, 1971.
- [27] C. MIEHE. “A constitutive frame of elastoplasticity at large strains based on the notion of a plastic metric”. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (30 1998), S. 3859–3897.
- [28] C. MIEHE. “A formulation of finite elastoplasticity based on dual co- and contra-variant eigenvector triads normalized with respect to a plastic metric”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 159 (3-4 1998), S. 223–260.
- [29] C. MIEHE. “A theory of large-strain isotropic thermoplasticity based on metric transformation tensors”. In: *Archive of Applied Mechanics* 66 (1-2 1995), S. 45–64.
- [30] C. MIEHE, N. APEL und M. LAMBRECHT. “Anisotropic additive plasticity in the logarithmic strain space: modular kinematic formulation and implementation based on incremental minimization principles for standard materials”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (47-48 2002), S. 5383–5425.
- [31] W. H. MÜLLER. *Streifzüge durch die Kontinuumstheorie*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
- [32] P. M. NAGHDI. “A critical review of the state of finite plasticity”. In: *Journal of Applied Mathematics and Physics* 41 (3 1990), S. 315–394.
- [33] P. PAPADOPOULOS und J. LU. “On the formulation and numerical solution of problems in anisotropic finite plasticity”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (37-38 2001), S. 4889–4910.
- [34] L. PRANDTL. “Spannungsverteilung in plastischen Körpern”. In: *Proceedings of the first International Congress for Applied Mechanics*. Hrsg. von C. B. BIEZENO und J. M. BURGERS. Delft: J. Waltman Jr., 1924, S. 43–54.
- [35] A. REUSS. “Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie”. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 10 (3 1930), S. 266–274. DOI: 10.1002/zamm.19300100308.
- [36] J. R. RICE, R. M. McMEEKING, D. M. PARKS und E. P. SORENSEN. “Recent finite element studies in plasticity and fracture mechanics.” In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 17-18, Teil 2 (1979), S. 411–442.
- [37] L. SCHREIBER. *Einführung in die Plastizitätstheorie*. Skript zur Vorlesung. Institut für Mechanik, Universität Kassel. 1997.
- [38] B. R. SETH. “Generalized strain measure with applications to physical problems”. In: *Second-order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics*. Hrsg. von M. REINER und D. ABIR. Oxford: Pergamon Press, 1964, S. 162–172.

- [39] A. SINGH, S. BASAK, L. Prakash P.S., G. G. ROY, M. N. JHA, M. MASCARENHAS und S. K. PANDA. “Prediction of earing defect and deep drawing behavior of commercially pure titanium sheets using CPB06 anisotropy yield theory”. In: *Journal of Manufacturing Processes* 33 (2018), S. 256–267.
- [40] E. STEIN, Hrsg. *The History of Theoretical, Material and Computational Mechanics - Mathematics Meets Mechanics and Engineering*. Bd. 1. Lecture Notes in Applied Mathematics and Mechanics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.
- [41] C. TRUESDELL und W. NOLL. *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*. Hrsg. von S. FLÜGGE. Bd. III/3. Encyclopedia of Physics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1965.
- [42] M. ULZ. “A finite isoclinic elasto-plasticity model with orthotropic yield function and notion of plastic spin”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (21-22 2011), S. 1822–1832.
- [43] M. ULZ. “A Green-Naghdi approach to finite anisotropic rate-independent and rate-dependent thermo-plasticity in logarithmic Lagrangean strain-entropy space”. Dissertation. Graz: Institut für Festigkeitslehre der Technischen Universität Graz, 2009.
- [44] P. WRIGGERS. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
- [45] H. WU. *Continuum Mechanics and Plasticity*. New York: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.
- [46] H. XIAO, O. T. BRUHNS und A. MEYERS. “Elastoplasticity beyond small deformations”. In: *Acta Mechanica* 182 (1-2 2006), S. 31–111.
- [47] L. ZHOU, Y. Liu L. WU, X. CHENG und J. SUN. “Microstructure and texture evolution of cold-rolled deep-drawing steel sheet during annealing”. In: *International Journal of Minerals, Metallurgy and Materials* 20 (6 2013), S. 541–548.

Anhang A.

Ableitungen

A.1. Elementare Ableitungen

Seien \mathbf{A} und \mathbf{B} symmetrische Tensoren 2. Stufe, dann gilt:
Ableitung von $\partial_{\mathbf{A}}\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ij}}{\partial A_{kl}} &= \frac{\partial}{\partial A_{kl}} \left[\frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}) \right] = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) = \overset{s}{\mathbb{1}}_{ijkl} \\ \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = \overset{s}{\mathbb{1}}} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Ableitung von $\partial_{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial A_{lm}} (A_{ik}A_{kj}^{-1}) &= 0 \\ A_{ik} \frac{\partial A_{kj}^{-1}}{\partial A_{lm}} &= -\frac{\partial A_{ik}}{\partial A_{lm}} A_{kj}^{-1} \quad | A_{oi}^{-1}(\bullet) \\ \delta_{ok} \frac{\partial A_{kj}^{-1}}{\partial A_{lm}} &= -A_{oi}^{-1} \underbrace{\frac{\partial A_{ik}}{\partial A_{lm}}}_{\text{Gl. A.1}} A_{kj}^{-1} \\ \frac{\partial A_{oj}^{-1}}{\partial A_{lm}} &= -A_{oi}^{-1} \frac{1}{2} (\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}) A_{kj}^{-1} \\ \Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{A}} \right)_{ijkl} = -\frac{1}{2} (A_{ik}^{-1}A_{lj}^{-1} + A_{il}^{-1}A_{kj}^{-1})} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Ableitung von $\partial_{\mathbf{A}}\text{Sp}(\mathbf{A})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Sp}(A_{ij})}{\partial A_{kl}} &= \frac{\partial (A_{ij}\delta_{ij})}{\partial A_{kl}} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \delta_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{il} + \delta_{il}\delta_{ik}) \\ \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \text{Sp}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{1}} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Ableitung von $\partial_A \text{Sp}(\mathbf{AB})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Sp}(\mathbf{AB})}{\partial \mathbf{A}} &= \underbrace{\frac{\partial \text{Sp}(\mathbf{AB})}{\partial(\mathbf{AB})}}_{\text{Gl. A.3}} : \frac{\partial(\mathbf{AB})}{\partial \mathbf{A}} \\ &= \delta_{ij} \underbrace{\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{ml} + \delta_{il} \delta_{mk})}_{\mathbb{1}_{imkl}} B_{mj} = \frac{1}{2} (B_{lk} + B_{kl}) \\ \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \text{Sp}(\mathbf{AB})}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{B}^T = \mathbf{B}} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ableitung von $\partial_A \det \mathbf{A}$ (vgl. Wriggers [44]):

$$\boxed{\frac{\partial \det \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = \det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-T}} \quad (\text{A.5})$$

Ableitung von $\partial_B \text{Sp}(\mathbf{AB}^{-1})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Sp}(\mathbf{AB}^{-1})}{\partial \mathbf{B}} &= \underbrace{\frac{\partial \text{Sp}(\mathbf{AB}^{-1})}{\partial(\mathbf{AB}^{-1})}}_{\text{Gl. A.3}} : \frac{\partial(\mathbf{AB}^{-1})}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{1} : \underbrace{\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{B}}}_{\text{Gl. A.2}} \\ &= \delta_{ij} A_{im} \left(-\frac{1}{2} \right) (B_{mk}^{-1} B_{lj}^{-1} + B_{ml}^{-1} B_{kj}^{-1}) \\ &= -\frac{1}{2} (B_{lj}^{-1} A_{jm} B_{mk}^{-1} + B_{kj}^{-1} A_{jm} B_{ml}^{-1}) \\ \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \text{Sp}(\mathbf{AB}^{-1})}{\partial \mathbf{B}} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Weiters treten später die partiellen Ableitungen der Ausdrücke $2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{AB}^{-1})}$ und $\ln^2 \sqrt{\det(\mathbf{AB}^{-1})}$ auf. Diese werden hier vorab hergeleitet:

Ableitung von $\partial_A \left(2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{AB}^{-1})} \right)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \left(2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{AB}^{-1})} \right) &= 2 \underbrace{\frac{\frac{\partial \ln(\bullet)}{\partial(\bullet)}}{1}}_{\frac{1}{\det(\mathbf{AB}^{-1})}} \underbrace{\frac{\frac{\partial \sqrt{(\bullet)}}{\partial(\bullet)}}{1}}_{2\sqrt{\det(\mathbf{AB}^{-1})}} \underbrace{\frac{\partial \det(\bullet)}{\partial(\bullet)}}_{\det(\mathbf{AB}^{-1})} (\mathbf{AB}^{-1})^{-T} \\ &= (\mathbf{AB}^{-1})^{-T} : \mathbf{1} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-T} \mathbf{B}^T : \underbrace{\mathbf{1} \mathbf{B}^{-1}}_{(\bullet)^T} = \mathbf{A}^{-T} : \underbrace{\mathbf{1} \mathbf{1}}_{\mathbb{1}} \\ &= \mathbf{A}^{-T} = \mathbf{A}^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \left(2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{AB}^{-1})} \right) = \mathbf{A}^{-T} = \mathbf{A}^{-1}} \quad (\text{A.7})$$

Ableitung von $\partial_B \left(2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \right)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \mathbf{B}} \left(2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \right) &= 2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})}} \frac{1}{2\sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})}} \det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}) (\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})^{-\text{T}}}_{=1} : \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{B}} \\
 &= (\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})^{-\text{T}} : \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{B}} = \underbrace{\mathbf{A}^{-\text{T}} \mathbf{B}^{\text{T}}}_{(\bullet)^{\text{T}}} : \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{B}} \\
 &= \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A}^{-\text{T}} \mathbf{B}^{\text{T}} : \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{1} \mathbf{B}^{\text{T}} : \underbrace{\frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{B}}}_{\text{Gl. A.2}} \\
 &= -B_{ji} \frac{1}{2} (B_{ik}^{-1} B_{lj}^{-1} + B_{il} B_{kj}^{-1}) = -\frac{1}{2} (B_{lk}^{-1} + B_{kl}^{-1})
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathbf{B}} \left(2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \right) = -\mathbf{B}^{-\text{T}} = -\mathbf{B}^{-1}} \quad (\text{A.8})$$

Ableitung von $\partial_A \left(\ln^2 \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \left(\ln^2 \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \right) = 2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \left(\ln \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \right)}_{\frac{1}{2} \cdot \text{Gl. A.7}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \left(\ln^2 \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \right) = \ln \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \mathbf{A}^{-1}} \quad (\text{A.9})$$

Ableitung von $\partial_B \left(\ln^2 \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{B}} \left(\ln^2 \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \right) = 2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{B}} \left(\ln \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \right)}_{\frac{1}{2} \cdot \text{Gl. A.8}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathbf{B}} \left(\ln^2 \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \right) = -\ln \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})} \mathbf{B}^{-1}} \quad (\text{A.10})$$

A.2. Elastisches Potenzial

Das elastische Potenzial ψ ist definiert als:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{C}, \mathbf{C}_p, \kappa) := & \frac{\mu}{2} \left(\text{Sp}(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1}) - 2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} - 3 \right) \\ & + \frac{\lambda}{2} \ln^2 \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} + \frac{1}{2} h \kappa^2 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Daraus folgen die Ableitungen:

Ableitung von $\partial_{\mathbf{C}}\psi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = & \frac{\mu}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial \text{Sp}(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})}{\partial \mathbf{C}}}_{\text{Gl. A.4}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \right)}_{\text{Gl. A.7}} \right) \\ & + \frac{\lambda}{2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(\ln^2 \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \right)}_{\text{Gl. A.9}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\mu}{2} (\mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{C}^{-1}) + \frac{\lambda}{2} \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \mathbf{C}^{-1}} \quad (\text{A.12})$$

Ableitung von $\partial_{\mathbf{C}_p}\psi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}_p} = & \frac{\mu}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial \text{Sp}(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})}{\partial \mathbf{C}_p}}_{\text{Gl. A.6}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_p} \left(2 \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \right)}_{\text{Gl. A.8}} \right) \\ & + \frac{\lambda}{2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_p} \left(\ln^2 \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \right)}_{\text{Gl. A.10}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}_p} = \frac{\mu}{2} (\mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}_p^{-1}) - \frac{\lambda}{2} \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \mathbf{C}_p^{-1}} \quad (\text{A.13})$$

Ableitung von $\partial_{\mathbf{C}\mathbf{C}}^2\psi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = & \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}}_{\text{Gl. A.12}} \\ = & -\frac{\mu}{2} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}}_{\text{Gl. A.2}} \\ & + \frac{\lambda}{2} \left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(\ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \right)}_{\frac{1}{2} \cdot \text{Gl. A.7}} + \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}}_{\text{Gl. A.2}} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}} \quad (\text{A.14})$$

Ableitung von $\partial_{\mathbf{C}\mathbf{C}_p}^2\psi$:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{C}\partial\mathbf{C}_p} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{C}_p} \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}}}_{\text{Gl. A.12}} = \underbrace{\frac{\mu}{2} \frac{\partial\mathbf{C}_p^{-1}}{\partial\mathbf{C}_p}}_{\text{Gl. A.2}} + \frac{\lambda}{2} \left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{C}_p} \left(\ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \right)}_{\frac{1}{2}\cdot\text{Gl. A.8}} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{C}\partial\mathbf{C}_p} = -\frac{\lambda}{4}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial\mathbf{C}_p^{-1}}{\partial\mathbf{C}_p}} \quad (\text{A.15})$$

Ableitung von $\partial_{\mathbf{C}_p\mathbf{C}}^2\psi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{C}_p\partial\mathbf{C}} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{C}} \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}_p}}_{\text{Gl. A.13}} = -\frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial\mathbf{C}} (\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1}) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \left(\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{C}} \left(\ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \right)}_{\frac{1}{2}\cdot\text{Gl. A.7}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{NR}} : \quad \frac{\partial}{\partial\mathbf{C}} (\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1}) &= C_{pIM}^{-1} \frac{1}{2} (\delta_{MK}\delta_{NL} + \delta_{ML}\delta_{NK}) C_{pNJ}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (C_{pIK}^{-1}C_{pLJ}^{-1} + C_{pIL}^{-1}C_{pKJ}^{-1}) = -\frac{\partial\mathbf{C}_p^{-1}}{\partial\mathbf{C}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{C}_p\partial\mathbf{C}} = -\frac{\lambda}{4}\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial\mathbf{C}_p^{-1}}{\partial\mathbf{C}_p}} \quad (\text{A.16})$$

Ableitung von $\partial_{\mathbf{C}_p\mathbf{C}_p}^2\psi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{C}_p\partial\mathbf{C}_p} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{C}_p} \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}_p}}_{\text{Gl. A.13}} \\ &= \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial\mathbf{C}_p^{-1}}{\partial\mathbf{C}_p} - \underbrace{\frac{\partial\mathbf{C}_p^{-1}}{\partial\mathbf{C}_p} \mathbf{C} \mathbf{C}_p^{-1}}_{=:\mathbb{K}_1} - \underbrace{\mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C} \frac{\partial\mathbf{C}_p^{-1}}{\partial\mathbf{C}_p}}_{=:\mathbb{K}_2} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \left(\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{C}_p} \left(\ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \right)}_{\frac{1}{2}\cdot\text{Gl. A.8}} + \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \frac{\partial\mathbf{C}_p^{-1}}{\partial\mathbf{C}_p} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{C}_p\partial\mathbf{C}_p} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{2}\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1} - \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \frac{\partial\mathbf{C}_p^{-1}}{\partial\mathbf{C}_p} \right) + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial\mathbf{C}_p^{-1}}{\partial\mathbf{C}_p} - \mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2 \right)} \quad (\text{A.17})$$

Anhang A. Ableitungen

mit:

$$\mathbb{K}_{1IJKL} = \left(\frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{C}_p} \right)_{IMKL} C_{MN} C_{pNJ}^{-1} \quad (\text{A.18a})$$

$$\mathbb{K}_{2IJKL} = C_{pIM}^{-1} C_{MN} \left(\frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{C}_p} \right)_{NJKL} \quad (\text{A.18b})$$

Der Mandel-Spannungstensor (eigentlich der Mandel-Spannungs-ähnliche Tensor auf der Ausgangskonfiguration) ist gegeben in der Form

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \mathbf{C}\mathbf{S} = 2\mathbf{C} \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}}_{\text{Gl. A.12}} \\ &= \mu (\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{1}) + \lambda \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

In dieser Arbeit über isotrope Plastizität ergibt sich diese Größe symmetrisch, das heißt:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^T. \quad (\text{A.20})$$

Damit folgt für die Ableitungen:

Ableitung von $\partial_{\mathbf{C}}\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{C}} &= \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1}) + \lambda \mathbf{1} \otimes \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(\ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \right)}_{\frac{1}{2} \cdot \text{Gl. A.7}} \\ \boxed{\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{C}} = \mu \overset{s}{\mathbb{1}}\mathbf{C}_p^{-1} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{1} \otimes \mathbf{C}^{-1}} & \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

mit:

$$\left(\overset{s}{\mathbb{1}}\mathbf{C}_p^{-1} \right)_{IJKL} = \overset{s}{\mathbb{1}}_{IMKL} C_{pMJ}^{-1} \quad (\text{A.22})$$

Ableitung von $\partial_{\mathbf{C}_p}\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{C}_p} &= \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_p} (\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1}) + \lambda \mathbf{1} \otimes \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_p} \left(\ln \sqrt{\det(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})} \right)}_{\frac{1}{2} \cdot \text{Gl. A.8}} \\ \boxed{\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{C}_p} = \mu \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{C}_p} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1}} & \quad (\text{A.23}) \end{aligned}$$

A.3. „level set“-Funktion

Die „level set“-Funktion ϕ ist gegeben als:

$$\phi = \sqrt{\Sigma : \mathbb{D} : \Sigma} + \sqrt{\frac{2}{3}q} \quad \text{mit} \quad \mathbb{D} = \mathbb{1} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}). \quad (\text{A.24})$$

Damit folgt für die **Ableitung von** $\partial_{\Sigma}\phi$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial \sqrt{\cdot}}{\partial \cdot}}{\sqrt{\Sigma : \mathbb{D} : \Sigma}} \underbrace{\left(\overset{s}{\mathbb{1}} : \mathbb{D} : \Sigma + \Sigma : \mathbb{D} : \overset{s}{\mathbb{1}} \right)}_{2 \Sigma^{\text{D}}} \quad (\text{A.25})$$

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} = \frac{\Sigma^{\text{D}}}{\sqrt{\Sigma : \Sigma^{\text{D}}}}} \quad (\text{A.25})$$

mit dem Spannungsdeviator:

$$\Sigma^{\text{D}} = \mathbb{D} : \Sigma = \Sigma : \mathbb{D} \quad (\text{A.26})$$

Aus Gleichung A.25 folgt mit der Quotientenregel die **Ableitung von** $\partial_{\Sigma\Sigma}^2\phi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \Sigma \partial \Sigma} &= \frac{\partial}{\partial \Sigma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma} \right) \\ &= \frac{\overset{s}{\mathbb{1}} : \mathbb{D} \sqrt{\Sigma : \Sigma^{\text{D}}}}{\Sigma : \Sigma^{\text{D}}} - \frac{\Sigma^{\text{D}} \otimes \frac{\Sigma^{\text{D}}}{\sqrt{\Sigma : \Sigma^{\text{D}}}}}{\Sigma : \Sigma^{\text{D}}} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \Sigma \partial \Sigma} = \frac{\mathbb{D}}{\sqrt{\Sigma : \Sigma^{\text{D}}}} - \frac{\Sigma^{\text{D}} \otimes \Sigma^{\text{D}}}{(\Sigma : \Sigma^{\text{D}})^{3/2}}} \quad (\text{A.27})$$