



Florian Oberlechner, BSc

**Entwicklung eines modellbasierten
Optimierungsalgorithmus für eine
Wärmeversorgungsanlage mit
Biomasse-Feuerung**

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Elektrotechnik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Dipl.-Ing. Dr.techn. Markus Göllles
Em.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Nicolaos Dourdoumas

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Datum

Unterschrift

Vorwort und Danksagung

Die vorliegende Masterarbeit wurde in Kooperation mit dem Kompetenzzentrum BIOENERGY 2020+ erstellt. Ich bedanke mich an dieser Stelle herzlich beim gesamten Team von BIOENERGY für die stets freundschaftliche und produktive Zusammenarbeit.

Insbesondere danke ich meinem Betreuer von seiten des Kompetenzzentrums BIOENERGY 2020+ *Markus Gölles* sowie meinem Betreuer vom Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik *Nicolaos Dourdoumas*.

Des Weiteren bedanke ich mich bei *Viktor Unterberger* und *Klaus Lichtenegger*. Durch Ihre fachliche Unterstützung, die vielen produktiven Diskussionen sowie Ihre Anstrengungen beim Korrekturlesen haben Sie maßgeblich zur hohen Qualität dieser Arbeit beigetragen.

Ein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern *Harald* und *Steffi*, die mich in allen Entscheidungen bedingungslos unterstützten und mir diesen Weg somit ermöglicht haben, sowie meinem Bruder *Christian* für seine Hilfe beim Korrekturlesen der Arbeit.

Kurzfassung

Wärmeversorgungsanlagen von Gebäuden, bestehend aus Biomasse-Feuerung, Solarkollektoren, Pufferspeicher, Heizkreis und Warmwasserzapfstellen gewinnen aufgrund ihrer Nachhaltigkeit zunehmend an Bedeutung. In den letzten Jahren wurden insbesondere für eine effiziente Regelung der Biomasse-Feuerung sehr gute Konzepte entwickelt. Diese können jedoch zumeist aufgrund unzureichender, übergeordneter Systemregelungen nicht ihr volles Potential ausschöpfen. In ihrer primitivsten Ausführung schaltet eine Systemregelung die Biomasse-Feuerung anhand der Ladehöhe des Pufferspeichers aus und ein. Diese Art der Regelung hat unweigerlich viele Ein-/ Ausschaltvorgänge der Feuerung, sowie eine schlechte Ausnutzung des solaren Eintrags zur Folge. Insbesondere bei Biomasse-Feuerungen sind Ein-/ Ausschaltvorgänge äußerst unwirtschaftlich und führen zu stark erhöhten Schadstoffemissionen. Die häufigen Ein-/ Ausschaltvorgänge verursachen zusätzlich erhöhte Wartungs- und Betriebskosten und schlussendlich eine verkürzte Lebensdauer zahlreicher Komponenten.

Um die Ein-/ Ausschaltvorgänge zu minimieren und den solaren Eintrag zu steigern, soll im Rahmen dieser Arbeit ein übergeordnetes, modellprädiktives Regelungskonzept für die gesamte Wärmeversorgungsanlage entwickelt werden. Nach einer theoretischen Einführung in gemischt-ganzzahlige Optimalsteuerungsprobleme sowie ausgewählter Lösungsmethoden werden Prädiktionsmodelle für alle Komponenten der Wärmeversorgungsanlage entwickelt. Aufbauend auf den mathematischen Modellen für die einzelnen Komponenten der Anlage wird eine nichtlineare modellprädiktive Regelung entwickelt. Diese berücksichtigt zusätzlich Wetterprognosen sowie die erwartete Lastabnahme und führt schlussendlich zu einer Minimierung des Brennstoffverbrauchs sowie der Anzahl der Ein-/ Ausschaltvorgänge. Den Abschluss der Arbeit bilden ausführliche Simulationsstudien mit unterschiedlichen Wetterszenarien sowie Vergleiche mit herkömmlichen Regelungsstrategien.

Abstract

Heat supply systems for buildings, consisting of biomass boiler, solar collectors, buffer storage, heating circuit and hot-water-taps, are becoming more important due to their sustainability. Especially for the combustion in the biomass boiler some very comprehensive control strategies were developed within the last years. However, due to the insufficient superordinate system control, these control strategies are not able to exploit their full potential. In its most primitive implementation, the superordinate system control switches the biomass boiler on and off according to the charge of the buffer storage. This leads to a lot of principally avoidable start-stop operations of the biomass boiler and a bad exploitation of the buffer storage capacity. In particular, the biomass boiler's start-stop operations are very uneconomic and cause high pollutant emissions. Furthermore, the start-stop operations generate higher maintenance and operational costs as well as a shortened lifespan of several components.

In order to reduce the start-stop operations and to increase the solar input, a new model predictive control strategy for the superordinate system control should be developed in this thesis.

After a theoretical introduction in mixed-integer optimal control problems and a subset of their solution methods, prediction models for all components of the heat supply system are developed. Based on the mathematical models for each component of the system, a nonlinear model predictive control strategy, which considers additional weather forecasts and the expected load, is developed. This control strategy results in a minimization of the fuel consumption and the number of start-stop operations. Finally, detailed simulation studies with different weather scenarios were performed with both a conventional control and the developed model predictive control strategy showing significant improvements by the new control.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Optimalsteuerung	5
2.1.1	Formulierung des Optimierungsproblems	5
2.1.2	Überblick über die Lösungsmethoden	6
2.1.3	Direktes Mehrfachschießverfahren	11
2.1.4	Numerische Methoden zur Lösung der Anfangswertprobleme	14
2.2	Nichtlineare modellprädiktive Regelung	16
2.2.1	Struktur eines NMPC Regelkreises	17
2.2.2	Wahl der Startwerte	18
2.3	Dynamische Hybridsysteme	19
2.3.1	Autonome Umschaltung	19
2.3.2	Autonome Zustandssprünge	21
2.3.3	Gesteuerte Umschaltung	22
2.3.4	Gesteuerte Zustandssprünge	23
2.4	Zusammenfassung	23
3	Gemischt-ganzzahliges Optimalsteuerungsproblem	25
3.1	Formulierung des Problems	26
3.2	Lösungsmethoden	28
3.3	Äußere Konvexifizierung und Relaxierung	28
3.4	Rundungsstrategien	31
3.5	Minimierung der Schaltvorgänge	33
3.6	Zusammenfassung	35
4	Entwurf von Prädiktionsmodellen	37
4.1	Aufbau und Funktionsweise des Gesamtsystems	38
4.2	Modellierung der Biomasse-Feuerung	40
4.2.1	Modellierung des Brennstoffbetts	43
4.2.2	Modellierung von Stahl und Schamott als Wärmespeicher	44
4.2.3	Modellierung des Wärmeübertragers	45
4.2.4	Zusammenfassung der Teilsysteme	46
4.2.5	Schaltbedingungen	47
4.3	Modellierung des Pufferspeichers	50
4.3.1	Systemtechnische Betrachtung des Modells	54

4.3.2	Modellierung der Thermokline	57
4.3.3	Zusammenfassung der Teilsysteme	60
4.4	Modellierung der Solarkollektoren	62
4.4.1	Modellierung der effektiven Sonneneinstrahlung	63
4.4.2	Modellierung der Solarkollektoren	66
4.5	Zusammenfassung	68
5	Reglerentwurf für eine Wärmeversorgungsanlage	71
5.1	Gütefunktional	71
5.2	Umschaltung der Systemmodi	72
5.3	Äußere Konvexifizierung und Relaxierung	75
5.4	Optimalsteuerungsproblem	75
5.5	Zusammenfassung	78
6	Simulationsergebnisse	79
6.1	Parameter des MINMPC-Reglers	79
6.2	Prädiktionsmodell	81
6.2.1	Lastprofile für die Wärmeabnehmer	81
6.2.2	Parameter des Prädiktionsmodells	81
6.3	Simulationsmodell	83
6.3.1	Simulationsmodell für den Pufferspeicher	84
6.3.2	Parameter des Simulationsmodells	84
6.4	Vergleich zwischen MINMPC und 2-Punkt Regler	85
6.4.1	Übergangszeit, bewölkt	86
6.4.2	Übergangszeit, heiter	91
6.4.3	Winter, bewölkt	94
6.4.4	Winter, heiter	98
6.5	Abweichungen bei der Prädiktion	102
6.5.1	Abweichung des Warmwasserverbrauchs	103
6.5.2	Abweichung des solaren Eintrags	104
6.6	Zusammenfassung	106
7	Zusammenfassung und Ausblick	109
7.1	Zusammenfassung	109
7.2	Ausblick	111
	Literaturverzeichnis	115
	Abkürzungsverzeichnis	117

Kapitel 1

Einleitung

Die energetische Nutzung von Biomasse in Kombination mit Solarthermie gewinnt seit vielen Jahren in Österreich zunehmend an Bedeutung. Während 1970 nur 15,5% des Bruttoinlandsverbrauchs¹ aus erneuerbarer Energie stammten, stieg dieser Anteil bis 2012 auf 32,2% [2]. Der Anteil an Bioenergie innerhalb der erneuerbaren Energien stieg im selben Zeitraum von 38,0% auf 51,4%. Neben festen Brennstoffen zählen auch Biogas, Deponiegas, Biodiesel, Klärschlamm, Ablauge und Tiermehl- bzw. fett zur Bioenergie. Seit 2011 wurde allerdings keine Zunahme von Bioenergie innerhalb des Bruttoinlandsverbrauchs mehr verzeichnet. Dies wird vor allem dem stagnierenden Ölpreis und den damit verbundenen Gewöhnungseffekten der Endverbraucher sowie den anhaltenden Förderungen der österreichischen Mineralölindustrie zugeschrieben. Um in Zukunft wieder signifikante Zuwächse an Bioenergie im Bruttoinlandsverbrauch verzeichnen zu können, sollte sich die Bioenergie-Branche nicht einzig und allein auf das ökologische Argument seiner Konzepte stützen. Vielmehr muss durch moderne Technologien und Innovationen eine Effizienzsteigerung der Anlagen bei gleichzeitiger Senkung der Betriebskosten erreicht werden.

In den vergangenen Jahren wurde bei *Bioenergy2020+* ein modellbasiertes Regelungskonzept für Biomasse-Feuerungen entwickelt und stetig verbessert [6, 10, 12, 25, 26, 28]. Diese Regelung liefert bereits sehr gute Ergebnisse hinsichtlich Schadstoffminimierung und Brennstoffverbrauch. Wird eine Biomasse-Feuerung jedoch in einer häuslichen Wärmeversorgungsanlage installiert, so spielt neben der Verbrennungsregelung in der Feuerung auch die Regelung des Gesamtsystems eine entscheidende Rolle. In der typischen Wärmeversorgungsanlage eines Einfamilienhauses (siehe Abbildung 1.1) wird Wasser in einem Heizkessel durch die Verbrennung von Biomasse (meist Hackgut oder Pellets) erwärmt. Das warme Wasser gelangt in einen Pufferspeicher und versorgt von dort aus entweder direkt den Heizkreis oder über Wärmeübertrager die Warmwasserzapfstellen. Das überschüssige warme Wasser wird zwischengespeichert und deckt nach dem Abschalten der Feuerung eine Zeit lang den Wärmebedarf des Gebäudes. Des Weiteren kommen zur Senkung der Brennstoffkosten oft Solarkollektoren zum Einsatz. Insbesondere in den warmen Sommermonaten können diese einen großen Beitrag zur Wärmeversorgung leisten.

¹Der Bruttoinlandsverbrauch ist jene Energiemenge, die zur Deckung des inländischen Energiebedarfs notwendig ist.

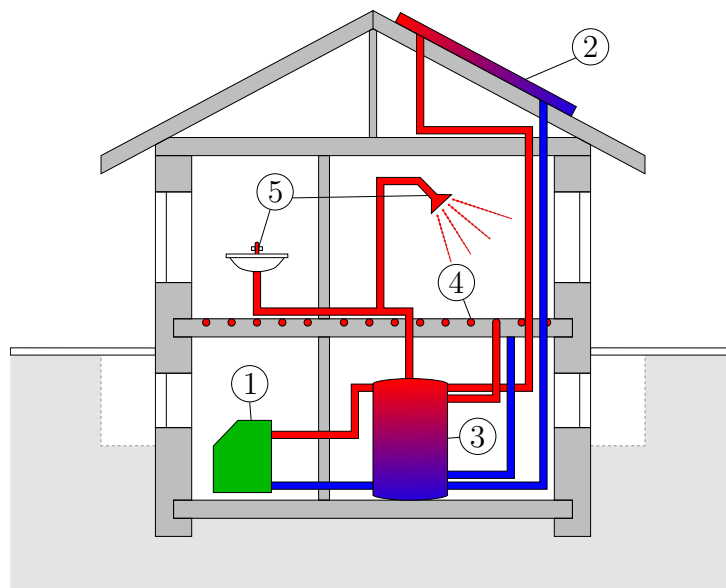


Abbildung 1.1: Schema einer Wärmeversorgungsanlage mit Biomasse-Feuerung (1), Solar-
kollektoren (2), Pufferspeicher (3), Heizkreis mit Fußbodenheizung (4) und
Warmwasserzapfstellen (5). Die Solarkollektoren und die Warmwasserzapfstellen sind durch Wärmeübertrager vom restlichen Heizkreis getrennt.

In der Praxis werden derartige Systeme oft mit simplen Zweipunktregelungen realisiert. Hierbei wird meist über einen oder zwei Temperatursensoren der Ladezustand des Pufferspeichers ermittelt. Ist der Pufferspeicher entladen, so wird die Feuerung gestartet und der Speicher beladen. Durch eine solch einfache Art der Regelung wird jedoch bei weitem nicht das volle Potential der Anlage ausgeschöpft, da eine große Anzahl an Einflussfaktoren vernachlässigt werden, die bekannt sind oder berechnet werden könnten. Besonders im Bereich privater Kleinf Feuerungen kommt es durch diese unzureichenden Regelungsstrategien zu sehr vielen Ein- und Ausschaltvorgängen der Biomasse-Feuerung. Während Biomasse-Feuerungen im Nennbetrieb bereits Wirkungsgrade über 90% erreichen, sinkt dieser vor allem in der Start- und Stopphase meist signifikant. Die unvollständige Verbrennung in diesen Phasen führt zu einer Verschlackung der Feuerung, hohen Schadstoffemissionen sowie einem erhöhten Brennstoffverbrauch. Eine gezielte Minimierung der Start- und Stopvorgänge durch eine intelligente Regelungsstrategie birgt demnach enormes Potential hinsichtlich Schadstoffreduktion, Effizienzsteigerung und Kostensenkung.

Das Ziel dieser Arbeit ist daher der Entwurf eines alternativen Regelungskonzepts für eine Wärmeversorgungsanlage bestehend aus Biomasse-Feuerung, Solarkollektoren und Pufferspeicher. Die resultierende Regelung soll im Gegensatz zur klassischen Zweipunktregelung anhand von mathematischen Modellen, jahreszeitabhängigen Lastprofilen und Wetterprognosen eine Vorhersage über den zukünftigen Zustand des Systems treffen, um diese Information dann bei der Regelung zu berücksichtigen.

Im Zuge einer umfangreichen Literaturrecherche zu Beginn der Arbeit zeigte sich bald die modellprädiktive Regelung (Model Predictive Control, MPC) als besonders geeignet für die Regelung eines Systems dieser Art. Der entscheidende Vorteil dieser Strategie besteht in der Eigenschaft, Beschränkungen aller systemrelevanten Größen explizit berücksichtigen zu können. Diese Fähigkeit eröffnet dem Entwickler einer Regelung zum Beispiel die

Möglichkeit, ein System gezielt bis an seine Grenzen auszureizen und somit in seiner Effizienz zu steigern. Im Zuge des Entwurfs von physikalischen Modellen in der ersten Phase des dieser Arbeit zugrunde liegenden Projektes entstanden ein hybrides Modell der Biomasse-Feuerung, ein nichtlineares Modell des Pufferspeichers und ein statisches Modell der Solarkollektoren. Die Leistungsabgabe an den Heizkreis sowie an die Warmwasserzapfstellen wurde durch tages- und jahreszeitabhängige Lastprofile modelliert. Das Gesamtmodell ist also ein hybrid-nichtlineares Modell.

Für die Regelung von Systemen, die ausreichend genau durch lineare Modelle beschrieben werden können, haben sich ausgereifte Reglerentwurfsprogramme, wie die MPC-Toolbox in Matlab (Fa. Mathworks), etabliert. Softwarepakete dieser Art ermöglichen es auch dem relativ unerfahrenen Anwender, bei vorhandenem mathematischen Modell der Regelstrecke, in wenigen Schritten gute Regler für lineare Systeme zu entwerfen. Aufgrund der hybriden-nichtlinearen Systemcharakteristik der Wärmeversorgungsanlage gestaltet sich hier der Reglerentwurf jedoch ungleich schwieriger. Es ist der Entwurf einer nichtlinearen modellprädiktiven Regelung (Nonlinear Model Predictive Control, NMPC) erforderlich.

Diese Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Der erste Teil umfasst die Kapitel 2 und Kapitel 3. Hier werden zunächst, ohne dem zu regelnden System explizit Aufmerksamkeit zu schenken, die notwendigen theoretischen Grundlagen für den Entwurf der modellprädiktiven Regelung für das Gesamtsystem einer Wärmeversorgungsanlage erarbeitet. Kapitel 4 beinhaltet die praktischen Grundlagen einer Wärmeversorgungsanlage sowie eine ausführliche Beschreibung der Modellbildung und im Kapitel 5 werden dann die zuvor erarbeiteten theoretischen Grundlagen beim Reglerentwurf für die Wärmeversorgungsanlage angewendet. Anschließend wird in Kapitel 6 die entworfene Regelung anhand ausgiebiger Simulationsstudien getestet. Ein abschließender Ausblick in Kapitel 7 über zukünftige Entwicklungsmöglichkeiten auf diesem Gebiet bildet den Abschluss dieser Arbeit.

Kapitel 2

Grundlagen

Dieses Kapitel soll einen theoretischen Überblick über Optimalsteuerungen (Abschnitt 2.1) und deren Anwendung im Zuge einer nichtlinearen modellprädiktiven Regelung (Nonlinear Model Predictive Control, NMPC) (Abschnitt 2.2) liefern. Abschließend werden in Abschnitt 2.3 die mathematischen Grundlagen zu dynamischen Hybridsystemen vorgestellt.

2.1 Optimalsteuerung

Das Optimalsteuerungsproblem kann als die Vorstufe zur modellprädiktiven Regelung betrachtet werden. Im Abschnitt 2.1.1 wird zunächst das Problem der Optimalsteuerung mathematisch formuliert. Optimalsteuerungsprobleme können insbesondere bei nichtlinearen dynamischen Systemen meist nur numerisch, mit speziellen Optimierungsverfahren gelöst werden. Im Abschnitt 2.1.2 werden daher unterschiedliche Lösungsmethoden für Optimierungsaufgaben dieser Art vorgestellt. Als ausgewähltes Verfahren wird im Abschnitt 2.1.3 das direkte Mehrfachschießverfahren näher beschrieben.

2.1.1 Formulierung des Optimierungsproblems

Gegeben sei ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen (Ordinary Differential Equations, ODEs) der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

mit der Zeit $t \in [t_0, t_f] \subset \mathbb{R}_+$, den Zustandstrajektorien $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ und den Trajektorien der Stellgrößen $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Ausgehend von diesen Differentialgleichungen kann ein kontinuierliches Optimalsteuerungsproblem (Ordinary Control Problem, OCP) definiert werden, welches das dynamische System aus Gleichung 2.1 als Gleichungsnebenbedingung enthält.

Definition 2.1 (kontinuierliches Optimalsteuerungsproblem)

Das OCP wird als unendlich-dimensionales, beschränktes Optimierungsproblem der Form

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(\cdot)} \quad & J(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \text{unter} \quad & \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ & \mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\ & \mathbf{0} \geq \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_f] \end{aligned} \quad (2.2)$$

angeschrieben, in welchem ein Gütefunktional $J(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ durch die Variation der Stellgrößen $\mathbf{u}(t)$ unter Einhaltung der ODEs mit den Funktionen $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ als rechte Seite, den zusätzlichen Gleichungsnebenbedingungen $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ sowie den Ungleichungsnebenbedingungen $\mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ minimiert wird.

Beim Gütefunktional unterscheidet man zwischen der *Mayer-Form*

$$J(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \phi(t_f, \mathbf{x}(t_f)), \quad (2.3)$$

mit $\phi : [t_0, t_f] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, der *Lagrange-Form*

$$J(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} l(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (2.4)$$

mit $l : [t_0, t_f] \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, sowie der *Bolza-Form*

$$J(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \phi(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} l(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt, \quad (2.5)$$

welche eine Kombination aus *Mayer-Form* und *Lagrange-Form* ist. Besteht die Anforderung an eine Optimalsteuerung darin, vorgegebene Zustandstrajektorien nachzufahren, so kann als Gütefunktional zum Beispiel auch ein Ansatz nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate gewählt werden.

2.1.2 Überblick über die Lösungsmethoden

Um ein Optimalsteuerungsproblem der Form (2.2) zu lösen, gibt es eine Reihe unterschiedlicher Möglichkeiten. Dieser Abschnitt soll einen kurzen Überblick über die Lösungsansätze geben. Im Abschnitt 2.1.3 wird dann das direkte Mehrfachschießverfahren als ausgewähltes Verfahren näher beschrieben.

Dynamische Programmierung

Für die Lösung von Optimierungsproblemen mittels dynamischer Programmierung wird auf das Optimalitätsprinzip von Bellman zurückgegriffen:

„An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.“ - Bellman, 1957

In einfachen Worten besagt dieses Prinzip, dass alle Teilfolgen einer optimalen Entscheidungsfolge, unabhängig vom Startwert und der ersten Entscheidung, wieder optimal sein müssen. Eine Optimierung liefert zum Beispiel eine Route von Salzburg nach Wien über Linz als die kürzeste (optimale) Strecke. Nach dem Optimalitätsprinzip muss demnach auch die Strecke von Salzburg nach Linz, sowie von Linz nach Wien optimal sein. Ausgehend von dieser Annahme kann jetzt gemäß [16] eine rekursive Kostenfunktion

$$\varphi(t_k, \mathbf{x}_k) := \min \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} l(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k \right\} \quad (2.6)$$

für die Zeitpunkte

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_f \quad (2.7)$$

definiert werden. Eine optimale Stellgrößenfolge $\mathbf{u}^*(t)$ wird nun ermittelt, in dem man diese Kostenfunktion rekursiv, beginnend mit $k = N$, für alle zulässigen $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{u}(t)$ berechnet. Die Trajektorien $\mathbf{x}^*(t)$ und $\mathbf{u}^*(t)$ haben den kleinsten Wert des Integrals zur Folge und werden somit als optimal im Sinne der rekursiven Kostenfunktion bezeichnet. Diese optimalen Trajektorien werden für alle Zeitintervalle $[t_k, t_{k+1}]$ berechnet. Es ist also notwendig, $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{u}(t)$ zu diskretisieren. Um die Optimierung zu beschleunigen, können die Teillösungen in einer Tabelle gespeichert werden. Bevor man eine neue Teillösung berechnet, wird zuvor die Tabelle durchsucht, ob für dieses Teilproblem bereits eine Lösung berechnet wurde.

Die dynamische Programmierung hat den entscheidenden Vorteil, dass die Menge aller zulässigen $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{u}(t)$ nach einem globalen Minimum abgesucht wird. Allerdings steigt die benötigte Rechenzeit bereits bei einer leichten Erhöhung der Anzahl an Optimierungsparametern \mathbf{x}_k und \mathbf{u}_k sehr stark an.

Indirekte Methoden

Die indirekten Methoden zur Lösung von Optimierungsproblemen verwenden das Minimumprinzip von Pontryagin. Dieses Prinzip basiert grundsätzlich auf der Variationsrechnung und ihm liegt die Annahme zugrunde, dass eine optimale Steuerung $\mathbf{u}^*(t)$ die Hamiltonfunktion

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = l(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.8)$$

des Optimierungsproblems (2.2) minimiert. Der Vektor $\boldsymbol{\lambda}(t)$ wird als Kozustand oder adjungierter Zustand bezeichnet. Hängt H nicht explizit von der Zeit t ab, so ist sie eine Konstante der Bewegung. Für einfache mechanische Systeme würde sich nach Vernachlässigung aller Verluste zum Beispiel

$$H = T + V, \quad (2.9)$$

also die Summe aus kinetischer T und potentieller Energie V ergeben. Das Minimumprinzip von Pontryagin wird im Folgenden ohne Herleitung und Beweis angegeben. Für eine ausführliche Betrachtung des Prinzips sei z.B. auf [13, 20] verwiesen. Die folgende Erläuterung basiert auf den Ausführungen in [17, 22].

Gesucht ist eine stückweise stetig differenzierbare Steuertrajektorie $\mathbf{u}(t), t_0 \leq t \leq t_f$, die das Gütefunktional in Lagrange-Form

$$J(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} l(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt, \quad (2.10)$$

unter der Berücksichtigung der Systembeschreibung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, \quad (2.11)$$

als Gleichungsnebenbedingungen, minimiert. Ungleichungsnebenbedingungen werden hier der Einfachheit halber nicht berücksichtigt. Im ersten Schritt soll das Gütefunktional von der Lagrange-Form (2.10) durch Erweiterung des Zustandsvektors mit

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x_{n+1}(t) := \int_{t_0}^{t_f} l(t, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad (2.12)$$

in die Mayer-Form (2.3) transformiert werden, wobei die Größe n die Ordnung des Systems aus Gleichung (2.11) beschreibt. Man erhält das erweiterte Gleichungssystem

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ l(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))}, \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

und

$$J(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \phi(t_f) := x_{n+1}(t_f) \quad (2.14)$$

kann als neues Gütefunktional definiert werden. Die Hamiltonfunktion ändert sich dementsprechend zu

$$H(\tilde{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^*(t), t) = \left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) \right)^T \tilde{\mathbf{f}}(t, \tilde{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \quad \text{mit} \quad \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t)^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}(t) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Für die Berechnung einer optimalen Lösung $\mathbf{u}^*(t)$ können jetzt folgende Bedingungen formuliert werden:

- Die optimale Stellgrößenfolge $\mathbf{u}^*(t)$ minimiert die Hamiltonfunktion des durch Gleichung (2.12) erweiterten Optimierungsproblems, sodass für $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ mit $t_0 \leq t \leq t_f$ gilt:

$$H(\tilde{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^*(t), t) \leq H(\tilde{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}(t), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^*(t), t). \quad (2.16)$$

- Weiters gelten die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^* = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\lambda}}} H \right)^T (t, \tilde{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^*(t)), \quad \tilde{\mathbf{x}}^*(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 \quad (2.17)$$

sowie die sogenannten Kozustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^*} = - \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} H \right)^T (t, \tilde{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^*(t)), \quad \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^*(t_f) = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

- Für $t_0 \leq t \leq t_f$ gelten die Nebenbedingungen

$$H(\tilde{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^*(t)) = \text{konst.} \geq 0 \quad (2.19)$$

und

$$\lambda_{n+1}^*(t) = \text{konst.} \geq 0. \quad (2.20)$$

- Bei freier Endzeit t_f gilt außerdem die Transversalitätsbedingung

$$H(\tilde{\mathbf{x}}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^*(t_f)) = 0. \quad (2.21)$$

Aus den Bedingungen (2.16) bis (2.21) entsteht ein Zwei-Punkt-Randwert Problem mit den Anfangsbedingungen $\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = [\mathbf{x}_0 \ 0]^T$ sowie den Endbedingungen $\tilde{\mathbf{x}}^*(t_f^*) = \tilde{\mathbf{x}}_f$ und der Bedingung $\lambda_{n+1}^*(t_f^*) \geq 0$.

Die Auswertung der hier angeführten Bedingungen kann nur für einfache Aufgabenstellungen analytisch gelöst werden. Kompliziertere Gleichungssysteme müssen numerisch gelöst werden. Das Minimumprinzip von Pontryagin ermöglicht und erfordert einen sehr detaillierten Einblick in das jeweilige Optimierungsproblem. Außerdem wird das Problem im unendlich dimensionalen Funktionenraum gelöst, womit keine Ungenauigkeiten durch eine Diskretisierung entstehen. Allerdings wirken sich oft bereits geringfügige Änderungen in der Aufgabenstellung sehr stark auf die gesamte Berechnung des Problems aus. Da hier die Berechnung jedoch zum Großteil auf einer analytischen Vorgehensweise basiert, ist eine Adaption der Lösung an eine geänderte Aufgabenstellung oft nicht ohne aufwändige Neuberechnungen möglich.

Direkte Methoden

Bei direkten Methoden zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen wird das unendlich dimensionale Optimierungsproblem (2.2) zunächst diskretisiert und durch ein nichtlineares mathematisches Programm (Nonlinear Mathematical Program, NLP) angenähert. Für die Lösung dieses NLPs existieren eine Reihe verschiedener Algorithmen, welche aber nicht Teil dieser Arbeit sein sollen.

Als intuitives Beispiel einer direkten Methode wird hier die rekursive Diskretisierung vorgestellt. Um für ein auf dem Intervall $\mathcal{T} = [t_0, t_f]$ definiertes System der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.22)$$

mit $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}$ und $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ eine optimale Steuerung $\mathbf{u}^*(t)$ zu erhalten, müssen die Stellgrößen $\mathbf{u}(t)$ zunächst parametrisiert werden. Eine einfache Möglichkeit dieser Parametrierung ist das Ersetzen von $\mathbf{u}(t)$ durch eine stückweise konstante Stellgrößenfolge mit

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N \times m} \quad (2.23)$$

und

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{q}_k =: \mathbf{u}_k \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \subset \mathcal{T}, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (2.24)$$

Die Anzahl der Diskretisierungsintervalle ist durch $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Abbildung 2.1 zeigt den Verlauf der Zustandstrajektorie eines Systems 1. Ordnung sowie den zugehörigen, parametrisierten Stellgrößenverlauf bei äquidistantem Diskretisierungshorizont.

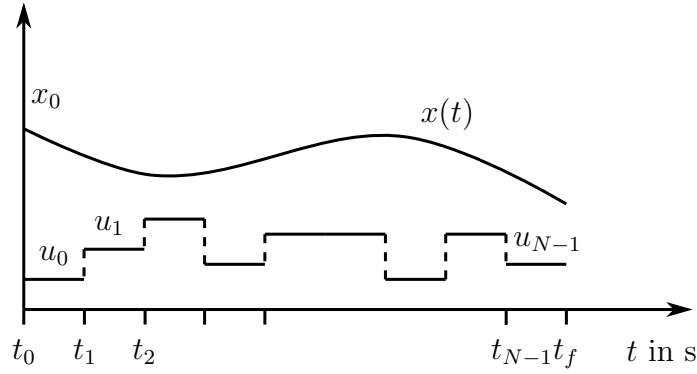


Abbildung 2.1: Verlauf einer Zustandstrajektorie bei parametrisierten Stellgrößenverlauf.

Es ist zu erwähnen, dass für die Parametrierung der Stellgrößen nicht zwangsläufig stückweise konstante Funktionen verwendet werden müssen. Eine solche Wahl vereinfacht jedoch das Verständnis der Vorgehensweise und ist vor allem bei ausreichend kleinen Abtastzeiten $T = t_{i+1} - t_i$ für viele Anwendungen ausreichend.

Ziel des NLPs ist es nun, den parametrisierten Stellgrößenverlauf so zu ermitteln, dass ein Gütefunktional unter Einhaltung von Nebenbedingungen minimiert wird. Ausgehend von der in Gleichung (2.24) eingeführten Diskretisierung der Stellgrößen kann jetzt das diskretisierte Optimalsteuerungsproblem als NLP der Form

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}} \quad & J(\mathbf{z}) = \phi(N, \mathbf{x}_N^u) + \sum_{k=0}^{N-1} L(t_k, \mathbf{x}_k^u, \mathbf{u}_k) \\ \text{mit} \quad & \mathbf{z} := (\mathbf{u}_0^T \quad \mathbf{u}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_{N-1}^T) \\ \text{unter} \quad & 0 = G_{ik}(t_k, \mathbf{x}_k^u, \mathbf{u}_k), \quad \forall 0 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq i \leq I \\ & 0 \geq H_{jk}(t_k, \mathbf{x}_k^u, \mathbf{u}_k), \quad \forall 0 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq J \end{aligned} \quad (2.25)$$

mit $I \cdot N$ Gleichungs- und $J \cdot N$ Ungleichungsnebenbedingungen für alle Diskretisierungszeitpunkte k angeschrieben werden. Die diskretisierten Zustandsgrößen \mathbf{x}_k^u werden durch iteratives Lösen (Vorwärtsintegration) des Anfangswertproblems (2.22) mit den parametrisierten Stellgrößen \mathbf{u}_k ermittelt. Abbildung 2.2 soll diesen Zusammenhang noch einmal veranschaulichen.

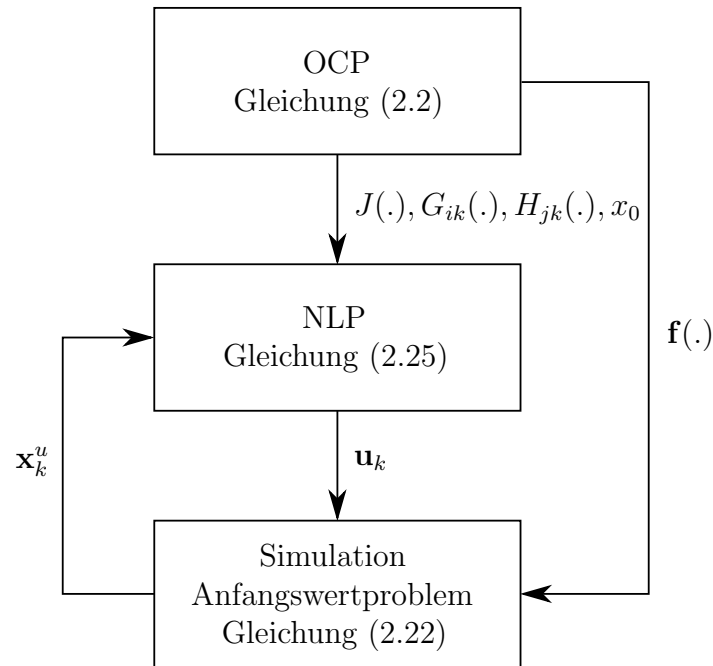


Abbildung 2.2: Berechnungsabfolge bei der Lösung eines Optimalsteuerungsproblems mit rekursiver Diskretisierung.

Der Vorteil der rekursiven Diskretisierung liegt darin, dass das NLP mit $N \cdot m$ Optimierungsvariablen \mathbf{z} (siehe Gleichung (2.23)) im Vergleich zu anderen Diskretisierungsmethoden relativ schlank bleibt.

In vielen Fällen ist die Wahl von guten Startwerten \mathbf{z}_0 entscheidend für die Konvergenz der Lösungsverfahren von NLPs. Bei der rekursiven Diskretisierung ist die Festlegung der Startwerte für die Zustandsvariablen über den Optimierungshorizont jedoch nicht ohne Weiteres möglich, da diese nicht explizit als Optimierungsvariablen auftreten. Durch eine geschickte Wahl der Startwerte \mathbf{u}_k muss sichergestellt werden, dass das System bei der ersten Simulation über den gesamten Optimierungshorizont in seinen Grenzen bleibt. Im Speziellen bei Systemen mit großer Empfindlichkeit der Zustandsvariablen auf Stellgrößenänderungen kann dies zu einer schwierigen Aufgabe werden. Lösungsalgorithmen für NLPs bieten zwar die Möglichkeit zur automatischen Korrektur der Startwerte bei Nichteinhaltung von Beschränkungen, insbesondere bei stark nichtlinearen Systemgleichungen ist eine solche Korrektur jedoch oft nicht erfolgreich. Die Diskretisierungsmethode in Abschnitt 2.1.3 soll hier Abhilfe schaffen.

2.1.3 Direktes Mehrfachschießverfahren

Das direkte Mehrfachschießverfahren¹ ist eine Methode zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen und wurde erstmals in [3] veröffentlicht. Ziel ist es, den gesamten Prädiktionshorizont mit sogenannten *Shooting-Nodes* in r_s Intervalle zu unterteilen, wodurch man r_s Anfangswertprobleme erhält. Im Vergleich zur rekursiven Diskretisierung

¹engl.: direct multiple shooting

(siehe Abschnitt 2.1.2) hat das den Vorteil, dass die Integration nur über entsprechend kürzere Intervalle durchgeführt werden muss, was vorallem die Wahl der Anfangswerte erheblich vereinfacht.

Um diese Methode umzusetzen werden zunächst entlang der zukünftigen Zustandstrajektorie $\mathbf{x}(t) \in [t_0, t_f]$ zu den Zeiten

$$t_1^s < t_2^s < \dots < t_{r_s-1}^s < t_{r_s}^s = t_f \quad (2.26)$$

die *Shooting-Nodes*

$$\mathbf{s} := (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{r_s}) \in \mathbb{R}^{r_s \times n} \quad (2.27)$$

eingeführt. Diese r_s Vektoren haben gemäß obiger Definition die selbe Dimension wie der Zustandsvektor \mathbf{x}_k . Die Zeiten der Shooting-Nodes $\{t_j^s\}$ müssen nicht zwingend mit den Zeitpunkten für die Parametrierung der Stellgrößen $\{t_i\}$ (Gleichung (2.24)) übereinstimmen. Der Spezialfall

$$\{t_i\} \equiv \{t_j^s\} \quad (2.28)$$

wird auch vollständige Diskretisierung genannt.

In Abbildung 2.3 wird diese Vorgehensweise anhand eines einfachen Beispiels noch einmal veranschaulicht.

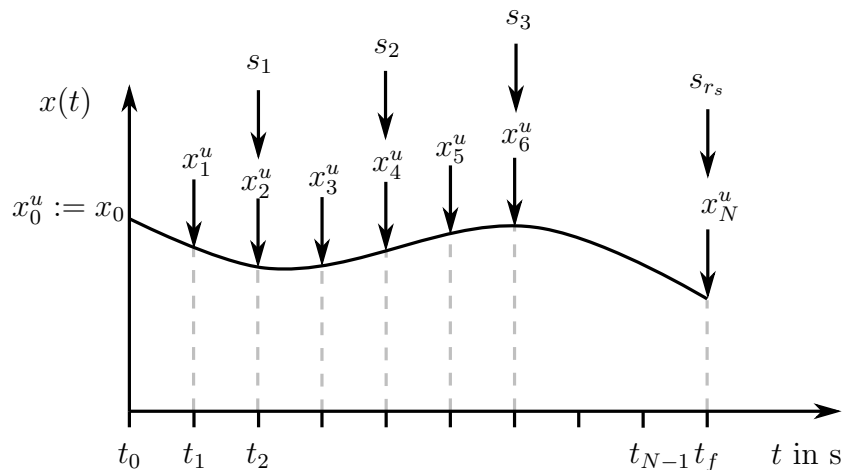


Abbildung 2.3: Demonstration einer möglichen Wahl der Shooting-Nodes.

Um die folgenden Formeln möglichst einfach zu halten, wird von nun an nur noch der Spezialfall der vollständigen Diskretisierung betrachtet. Die Ergebnisse können jedoch ohne Weiteres auf den allgemeinen Fall mit unterschiedlichen Zeitdiskretisierungen adaptiert werden.

Die Stellgrößen werden beim Mehrfachschießverfahren, wie auch bereits bei der rekursiven Diskretisierung gemäß Gleichung (2.24) parametrisiert. Zusätzlich wird bei diesem Verfahren auch eine Diskretisierung der Zustandstrajektorien durch die Einführung von sogenannten Shooting-Nodes durchgeführt. Die diskretisierte Dynamik der Zustände kann dann mit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t_k) &= \mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k^u, \mathbf{u}_k), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}(t_k) &= \mathbf{s}_k \end{aligned} \quad (2.29)$$

angeschrieben werden und die somit eingeführten Shooting-Nodes fügt man als zusätzliche Variablen dem Optimierungsvektor

$$\mathbf{z} := [\mathbf{s}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{s}_N^T \quad \mathbf{u}_0^T \quad \mathbf{u}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_{N-1}^T]. \quad (2.30)$$

hinzu. Für den hier vorliegenden Fall der vollständigen Diskretisierung gilt also $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{Nr_s m}$ mit $r_s = N$. Man stelle sich nun vor, der Optimierungsvektor \mathbf{z} werde gemäß Abbildung 2.4 initialisiert, wobei \mathbf{x}_0 der zum aktuellen Zeitpunkt gemessene Zustandsvektor des Systems ist.

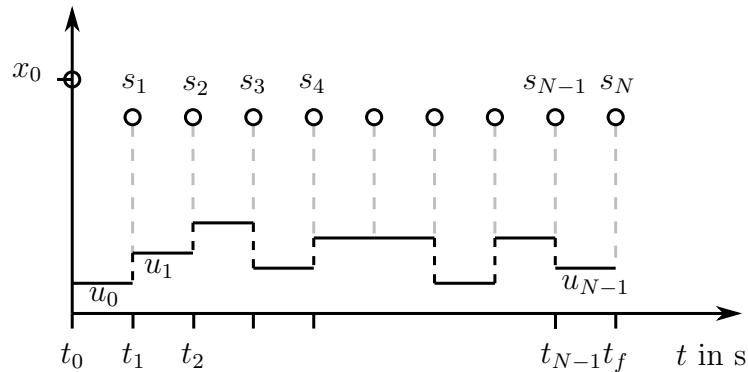


Abbildung 2.4: Mögliche Wahl der Startwerte der Optimierung.

Neben den diskretisierten Nebenbedingungen des Optimalsteuerungsproblems (Gleichung (2.2)) werden beim direkten Mehrschießverfahren zusätzliche Gleichheitsnebenbedingungen der Form

$$\mathbf{0} = \mathbf{x}_k(t_{k+1}; t_k, \mathbf{s}_k, q_k) - \mathbf{s}_{k+1}, \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (2.31)$$

für die Gewährleistung der Kontinuität der Zustandstrajektorien eingeführt. Diese Nebenbedingung bedeutet in Worten beschrieben: Der Zustand \mathbf{x}_k eines Systems zum Zeitpunkt t_k wird als Startwert einer Integration bis zum Zeitpunkt t_{k+1} verwendet. Das Ergebnis dieser Integration muss mit dem Shooting-Node zum Zeitpunkt t_{k+1} übereinstimmen (siehe Gleichung (2.31)). Ist dies nicht der Fall, so ändert der Optimierungsalgorithmus den Wert des Shooting-Nodes in jene Richtung, wo die Bedingung besser erfüllt wird. Dieser Vorgang wird im Zuge der Optimierung iterativ durchgeführt.

Das Diagramm in Abbildung 2.5 zeigt den Verlauf einer Zustandstrajektorie $x(t)$ bei erfüllten Gleichungsnebenbedingungen (2.31).

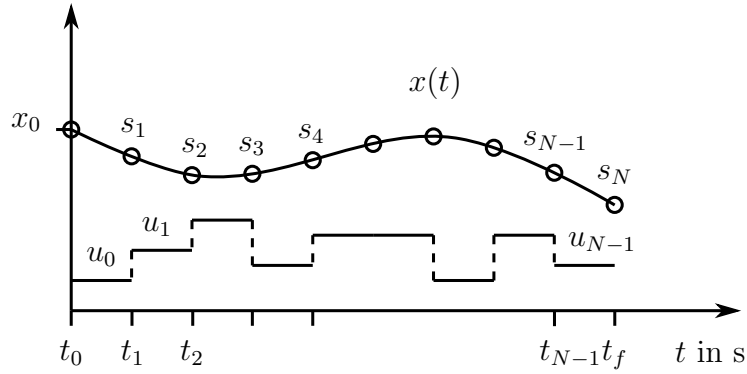


Abbildung 2.5: Demonstration der Kontinuitätsnebenbedingung vom direkten Mehrschießverfahren bei erfüllten Gleichungsnebenbedingungen.

Bei der rekursiven Diskretisierung musste während des Optimierungsalgorithmus ein Anfangswertproblem über den gesamten Optimierungshorizont \mathcal{T} gelöst werden. Insbesondere bei hohen Abtastraten oder vielen Zustandsvariablen kann das zu sehr langen Integrationszeiten führen. Beim Mehrschießverfahren wird der gesamte Prädiktionshorizont durch die Shooting-Nodes in viele kleinere Anfangswertprobleme unterteilt. Diese können durch moderne Mehrkernprozessoren sehr effizient parallel berechnet werden.

Mit den soeben eingeführten Shooting-Nodes und den zusätzlichen Nebenbedingungen kann das NLP mit dem Mehrschießverfahren als Diskretisierungsmethode mit

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}} \quad & J_u(\mathbf{z}) = \phi(N, \mathbf{s}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k) & (2.32) \\ \text{mit } \mathbf{z} := & [\mathbf{s}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{s}_N^T \quad \mathbf{u}_0^T \quad \mathbf{u}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_{N-1}^T] \\ \text{unter } & \mathbf{0} = \mathbf{x}_k(t_{k+1}; t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k) - \mathbf{s}_{k+1}, & \forall 0 \leq k \leq N-1 \\ & 0 = G_{ik}(t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k), & \forall 0 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq i \leq I \\ & 0 \geq H_{jk}(t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k), & \forall 0 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq J \end{aligned}$$

angeschrieben werden. Dieses NLP enthält neben den $I \cdot N$ Gleichungs- und $J \cdot N$ Ungleichungsnebenbedingungen noch $n \cdot N$ Gleichungsnebenbedingungen durch die diskretisierten Systemgleichungen sowie $n \cdot N$ zusätzliche Optimierungsvariablen. Die Vorteile bei der Wahl der Startwerte sowie der Parallelisierbarkeit des NLP erkaufte man sich also durch ein entsprechend umfangreicheres Optimierungsproblem. Da heute jedoch aufgrund der hohen Rechenleistung auch große Optimierungsprobleme relativ schnell gelöst werden können, stellt dies kein großes Problem dar.

2.1.4 Numerische Methoden zur Lösung der Anfangswertprobleme

Unabhängig von der verwendeten Diskretisierungsmethode sind für viele nichtlineare dynamische Systembeschreibungen, numerische Methoden zur Lösung der Anfangswertprobleme während der Optimierung notwendig. Eine analytische Lösung der Differentialgleichungen ist nicht immer möglich. Angelehnt an die Systembeschreibung in Gleichung (2.22) sollen

in diesem Abschnitt Möglichkeiten zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.33)$$

angeführt werden. Gleichungssysteme dieser Art werden als Anfangswertprobleme 1. Ordnung bezeichnet. Zur numerischen Berechnung einer Approximation von $\mathbf{x}(t)$ existieren eine Vielzahl unterschiedlicher Methoden. All diese Methoden liefern jeweils zu den Zeitpunkten $\{t_k\}$ mit $0 \leq k \leq N$ eine Näherung $\tilde{\mathbf{x}}_k$ für $\mathbf{x}(t)$. Für die Zeiten $\{t_k\}$ soll

$$t_0 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_f \quad (2.34)$$

gelten.

Im folgenden Beispiel soll die Idee der numerischen Lösung von Differentialgleichungen anhand des expliziten Euler Verfahrens demonstriert werden.

Beispiel 2.1 (explizites Euler Verfahren)

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \quad (2.35)$$

mit dem Startwert $y(t_0) = y_0$. Die Steigung von $y(t_0)$ ist durch die Differentialgleichung (2.35) gegeben. Nach der Linearisierung von $y(t)$ durch Entwicklung einer Taylorreihe um den Zeitpunkt t_0 kann als Näherung für den Wert zum Zeitpunkt t_1

$$y_1 := y(t_1) \approx y_0 + (t_1 - t_0)\dot{y}(t)|_{t=t_0} = y_0 + (t_1 - t_0)f(t_0, y_0) \quad (2.36)$$

geschrieben werden. Erweitert man diesen Ansatz auf die Zeitpunkte $\{t_k\}$ mit $0 \leq k \leq N-1$, so kann allgemein

$$y_{k+1} := y_k + h_k f(t_k, y_k) \quad \text{mit} \quad h_k = t_{k+1} - t_k \quad (2.37)$$

geschrieben werden.

In Anlehnung an das Ergebnis aus Beispiel 2.1 (Gleichung (2.37)) kann als Grundlage für Einschrittverfahren² das Iterationsschema

$$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + h_k \Phi(t_k, h_k, \mathbf{x}_k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (2.38)$$

mit der Inkrementfunktion Φ sowie den Diskretisierungsintervallen $h_k = t_{k+1} - t_k$ angeschrieben werden. Als Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $s \in \mathbb{N}$ werden Einschrittverfahren mit einer Inkrementfunktion der Form

$$\Phi(t, h, \mathbf{x}) := \sum_{i=1}^s \mathbf{b}_i \mathbf{k}_i, \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}_i := \mathbf{f} \left(t + h \alpha_i, \mathbf{x} + h \sum_{j=1}^s \mathbf{B}_{ij} \mathbf{k}_j \right) \quad (2.39)$$

²Einschrittverfahren verwenden im Gegensatz zu Mehrschrittverfahren keine Werte von vergangenen Zeitpunkten.

mit den für die jeweilige Methode charakteristischen Koeffizienten $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^s$ und $\mathbf{B}_{ij} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ bezeichnet. Einschrittverfahren basieren auf diesem Iterationsschema und können bei gegebenen charakteristischen Koeffizienten daraus konstruiert werden.

Ist eine Inkrementfunktion Φ nur von Werten zum aktuellen Zeitpunkt abhängig $\Phi(t_k, h_k, \mathbf{x}_k)$, so handelt es sich um ein explizites Verfahren. Bei impliziten Verfahren ist die Inkrementfunktion mit $\Phi(t_k, h_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$ gegeben.

Die charakteristischen Koeffizienten $\boldsymbol{\alpha}$, \mathbf{B} und \mathbf{b} aus Gleichung (2.39) werden in einem Butcher-Tableau mit

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{B} \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array}$$

zusammengefasst. Das explizite Euler Verfahren (Beispiel 2.1) ist ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $s = 1$ mit dem Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

Das Butcher-Tableau des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens ist mit

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

gegeben. Es handelt sich hierbei um ein Einschrittverfahren der Ordnung $s = 4$.

Von großer Bedeutung für die Genauigkeit der approximierten Lösung \mathbf{x}_k ist die Schrittweite der Zeitdiskretisierung $\{t_k\}$. Moderne numerische Lösungsalgorithmen verwenden eine adaptive Wahl von h_k um möglichst effizient eine ausreichend genaue Approximation von $\mathbf{x}(t)$ mit $t \in [t_0, t_f]$ zu berechnen. Für einen tieferen Einblick in das dieser Überlegungen zugrunde liegende umfangreiche Thema der numerischen Mathematik sei an dieser Stelle zum Beispiel auf [1, 8] verwiesen.

2.2 Nichtlineare modellprädiktive Regelung

Die Grundlage einer nichtlinearen-modellprädiktiven Regelung bildet ein Optimalsteuerungsproblem, wie es bereits im Abschnitt 2.1 diskutiert wurde. Die Lösung dieser Probleme enthält unter anderem den optimalen, zukünftigen Stellgrößenverlauf $\mathbf{u}_k^* \in \mathcal{U}$, welcher die Optimalsteuerung für den Prädiktionshorizont $\mathcal{T} = [t_0, t_f]$ darstellt. Schaltet man diesen Stellgrößenverlauf auf das zu steuernde System, so hat man nicht die Möglichkeit, auf etwaige Störungen oder Abweichungen in der mathematischen Systembeschreibung zu reagieren. Aus diesem Grund wird bei der nichtlinearen modellprädiktiven Regelung zwar exakt das selbe Optimalsteuerungsproblem gelöst, von dem berechneten, optimalen Stellgrößenverlauf \mathbf{u}_k^* wird mit

$$\mathbf{u}_S^* := \mathbf{u}_0^*, \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_S^* \in \mathcal{U} \quad (2.40)$$

das erste Element des prädizierten Stellgrößenverlaufs \mathbf{u}_0^* auf die *Regelstrecke* geschaltet. Anstatt die restlichen Optimierungsvariablen \mathbf{z}^* unwiderrufflich zu verwerfen, werden diese zwischengespeichert und bei der nächsten NMPC-Iteration als Startwerte für die Optimierung verwendet (Abschnitt 2.2.2). Diese nächste NMPC-Iteration beginnt nach einer Zeit T_{NMPC} mit der erneuten Bestimmung eines Zustandsvektors \mathbf{x}_0 aus den Messwerten ζ_i .

2.2.2 Wahl der Startwerte

Die Lösung von NLPs, wie sie in dieser Arbeit zur Berechnung von Optimalsteuerungen eingesetzt werden, erfordert unter Umständen sehr viel Rechenleistung. Diesem großen Rechenaufwand kann durch eine gute Wahl der Startwerte \mathbf{z}_0 des NLPs in Abbildung 2.6 entgegengewirkt werden. Liegen die Startwerte bereits in der Nähe eines Optimums, so sind deutlich weniger Iterationen im Optimierungsalgorithmus notwendig. Im Sinne der Übersichtlichkeit sollen die folgenden Methoden anhand der rekursiven Diskretisierung aus Abschnitt 2.1.2 mit dem Optimierungsvektor

$$\mathbf{z} := [\mathbf{u}_0^T \quad \mathbf{u}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_{N-1}^T] \quad (2.42)$$

bzw. seiner optimalen Lösung

$$\mathbf{z}^* := [\mathbf{u}_0^{*T} \quad \mathbf{u}_1^{*T} \quad \dots \quad \mathbf{u}_{N-1}^{*T}] \quad (2.43)$$

erläutert werden.

Eine intuitive Möglichkeit zur Wahl von Startwerten bieten Verschiebungs-Methoden. Wie bereits erläutert, wird bei modellprädiktiven Regelungsmethoden das erste Element \mathbf{u}_0^* eines prädizierten, optimalen Stellgrößenverlaufs auf die reale Strecke geschaltet. Anstatt die prädizierten Stellgrößen zu verwerfen, werden diese zwischengespeichert und bei der nächsten NMPC-Iteration als Startwerte

$$\mathbf{z}_0 := [\mathbf{u}_1^{*T} \quad \dots \quad \mathbf{u}_{N-1}^{*T} \quad \mathbf{u}_x^T] \quad (2.44)$$

für die Optimierung verwendet. Lediglich für den letzten Eintrag \mathbf{u}_x existieren jetzt noch keine Startwerte. Als einfachste Möglichkeit bietet sich die Wahl von

$$\mathbf{u}_x := \mathbf{u}_{N-1}^* \quad (2.45)$$

an. Dies ist jedoch nur sinnvoll, wenn sichergestellt ist, dass sich das zu regelnde System am Ende des Prädiktionshorizonts bereits in einer stationären Ruhelage befindet. Ansonsten kann der Fall eintreten, dass sich das prädizierte System durch diese Wahl bereits zu Beginn der Optimierung in einem undefinierten Zustand befindet und daher kein brauchbares Optimum gefunden wird.

Eine weitere Möglichkeit zur Wahl der Startwerte bzw. zur Wahl von \mathbf{u}_x in Gleichung (2.44) ist die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems (Gleichung (2.25)) mit einem Optimierungshorizont der Länge $N = 1$ und den Startwerten $\mathbf{x}_0 = x_N^{u*}$. Dadurch wird sichergestellt, dass die Beschränkungen des Systems eingehalten werden und sich das Optimierungs-

problem bei der nächsten Iteration mit den Startwerten \mathbf{z}_0 in einem definierten Zustand befindet.

2.3 Dynamische Hybridsysteme

Als dynamische Hybridsysteme werden im Rahmen dieser Arbeit Systeme bzw. mathematische Modelle bezeichnet, die es ermöglichen, kontinuierliche sowie ereignisdiskrete Vorgänge gemeinsam zu modellieren.

Der kontinuierliche Teil des Systems wird meist durch Differentialgleichungen mit wertkontinuierlichen Zustandsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ abgebildet. Im Gegensatz dazu erfolgt die Modellierung vom ereignisdiskreten Teil des Systems zum Beispiel durch eine wertdiskrete Zustandsvariable $q \in \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$. Somit können neben dynamischen Vorgängen auch diskrete Ereignisse des Systems modelliert werden. Einfache Beispiele für solche diskreten Ereignisse können Schaltvorgänge ($q \in \{\text{Ein}, \text{Aus}\}$) oder Stoßvorgänge ($q \in \{\vec{v}_{\text{vorher}}, \vec{v}_{\text{nachher}}\}$) sein. Je nachdem in welcher Art und Weise die diskreten Ereignisse q nun den kontinuierlichen Teil des Systems beeinflussen, gibt es verschiedene Methoden zur Modellierung dieser Phänomene. Nach Lunze et al. [19] können diese in

- autonome Umschaltung,
- autonome Zustandssprünge,
- gesteuerte Umschaltung und
- gesteuerte Zustandssprünge

unterteilt werden. In den folgenden Abschnitten sollen diese Phänomene sowie deren mathematische Beschreibung näher erläutert werden.

2.3.1 Autonome Umschaltung

Für die Beschreibung von autonomen Umschaltungen in einem hybriden System wird zunächst ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.46)$$

mit der Zeit $t \in [t_0, \infty)$, den Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ sowie dem Vektorfeld $\mathbf{f} : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert. Aufgrund der regelungstechnischen Ausrichtung dieser Arbeit ist es naheliegend, in weiterer Folge den Vektor \mathbf{x} als Zustandsvektor und den Vektor \mathbf{u} als Stellgrößenvektor zu bezeichnen. Bei einer autonomen Umschaltung ändert sich nun das Vektorfeld \mathbf{f} , in Abhängigkeit des Zustandsvektors \mathbf{x} sprungförmig. Aus mathematischer Sicht bedeutet das eine sprungförmige Änderung von \mathbf{f} sobald der Zustandsvektor \mathbf{x} in eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ des Zustandsraumes eintritt.

Das folgende Beispiel aus [19] soll das Prinzip der autonomen Umschaltung anhand eines hybriden Tankmodells veranschaulichen.

Beispiel 2.2 (Hybrides Tankmodell)

Gegeben sei ein Tank (Abbildung 2.7) mit einem konstanten Zufluss \dot{V}_{zu} sowie einem

Abfluss am Boden des Tanks und einem in der Höhe h_G . Die Volumenströme dieser Abflüsse $\dot{V}_{ab,1}(h(t))$ und $\dot{V}_{ab,2}(h(t))$ sind von der Füllhöhe $h(t)$ abhängig.

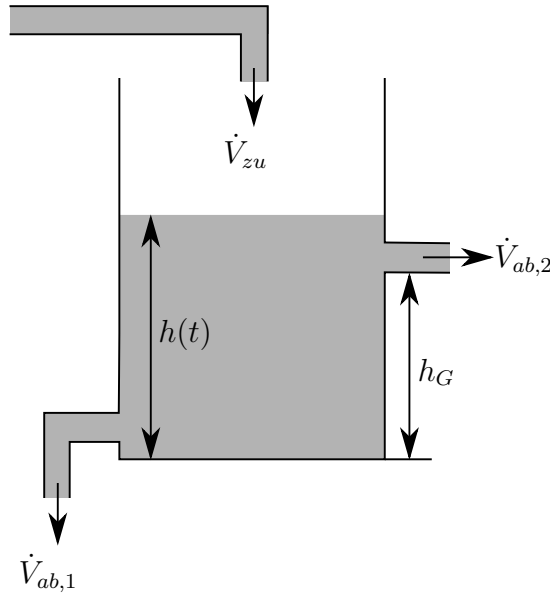


Abbildung 2.7: Prinzip eines Tanksystems mit einem Zufluss und zwei Abflüssen in unterschiedlichen Höhen.

Die Differentialgleichungen für dieses System können dann mit dem Ausflussgesetz von Torricelli hergeleitet werden. Für $h(t) < h_G$ gilt somit

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}(\dot{V}_{zu} - \dot{V}_{ab,1}) = \frac{1}{A} \left(\dot{V}_{zu} - A_R \sqrt{2gh(t)} \right) =: f_{q1}(h(t)), \quad (2.47)$$

mit der aktuellen Füllhöhe $h(t)$, der horizontalen Querschnittsfläche A , dem Rohrquerschnitt A_R und der Erdbeschleunigung g . Bei einer Füllhöhe von $h(t) \geq h_G$ ändert sich diese Gleichung zu

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \frac{1}{A}(\dot{V}_{zu} - \dot{V}_{ab,1} - \dot{V}_{ab,2}) \\ &= \frac{1}{A} \left(\dot{V}_{zu} - A_R \sqrt{2gh(t)} - A_R \sqrt{2g(h(t) - h_G)} \right) =: f_{q2}(h(t)). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Das Vektorfeld \mathbf{f} aus Gleichung (2.46) ändert also immer genau dann seinen diskreten Zustand $q \in \{q_1, q_2\}$, wenn der kontinuierliche Zustand $h(t)$ die Grenze

$$\mathcal{S} = \{h \in \mathbb{R} | h = h_G\} \quad (2.49)$$

passiert. Das hybride Tankmodell kann nun mit

$$\dot{h}(t) = \begin{cases} f_{q1}(h(t)), & \forall h(t) < h_G \\ f_{q2}(h(t)), & \forall h(t) \geq h_G \end{cases} \quad (2.50)$$

angeschrieben werden.

Ein dynamisches Hybridsystem mit autonomen Umschaltungen kann demzufolge mit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{q(t)}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad t \geq 0 \quad (2.51)$$

angeschrieben werden. Die Variable $q(t)$ kennzeichnet das Umschalten des Vektorfeldes \mathbf{f} in Abhängigkeit vom ereignisdiskreten Zustand des Systems.

2.3.2 Autonome Zustandssprünge

Bei autonomen Zustandssprüngen bleibt das Vektorfeld \mathbf{f} aus Gleichung (2.46) konstant. Allerdings kommt es beim Eintreten der Zustandstrajektorie $\mathbf{x}(t)$ in die Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ zu einer sprunghaftigen Änderung der Zustände.

Für eine mathematische Definition dieses Vorgangs wird mit t_S zunächst der Zeitpunkt des Zustandssprunges definiert. An der Sprungstelle kann dann der links- und rechtsseitige Grenzwert mit

$$\mathbf{x}(t_S^-) = \lim_{t \rightarrow t_S^-} \mathbf{x}(t) \quad (2.52)$$

und

$$\mathbf{x}(t_S^+) = \lim_{t \rightarrow t_S^+} \mathbf{x}(t) \quad (2.53)$$

berechnet werden. Abbildung 2.8 soll diesen Sprung der Zustände noch einmal veranschaulichen.

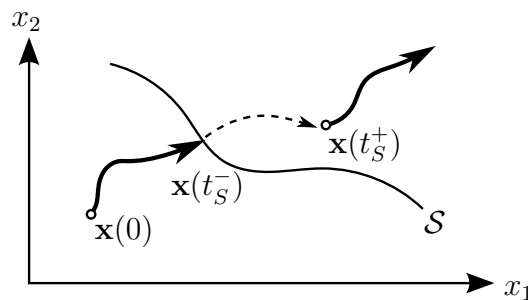


Abbildung 2.8: Autonome Zustandssprung in einer Zustandsebene ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$).

Für eine geschlossene Beschreibung von autonomen Zustandssprüngen wird der Sprung jetzt durch eine Funktion $\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ beschrieben. Es gilt also

$$\mathbf{x}(t_S^+) = \mathbf{r}(\mathbf{x}(t_S^-)) \quad (2.54)$$

für die Sprungstelle und für das gesamte System kann somit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), & \forall \mathbf{x}(t) \notin \mathcal{S} \\ \mathbf{x}(t_S^+) &= \mathbf{r}(\mathbf{x}(t_S^-)), & \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (2.55)$$

geschrieben werden.

2.3.3 Gesteuerte Umschaltung

Bei dynamischen Hybridsystemen mit gesteuerter Umschaltung besitzt das System von Differentialgleichungen in (2.46) zusätzlich zu $\mathbf{u}(t)$ eine wertdiskrete Eingangsgröße $v(t) \in \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$. Das Vektorfeld \mathbf{f} ändert sich hier, in Abhängigkeit dieser Größe, sprunghaft. In anderen Worten: Der diskrete Zustand q des Systems, welcher sich bei der autonomen Umschaltung (Abschnitt 2.3.1) in Abhängigkeit des Zustandsvektors \mathbf{x} ändert, wird hier direkt durch eine zusätzliche Eingangsgröße beeinflusst.

Mathematisch kann hierfür also

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}_{q(\cdot)}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), & t \geq 0 \\ q &= q(v(t)) \end{aligned} \quad (2.56)$$

geschrieben werden.

Intuitive Beispiele für hybride Systeme mit gesteuerter Umschaltung sind jene Systeme, bei denen die Dynamik des Systems durch externe Schalter sprunghaft geändert wird. Zur Veranschaulichung folgt nun ein Beispiel aus [19].

Beispiel 2.3 (Schalter in einem elektrischen Netzwerk)

Gegeben sei ein elektrisches Netzwerk (Abbildung 2.9), bestehend aus einer Spannungsquelle U_0 und einer Serienschaltung aus zwei Widerständen R_L und R_C , sowie einer Spule L und einem Kondensator C . Der Kondensator C und der Widerstand R_C können mit dem Schalter S kurzgeschlossen werden.

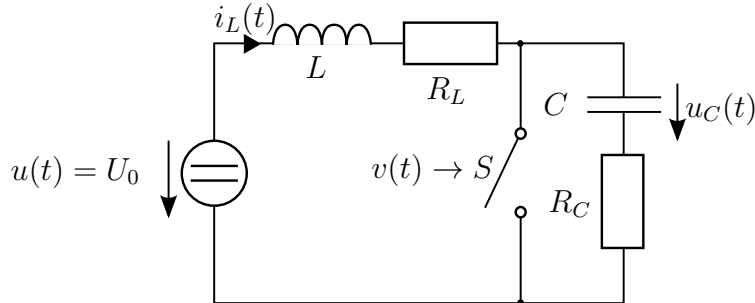


Abbildung 2.9: Elektrische Schaltung mit einem Schalter S ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$).

Die aktuelle Schalterstellung wird mit der diskreten Zustandsvariable

$$q \in \{0, 1\} \quad (2.57)$$

modelliert. Nimmt q den Zustand 0 an, so ist der Schalter offen. Dementsprechend ist bei geschlossenem Schalter q gleich 1. Die diskrete Eingangsgröße $v(t)$ beeinflusst die Schalterstellung und somit den diskreten Zustand des Systems.

Für die Entwicklung eines mathematischen Modells des Systems in Abbildung 2.9 wird zunächst ein Zustandsvektor mit

$$\mathbf{x}(t) := [i_L(t) \quad u_C(t)]^T \quad (2.58)$$

definiert. In Abhängigkeit der Schalterstellung können jetzt zwei Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung definiert werden. Bei offenem Schalter ($q = 0$) lautet die Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_L+R_C}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}(0)} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{B}(0)} U_0, \quad (2.59)$$

während das System bei geschlossenem Schalter ($q = 1$) mit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_C C} \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}(1)} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{B}(1)} U_0 \quad (2.60)$$

beschrieben werden kann. In kompakter Schreibweise kann für das hybride mathematische Modell schlussendlich

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(q)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(q) \quad (2.61)$$

geschrieben werden.

2.3.4 Gesteuerte Zustandssprünge

Wie auch bei autonomen Zustandssprüngen (Abschnitt 2.3.2), ändert sich auch bei gesteuerten Zustandssprüngen der Zustandsvektor \mathbf{x} in Gleichung (2.46) sprunghaft. Diese Änderung tritt dann auf, wenn der Zustandsvektor in die Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ des Zustandsraumes eintritt. Im Unterschied zu autonomen Zustandssprüngen ändert sich hier das „Sprunggebiet“ \mathcal{S} in Abhängigkeit einer wertdiskreten Eingangsgröße $v(t)$. In Anlehnung an die mathematische Beschreibung autonomer Zustandssprünge in Gleichung (2.55) ergibt sich das Modell für gesteuerte Zustandssprünge demnach zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), & \forall \mathbf{x}(t) \notin \mathcal{S}_{v(t)} \\ \mathbf{x}(t_S^+) &= \mathbf{r}_{v(t)}(\mathbf{x}(t_S^-)), & \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}_{v(t)}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden zunächst die Grundlagen und Möglichkeiten zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen diskutiert. Alle Methoden haben gemeinsam, dass mittels mathematischer Modelle eines Systems, die zukünftigen Verläufe der Systemzustände sowie der Stellgrößen in Form eines Optimierungsproblems berechnet werden. Diese Verläufe werden dabei so gewählt, dass ein vorgegebenes Gütefunktional minimiert wird. Die resultierende optimale Stellgrößenfolge wird Optimalsteuerung genannt. Durch eine wiederholte Berechnung von Optimalsteuerungen gelangt man von einer reinen Steuerung, ohne Möglichkeit zum Eingriff bei Störungen etc., zu einer nichtlinearen modellprädiktiven Regelung.

Unabhängig von der Betrachtung der Optimalsteuerung wurden dann im letzten Teil dieses Kapitels die Grundlagen zu dynamischen Hybridsystemen erarbeitet. Im Kapitel 3 folgt die Theorie zum Entwurf von Optimalsteuerungen für diese Klasse von Systemen.

Kapitel 3

Gemischt-ganzzahliges Optimalsteuerungsproblem

Das Ziel dieser Arbeit ist die modellprädiktive Regelung eines nichtlinearen Hybridsystems. Die Erarbeitung der Grundlagen in Kapitel 2 basiert auf einem kontinuierlichen Optimalsteuerungsproblem (Definition 2.1). Bei dieser Problemklasse ändert sich das Vektorfeld \mathbf{f} über den gesamten Definitionsbereich $\mathcal{T} \in [t_0, t_f] \subset \mathbb{R}_+$ nicht und es wurde angenommen, dass die Stellgröße $\mathbf{u} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^m$ des Systems eine stetige Funktion ist und innerhalb seiner Beschränkungen alle Werte annehmen kann. Wie sich bei der Modellbildung in Kapitel 4 zeigen wird, besteht die Notwendigkeit eine Optimalsteuerung für ein System mit einer gemischt-ganzzahligen Eingangsgröße zu berechnen. Um die Anforderungen dieser Aufgabenstellung zu erfüllen, wird das kontinuierliche Optimalsteuerungsproblem aus Kapitel 2.1 jetzt auf ein gemischt-ganzzahliges Optimalsteuerungsproblem (mixed-integer optimal control problem, MIOCP) erweitert. Es soll also ein Optimalsteuerungsproblem für verschiedene Klassen von dynamischen Hybridsystemen (siehe Kapitel 2.3) entworfen werden.

In Abschnitt 3.1 wird zunächst das MIOCP allgemein formuliert. Abschnitt 3.2 gibt anschließend einen kurzen Überblick über die Möglichkeiten zur Lösung derartiger Probleme. Mit der äußeren Konvexifizierung und Relaxierung wird in Abschnitt 3.3 eine ausgewählte Methode näher beschrieben. Diese Methode hat den großen Vorteil, dass im Gegensatz zu anderen Verfahren nur ein Optimierungsproblem gelöst werden muss. Um ganzzahlige Steuertrajektorien (z.B.: Motor AN, Motor AUS) zu berücksichtigen, wird die Einschränkung der Eingangsgröße auf wertdiskrete Größen aufgeweitet (relaxiert). Nach erfolgreicher Optimierung werden dann die relaxierten Größen zum Beispiel durch Rundungsverfahren (Abschnitt 3.4) wieder diskretisiert. Bei vielen Anwendungen ist eine große Anzahl an Schaltvorgängen in den diskreten Größen unerwünscht. Zur Minimierung der Anzahl dieser Umschaltungen wird im Abschnitt 3.5 eine effiziente Strategie vorgestellt. Abschließend werden in Abschnitt 3.6 die Erkenntnisse und Ergebnisse dieses Kapitels zusammengefasst.

3.1 Formulierung des Problems

Um das kontinuierliche OCP auf ein MIOCP zu erweitern, wird zunächst ein System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}_{q(\cdot)}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), & \forall t \in \mathcal{T} \\ q &= q(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

als Kombination eines Hybridsystems mit autonomer Umschaltung (Abschnitt 2.3.1) und gesteuerter Umschaltung (Abschnitt 2.3.3) definiert. Neben der kontinuierlichen Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ hat dieses Gleichungssystem mit $\mathbf{v} : \mathcal{T} \rightarrow \Omega$ und $\Omega := \{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{n^\Omega}\} \subset \mathbb{R}^{n^\omega}$ eine weitere, wertdiskrete Eingangsgröße. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit soll für eine einfachere Darstellung der folgenden Ausführungen die wertdiskrete Eingangsgröße auf $\mathbf{v} : \mathcal{T} \rightarrow \{0, 1\}^{n^v}$ beschränkt werden. Die diskrete Variable $q : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, n^q\}$ zeigt den Zustand (Modus) des Systems an.

Für ein einfacheres Verständnis der Zusammenhänge wird jetzt zunächst das MIOCP für ein bimodales System ($n^q = 2$) aufgestellt. Hierfür wurde ein Beispiel aus [21] auf Hybridsysteme mit gemischter (autonomer und gesteuerter) Umschaltung abgewandelt. Es ergibt sich somit das Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)} & J(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \text{unter} & \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = q\mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + (1 - q)\mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ & \quad q = \begin{cases} 1, & \varphi(\mathbf{x}(t), v(t)) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ \text{mit} & \quad \varphi(\mathbf{x}(t_S), v(t_S)) = 0, \\ & \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ & \quad \mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_{max}, \\ & \quad \mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_{max}, \\ & \quad v = \{0, 1\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

mit der wertdiskreten Variable q , der kontinuierlichen Schaltbedingung $\varphi : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und den zugehörigen Umschaltzeitpunkten $t_S \in \mathcal{T}$.

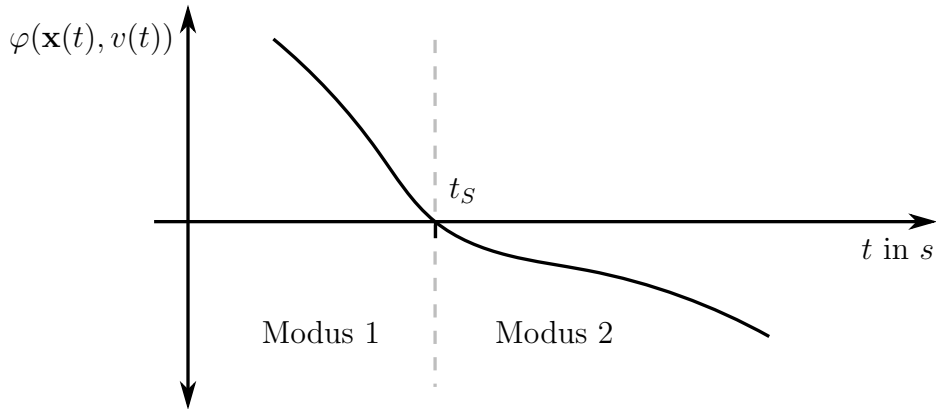


Abbildung 3.1: Beispiel einer Schaltbedingung in Abhängigkeit vom Zustandsvektor \mathbf{x} und von der wertdiskreten Stellgröße v .

Abbildung 3.1 zeigt das Beispiel einer Schaltbedingung. Ist φ größer als eine bestimmte Schaltschwelle, so befindet sich das System im Modus 1. Wird diese Schwelle zu einem Zeitpunkt t_S unterschritten, so schaltet das System in den Modus 2.

Entsprechend der in Kapitel 2 beschriebenen Möglichkeiten zum Umschalten zwischen Systemmodi können durch die Einführung zusätzlicher Nebenbedingungen der Form

$$\mathbf{x}(t_S^+) = \mathbf{r}(\mathbf{x}(t_S^-)) \quad (3.3)$$

bzw.

$$\mathbf{x}(t_S^+) = \mathbf{r}_{v(t)}(\mathbf{x}(t_S^-)) \quad (3.4)$$

auch autonome (Abschnitt 2.3.2) oder gesteuerte (Abschnitt 2.3.4) Zustandssprünge berücksichtigt werden. In Anlehnung an das OCP aus Definition 2.1 wird das MIOCP jetzt wie folgt definiert:

Definition 3.1 (Gemischt-ganzzahliges Optimalsteuerungsproblem)

Das gemischt-ganzzahlige Optimalsteuerungsproblem (MIOCP) kann als unendlich-dimensionales, beschränktes Optimierungsproblem der Form

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)} \quad & J(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) \\ \text{unter} \quad & \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ & \mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \forall t \in \mathcal{T} \\ & \mathbf{0} \geq \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \forall t \in \mathcal{T} \\ & \mathbf{v}(t) \in \Omega, \quad \forall t \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit zum Beispiel einem Gütefunktional in Bolza-Form

$$J(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) = \phi(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} l(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) dt, \quad (3.6)$$

angeschrieben werden.

Es ist zu erwähnen, dass das Beispiel aus Gleichung (3.2) ohne Informationsverlust in die allgemeinere Form aus Definition 3.1 umgewandelt werden kann.

Die Nebenbedingungen \mathbf{g} und \mathbf{h} könnten auch in Abhängigkeit der wertdiskreten Größen \mathbf{v} definiert werden. Eine solche Abhängigkeit der Nebenbedingungen ist in dieser Arbeit in weiterer Folge jedoch nicht gegeben und wird deshalb auch nicht berücksichtigt.

3.2 Lösungsmethoden

Auf eine detaillierte Betrachtung der Lösungsmethoden für Optimalsteuerungsprobleme vom Typ MIOCP in Gleichung (3.5) wird hier, aufgrund der umfangreichen Möglichkeiten, bewusst verzichtet. Einen ausführlichen Überblick liefern zum Beispiel die Arbeiten [16] oder [24].

Viele Methoden zur Lösung von MIOCPs erfordern die mehrmalige Berechnung von unterschiedlichen Optimierungsproblemen. Das kann, je nach Anzahl der Optimierungsvariablen, mitunter sehr viel Zeit in Anspruch nehmen. Gerade bei der Anwendung von MIOCPs in Regelungsalgorithmen wie der gemischt-ganzzahligen NMPC, ist eine ausreichend schnelle Berechnung der nächsten Stellgröße bei vielen Anwendungen jedoch unumgänglich. Darum wird in dieser Arbeit das MIOCP aus Gleichung (3.5) zunächst durch die Methode der *Äußeren Konvexifizierung* und anschließender *Relaxierung* (Abschnitt 3.3) durch ein kontinuierliches OCP angenähert. Auf dieses OCP kann dann das bereits bekannte direkte Mehrfachschießverfahren (Abschnitt 2.1.3) zur Diskretisierung angewendet werden. Das Ergebnis der Diskretisierung ist ein gemischt-ganzzahliges nichtlineares Programm (MINLP), welches mittels numerischer Methoden gelöst werden kann. Diese Vorgehensweise hat den entscheidenden Vorteil, dass trotz der diskreten Optimierungsvariablen immer nur ein Optimierungsproblem bzw. NLP gelöst werden muss.

Die Lösung der resultierenden MINLPs erfolgte im Rahmen dieser Arbeit in MATLAB unter Verwendung der Funktion *fmincon*, die unter anderem den „Interior-Point“ Algorithmus verwendet. Für dessen ausführliche Beschreibung sei auf [4] verwiesen.

3.3 Äußere Konvexifizierung und Relaxierung

Besitzt die Eingangsgröße eines Systems einen diskreten Anteil, so stellt die Berechnung einer Optimalsteuerung eine besondere Herausforderung dar. Um sicherstellen zu können, dass der in dieser Arbeit verwendete gradientenbasierte Lösungsalgorithmus für NLP's immer in ein globales Optimum konvergiert, muss das Optimierungsproblem konvex sei. Bei Systemen mit diskreter Stellgröße ist das jedoch offensichtlich nicht der Fall. Dieses Problem kann durch die in diesem Abschnitt beschriebene Methode der äußeren Konvexifizierung und Relaxierung umgangen werden.

Unter Konvexifizierung versteht man in Verbindung mit MIOCPs nur die Konvexifizierung der ganzzahligen Größen des Optimalsteuerungsproblems. Das OCP kann trotz dieser Konvexifizierung in allen anderen Optimierungsvariablen nichtkonvex sein.

Grundsätzlich kann zwischen innerer und äußerer Konvexifizierung unterschieden werden. Zuerst wird im Folgenden in aller Kürze die innere Konvexifizierung erläutert, dann folgt eine Beschreibung der äußeren Konvexifizierung und ihrer Anwendung in einem MIOCP. Der übersichtlicheren Darstellung wegen wird von jetzt an die Abhängigkeit der Variablen von der Zeit t nicht mehr durchgehend angeschrieben. Wendet man auf eine Funktion

$$f(x, v), \quad x \in \mathbb{R}, v \in \Omega \quad (3.7)$$

mit der kontinuierlichen Variable x und der wertdiskreten Variable v , die innere Konvexifizierung $v = \alpha \in [0, 1]$

$$f^{IK}(x, \alpha) := f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

an, so bedeutet dies eine Aufweitung der wertdiskreten Bedingung für v . Eine wertdiskrete Variable v wurde demnach durch die kontinuierliche Variable $\alpha \in [0, 1]$ ersetzt. Die Variable α kann also alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Im Gegensatz dazu geht man bei der äußeren Konvexifizierung wie folgt vor: Man führt für jeden wertdiskreten Zustand v der Menge $\Omega := \{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{n^\Omega}\} \subset \mathbb{R}^{n^w}$ eine binäre Funktion $\omega^i(v) \in \mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} := \{0, 1\}^{n^\Omega}$ ein. Durch diese zusätzliche binäre Variable kann eine Funktion bei äußerer Konvexifizierung mit

$$f^{AK}(x, v) := \omega^1(v)f(x, \mathbf{w}^1) + \omega^2(v)f(x, \mathbf{w}^2) + \dots + \omega^{n^\Omega}(v)f(x, \mathbf{w}^{n^\Omega}) \quad (3.9)$$

angeschrieben werden. Um sicherzustellen, dass jeweils nur ein $\omega^i(v)$ den Wert 1 annimmt, müssen diese eine sogenannte SOS1-Bedingung erfüllen.

Definition 3.2 (Special Ordered Set vom Typ 1 (SOS1))

Die SOS1 Bedingung ist dann erfüllt, wenn die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n^\Omega} \omega^i(v) = 1, \quad \text{mit } \omega^i(v) \in \{0, 1\} \quad (3.10)$$

erfüllt ist.

Bei der anschließenden Relaxierung werden die diskreten Vorgaben $\{0, 1\}$ aufgelockert und man erlaubt alle Größen der Menge $[0, 1]$ als Eingangsgröße. Für eine Relaxierung der wertdiskreten Größen ω^i werden diese demnach durch $a^i(v) \in [0, 1]^{n^\Omega}$ ersetzt und f^{AK} kann mit

$$f^{AK}(x, v) = \sum_{i=1}^{n^\Omega} a^i(v)f(x, \mathbf{w}^i) \quad (3.11)$$

angeschrieben werden. Es soll erwähnt werden, dass die Gleichungen (3.9) und (3.11) durch diesen Schritt nicht mehr identisch sind.

Wendet man die hier eingeführte äußere Konvexifizierung aus Gleichung (3.9) und der Nebenbedingung (3.10) auf alle Gleichungen im MIOCP aus (3.5) an, die explizit von der wertdiskreten Größe \mathbf{v} abhängen, so erhält man ein Optimierungsproblem der Form

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)} \quad & J_{konv}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \phi(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \left(\sum_{i=1}^{n^\Omega} \omega^i(v) \mathbf{l}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}^i) \right) dt \quad (3.12) \\
\text{unter} \quad & \dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n^\Omega} \omega^i(v) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}^i), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\
& \mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \forall t \in \mathcal{T} \\
& \mathbf{0} \geq \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \forall t \in \mathcal{T} \\
& \mathbf{w}^i \in \{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{n^\Omega}\} \subset \mathbb{R}^{n^w} \\
& 1 = \sum_{i=1}^{n^\Omega} \omega^i(v), \quad \omega^i(v) \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Für die Überführung des MIOCPs aus Gleichung (3.12) in ein NLP wird die in Abschnitt 2.1 beschriebene Methode des direkten Mehrschießverfahrens angewendet. Aus dem konvexifizierten OCP wird also durch Diskretisierung ein NLP der Form

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{z}} \quad & J(\mathbf{z}) = \phi(N, \mathbf{s}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{n^\Omega} \omega_k^i(v) L(t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k^i) \quad (3.13) \\
\text{mit} \quad & \mathbf{z} := [\mathbf{s}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{s}_N^T \quad \mathbf{u}_0^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_{N-1}^T \quad \boldsymbol{\omega}_0^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\omega}_{N-1}^T] \\
\text{unter} \quad & \mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n^\Omega} \omega_k^i(v) \mathbf{x}_k(t_{k+1}; t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k^i) - \mathbf{s}_{k+1}, \quad \forall 0 \leq k \leq N-1 \\
& \mathbf{s}_0 = \mathbf{x}_0 \\
& 0 = G_{ik}(t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k), \quad \forall 0 \leq k \leq N-1 \\
& 0 \geq H_{jk}(t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k), \quad \forall 0 \leq k \leq N-1 \\
& \mathbf{w}^i \in \{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{n^\Omega}\} \subset \mathbb{R}^{n^w} \\
& 1 = \sum_{i=1}^{n^\Omega} \omega_k^i(v), \quad \omega_k^i(v) \in \{0, 1\}, \quad \forall 0 \leq k \leq N-1
\end{aligned}$$

mit N Shooting-Nodes zu den Zeitpunkten $\{t_k\}$ (siehe Gleichung (2.34)). Diese Art der mathematischen Programme werden, aufgrund der Möglichkeit ganzzahlige Größen zu berücksichtigen, auch als gemischt-ganzzahlige nichtlineare Programme (Mixed-Integer

Nonlinear Program, MINLP) bezeichnet. Durch Relaxierung der wertdiskreten Größen ω^i in diesem MINLP, wird dieses jetzt in das NLP

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{z}} \quad & J_{rel}(z) = \phi(N, \mathbf{s}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{n^\Omega} \alpha_k^i(v) L(t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k^i) & (3.14) \\
\text{mit } \mathbf{z} := & [\mathbf{s}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{s}_N^T \quad \mathbf{u}_0^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_{N-1}^T \quad \boldsymbol{\alpha}_0^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\alpha}_{N-1}^T] \\
\text{unter } \mathbf{0} = & \sum_{i=1}^{n^\Omega} \alpha_k^i(v) \mathbf{x}_k(t_{k+1}; t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k^i) - \mathbf{s}_{k+1}, & \forall 0 \leq k \leq N-1 \\
& \mathbf{s}_0 = \mathbf{x}_0 \\
& 0 = G_{ik}(t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k), & \forall 0 \leq k \leq N-1 \\
& 0 \geq H_{jk}(t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k), & \forall 0 \leq k \leq N-1 \\
& \mathbf{w}^i \in \{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{n^\Omega}\} \subset \mathbb{R}^{n^w} \\
1 = \sum_{i=1}^{n^\Omega} & \alpha_k^i(v), \quad \alpha_k^i(v) \in [0, 1], & \forall 0 \leq k \leq N-1
\end{aligned}$$

überführt. In [24] wird gezeigt, dass sich die optimale Lösung eines relaxierten MIOCPs beliebig gut mit einer gemischt-ganzzahligen Lösung approximieren lässt. Mit zunehmender Genauigkeit der Approximation kann es jedoch unter Umständen zu vielen Umschaltvorgängen in den diskreten Stellgrößen kommen. Weiters kann das Gütefunktional $J_{rel}(\mathbf{s}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ bei der optimalen Lösung des relaxierten Problems in Gleichung (3.14) als untere Schranke für $J_{konv}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ betrachtet werden. Am Abstand von $J_{konv}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ zu dieser unteren Schranke kann die Qualität einer gemischt-ganzzahligen Lösung beurteilt werden.

3.4 Rundungsstrategien

Bei einer idealen Lösung eines MINLPs wie in Gleichung (3.14) nehmen die relaxierten Optimierungsvariablen im Optimum \mathbf{z}^* ganzzahlige Werte der Form $\boldsymbol{\alpha}_k^* \in \{0, 1\}^{n^\Omega}$ an. Da dies im Allgemeinen jedoch nicht der Fall ist, müssen Methoden angewendet werden, um die Lösung eines relaxierten Problems in eine gemischt-ganzzahlige Lösung zu überführen, welche dann zur Steuerung oder Regelung eines realen Systems verwendet werden kann. Dazu werden in [24] verschiedene Rundungsstrategien vorgeschlagen, die darauf abzielen Ungenauigkeiten einer solchen Wertdiskretisierung so gering wie möglich zu halten. Die dieser Strategien zugrunde liegenden Überlegungen sollen in diesem Abschnitt veranschaulicht werden.

Im Folgenden soll $\boldsymbol{\alpha}_k^*$ mittels Rundungsverfahren in einen zulässigen Stellgrößenverlauf $\mathbf{a}_k \in [0, 1]^{n^\Omega}$ transformiert werden. Dazu werden zunächst drei einfache Rundungsverfahren angegeben:

- Standard Runden (Standard Rounding, SR)

$$a_k^i = \begin{cases} 1 & \forall \alpha_k^i \geq 0,5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \forall 1 \leq i \leq n^\Omega, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (3.15)$$

- Aufsummierendes Runden (Sum Up Rounding, SUR)

$$a_k^i = \begin{cases} 1 & \forall \sum_{j=0}^k \alpha_j^i - \sum_{j=0}^{k-1} a_j^i \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.16)$$

- Aufsummierendes Runden mit 0,5 als Grenzwert (SUR-0,5)

$$a_k^i = \begin{cases} 1 & \forall \sum_{j=0}^k \alpha_j^i - \sum_{j=0}^{k-1} a_j^i \geq 0,5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.17)$$

Während beim SR jeder relaxierte Wert der Lösung isoliert betrachtet und gerundet wird, liefern SUR-Verfahren gerundete Lösungen, die zu jedem Zeitpunkt auch vom vergangenen Stellgrößenverlauf abhängig sind. In Abbildung 3.2 werden die drei angeführten Rundungsverfahren anhand einer konstanten, relaxierten Stellgröße α_k demonstriert.

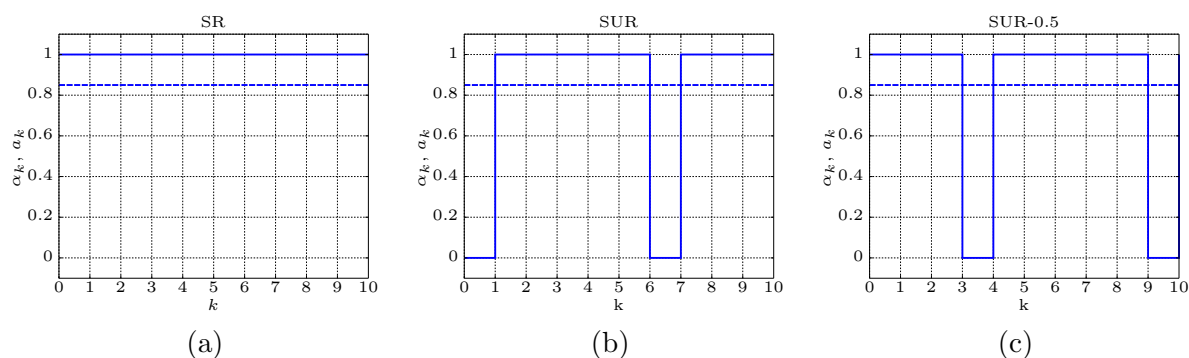


Abbildung 3.2: Vergleich der Rundungsstrategien mit einer eindimensionalen relaxierten Stellgröße mit konstantem Verlauf (--). (a) Standard Runden; (b) Aufsummierendes Runden mit dem Schwellwert 1; (c) Aufsummierendes Runden mit dem Schwellwert 0,5.

Sollte ein Optimierungsproblem eine solche, durchaus denkbare Lösung liefern, so ist dementsprechend die Anwendung von SR nicht von Vorteil. Aufgrund des primitiven Auf- oder Abrundens kommt es zu keinem Schaltvorgang und somit auch zu keiner Beeinflussung des jeweiligen Systems.

Anders hingegen sieht die Situation bei den SUR-Verfahren aus. Hier wird die Abweichung vom relaxierten Verlauf zum gerundeten Verlauf zeitlich aufsummiert; erreicht die Differenz dieser Summen einen bestimmten Schwellwert, so wird geschaltet. Handelt es sich um ein MIOCP mit mehreren wertdiskrete Optimierungsvariablen, so müssen die relaxierten Größen im zugehörigen MINLP gemäß Gleichung (3.14) die SOS1-Bedingung

aus Definition 3.2 erfüllen. Die folgenden zwei Rundungsstrategien sind Erweiterungen von SR und SUR unter Einbeziehung der SOS1-Bedingung.

- SR unter Berücksichtigung der SOS1-Bedingung (SR-SOS1)

$$a_k^i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (\alpha_k^i \geq \alpha_k^j, \forall i \neq j) \wedge (i < j, \forall i : \alpha_k^i = \alpha_k^j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.18)$$

- SUR unter Berücksichtigung der SOS1-Bedingung (SUR-SOS1)

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_k^i &= \sum_{j=0}^k \alpha_j^i - \sum_{j=0}^{k-1} a_j^i \\ \alpha_k^i &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } (\tilde{\alpha}_k^i \geq \tilde{\alpha}_k^j, \forall i \neq j) \wedge (i < j, \forall i : \tilde{\alpha}_k^i = \tilde{\alpha}_k^j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Das SR-SOS1 Rundungsverfahren kann in möglichst einfachen Worten wie folgt beschrieben werden: Für jeden Zeitschritt wird der größte relaxierte Wert α^i gesucht und auf 1 gesetzt. Haben zwei der relaxierten Stellgrößen gleichzeitig den höchsten Wert, so wird jener mit dem niedrigsten Index auf 1 gesetzt. Alle anderen Größen erhalten den Wert 0. Die selbe Vorgehensweise gilt für das SUR-SOS1 Verfahren, wobei hier jedoch die aufsummierten Differenzen betrachtet werden.

3.5 Minimierung der Schaltvorgänge

Die wertdiskreten Lösungstrajektorien von MINLPs können die Eigenschaft aufweisen, dass sehr oft zwischen den diskreten Zuständen hin- und hergeschaltet wird. Um die Anzahl dieser Schaltvorgänge schon während der Optimierung zu verringern, wird in diesem Abschnitt ein, zur Anzahl der Schaltvorgänge proportionaler Teil dem Gütefunktional

hinzugefügt. Das MINLP aus Gleichung (3.13) ändert sich also durch Hinzufügen der Schaltkosten zu

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{z}} \quad & J(\mathbf{z}) = \phi(N, \mathbf{s}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{n^\Omega} \omega_k^i L(t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k^i) + \sum_{i=1}^{n^\Omega} Q^i \sigma^i \quad (3.20) \\
\text{mit } \mathbf{z} := & [\mathbf{s}_1^T \ \dots \ \mathbf{s}_N^T \ \mathbf{u}_0^T \ \dots \ \mathbf{u}_{N-1}^T \ \boldsymbol{\omega}_0^T \ \dots \ \boldsymbol{\omega}_{N-1}^T] \\
\text{unter } \mathbf{0} = & \sum_{i=1}^{n^\Omega} \omega_k^i \mathbf{x}_k(t_{k+1}; t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k, \omega_k) - \mathbf{s}_{k+1}, \quad \forall 0 \leq k \leq N-1 \\
& \mathbf{s}_0 = \mathbf{x}_0 \\
& 0 = G_{ik}(t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k), \quad \forall 0 \leq k \leq N-1 \\
& 0 \geq H_{jk}(t_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k), \quad \forall 0 \leq k \leq N-1 \\
& \mathbf{w}^i \in \{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{n^\Omega}\} \subset \mathbb{R}^{n^w} \\
1 = \sum_{i=1}^{n^\Omega} & \omega_k^i, \quad \omega_k^i \in \{0, 1\}, \quad \forall 0 \leq k \leq N-1 \\
\sigma^i = \sum_{k=0}^{N-1} & |\omega_{k+1}^i - \omega_k^i|, \quad \forall 1 \leq i \leq n^\Omega \\
\sigma^i \leq \sigma_{max}, & \quad \forall 1 \leq i \leq n^\Omega
\end{aligned}$$

mit der Anzahl der Schaltvorgänge je wertdiskreter Stelltrajektorie $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{n^\Omega}$, dem Gewichtungsvektor $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n^\Omega}$ sowie der Berechnung der Schaltvorgänge σ^i und einer oberen Schranke $\sigma_{max} \in \mathbb{N}$. Ein Problem ist jedoch, dass die Gleichung für die Anzahl der Schaltvorgänge σ^i nicht nach ω^i differenzierbar ist. Differenzierbarkeit des Gütefunktional ist jedoch eine Grundvoraussetzung für die Lösung eines NLPs mittels gradientenbasierenden Verfahren.

Eine in [16] präsentierte konvexe Formulierung der Schaltkosten umgeht dieses Problem durch die Einführung zusätzlicher Freiheitsgrade. Für alle ganzzahligen Größen wird ein

$$\sigma_k^i := c_k^i (\omega_k^i + \omega_{k+1}^i) + d_k^i (2 - \omega_k^i - \omega_{k+1}^i), \quad c_k^i + d_k^i = 1 \quad (3.21)$$

mit den zusätzlichen Optimierungsvariablen c_k^i und d_k^i definiert. Die Optimierungsvariablen c_k^i und d_k^i müssen eine SOS1-Bedingung erfüllen. Unter Anwendung dieser Bedingung kann eine Variable eliminiert werden und Gleichung (3.21) vereinfacht sich zu

$$\sigma_k^i = (2c_k^i - 1)(\omega_k^i + \omega_{k+1}^i - 1) + 1. \quad (3.22)$$

Zur Veranschaulichung werden in Tabelle 3.1 die Schaltkosten aus Gleichung (3.22) den Schaltkosten

$$\tilde{\sigma}_k^i = (2c_k^i - 1)(a_k^i + a_{k+1}^i - 1) + 1 \quad (3.23)$$

der relaxierten Stellgrößen gegenübergestellt. Die hier dargestellten Werte sind jeweils als Größen nach bereits durchgeführter Optimierung anzusehen.

ω_k^i	ω_{k+1}^i	c_k^i	σ_k^i
0	0	1	0
0	1	$\in [0, 1]$	1
1	0	$\in [0, 1]$	1
1	1	0	0

(a)

$a_k^i + a_{k+1}^i$	c_k^i	$\tilde{\sigma}_k^i$
< 1	1	> 1
$= 1$	$\in [0, 1]$	1
> 1	0	< 1

(b)

Tabelle 3.1: Gegenüberstellung der Schaltkosten einer (jeweils optimalen) ganzzahligen und relaxierten Stellgrößenfolge: (a) Ganzzahlige Stellgrößenfolge (optimale Lösung eines MIOCPs); (b) relaxierte Stellgrößenfolge (optimale Lösung eines relaxierten MINLPs)

Der Vergleich von Abbildung 3.3a mit Abbildung 3.3b zeigt den Unterschied zwischen den Schaltkosten σ_k^i bei ganzzahligen und relaxierten Stellgrößen. Der Ansatz in Gleichung (3.23) sorgt insbesondere dafür, dass alle relaxierten Stellgrößen a_k^i die nicht 0 oder 1 sind, im Gütefunktional stärker gewichtet werden. Die Lösung des MINLP wird also in Richtung $\omega_k^i \in \{0, 1\}$ gedrängt.

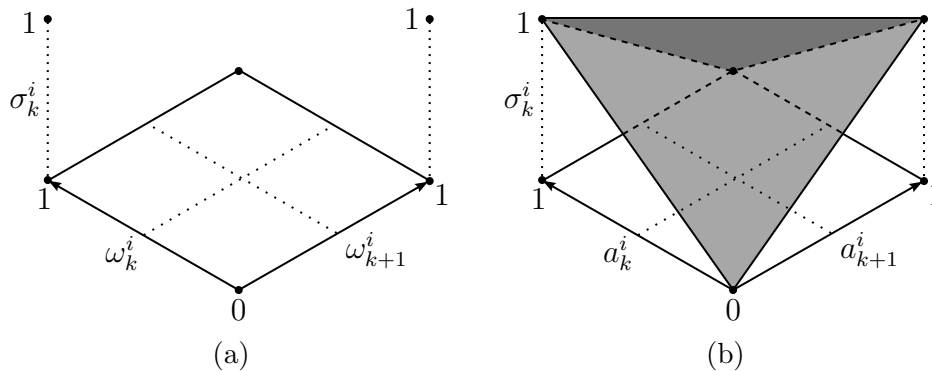


Abbildung 3.3: Schaltkosten eines Zeitschrittes nach der Optimierung: (a) Ganzzahlige Stellgrößen; (b) relaxierte Stellgrößen.

3.6 Zusammenfassung

In den Grundlagen (Kapitel 2) über Optimalsteuerungen (Abschnitt 2.1) und NMPC (Abschnitt 2.2) wurde prinzipiell die Idee hinter der modellprädiktiven Regelung von nicht-linearen Systemen vorgestellt. Um einem technischen Hybridsystem (siehe Abschnitt 2.3) gerecht zu werden, wurde die Idee der Optimalsteuerung in diesem Kapitel auf gemischt-ganzzahlige Optimalsteuerungsprobleme erweitert.

Bei vielen Methoden zur Lösung von MIOCPs muss eine große Anzahl an Optimierungsproblemen gelöst werden. Je nach Komplexität der mathematischen Systembeschreibung kann die Berechnung einer Optimalsteuerung somit mitunter sehr viel Zeit in Anspruch nehmen. Bei der Verwendung von MIOCPs zur NMPC ist die Berechnungszeit jedoch ein entscheidendes Kriterium für die Realisierbarkeit der Regelung. Aus diesem Grund wurde in Abschnitt 3.3 eine Möglichkeit vorgestellt, bei der ein MINLP durch Konvexifizierung und anschließender Relaxierung so umgewandelt wird, dass es seine geschlossene Struktur

behält und außerdem als ein kompaktes NLP von herkömmlichen Lösungsalgorithmen gelöst werden kann. Weiters wurden Rundungsstrategien zur Rückführung der relaxierten Lösung in eine gemischt-ganzzahlige Lösung und eine Möglichkeit zur Minimierung von Schaltvorgängen vorgestellt.

Kapitel 4

Entwurf von Prädiktionsmodellen

Prädiktionsmodelle sind mathematische Modelle die als Grundlage für modellbasierte prädiktive Regelungen (MPC) dienen. Der jeweilige MPC-Algorithmus verwendet diese, um die Zustandstrajektorien des zu regelnden Systems über einen festgelegten Prädiktionshorizont im Vorhinein zu berechnen (siehe Abschnitt 2.2). Im Falle einer Systemregelung ist die MPC als übergeordnete Regelungsstrategie zu verstehen. Voraussetzung für eine übergeordnete Regelung ist ein ausreichender Grad an Basisautomatisierung, wobei die MPC die Führungsgrößen für untergeordnete (kaskadierte) Basisregelungen vorgibt.

Um das Konzept der Systemregelung näher zu erläutern folgt nun ein einfaches, praktisches Beispiel: Man stelle sich zwei Förderbänder vor, welche unterschiedliche Produkte transportieren. Jedem dieser Förderbänder ist ein Fertigungsprozess vorgelagert. Teile der Fertigungsprozesse sowie jedes der Förderbänder werden von mehreren drehzahlgeregelten Asynchronmaschinen angetrieben. Die Drehzahlregelung der Motoren ist also die Basisautomatisierung. Am Ende der Förderbänder stehen Behälter, in welche das jeweilige Produkt abgefüllt wird. In regelmäßigen Abständen werden die Behälter entleert bzw. durch Leere ersetzt. Aufgabe der Systemregelung ist es nun, die Geschwindigkeiten der Förderbänder so vorzugeben, dass die Produktbehälter am Ende der Förderbänder bis zu deren Entleerung immer genügend Restkapazität haben. Wäre einer der Behälter schon vor der Entleerung voll, so müsste das Förderband und der vorgelagerte Fertigungsprozess angehalten werden. Stillstände von Fertigungslinien haben meist größere Gewinneinbußen zur Folge als das Drosseln der Fertigungsgeschwindigkeit für eine bestimmte Zeit. Zur Realisierung einer MPC für eine übergeordnete Systemregelung muss also in einem ersten Schritt ein Prädiktionsmodell für das Gesamtsystem entwickelt werden. Anders als bei der Basisautomatisierung spielen hierbei die physikalischen Zusammenhänge in den Aktuatoren in den meisten Fällen eine untergeordnete Rolle. Vielmehr ist das Verhalten der geregelten Aktuatoren zu betrachten und deren Zusammenspiel dementsprechend zu modellieren. Im Folgenden werden Prädiktionsmodelle für ein System aus Biomasse-Feuerung¹ (Abschnitt 4.2), Pufferspeicher (Abschnitt 4.3) und Solarkollektoren (Abschnitt 4.4) entwickelt. Davon werden in Abschnitt 4.1 der Aufbau und die grundsätzliche Funktionsweise des modellierten Systems sowie getroffene Vereinfachungen beschrieben.

¹Die Prädiktionsmodelle in dieser Arbeit beschreiben das Verhalten von Biomasse-Kleinfeuerungsanlagen, wie sie typischerweise zur Wärmeerzeugung in Gebäuden verwendet werden.

4.1 Aufbau und Funktionsweise des Gesamtsystems

Das Ziel dieser Arbeit ist der Entwurf einer MPC für ein System aus Biomasse-Feuerung, Pufferspeicher und Solarkollektoren (siehe Abbildung 4.1). Nach einer kurzen Beschreibung werden die Zusammenhänge der Anlage in diesem Abschnitt auf ein für die Systemregelung ausreichendes Maß vereinfacht. Für einen detaillierteren Einblick in die Funktionsweise der einzelnen Komponenten sei auf die folgenden Abschnitte verwiesen.

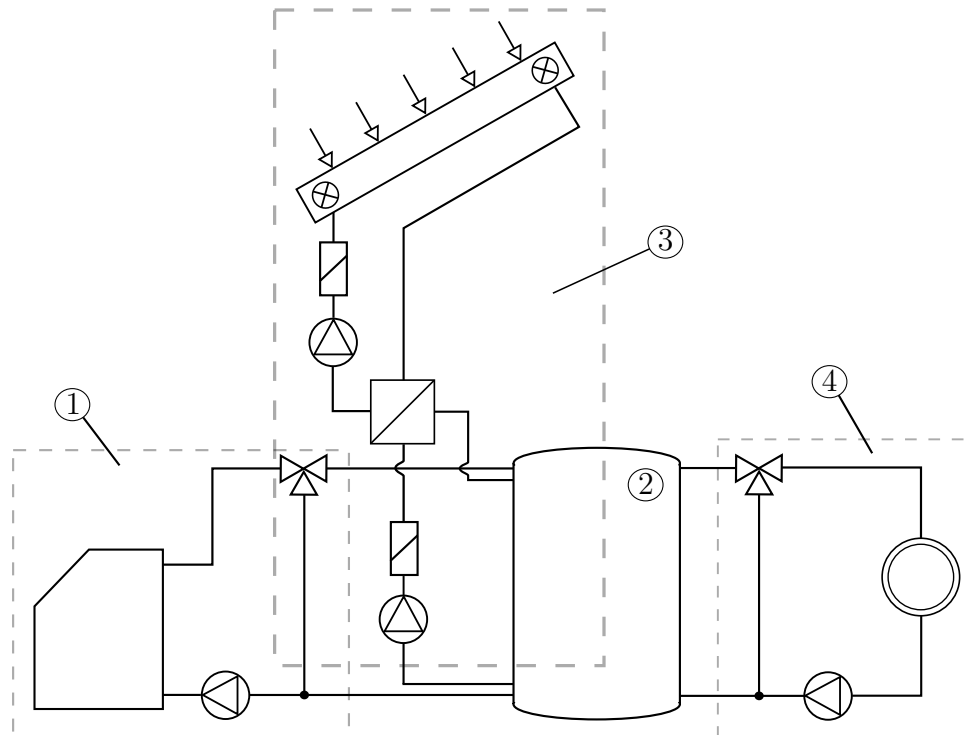


Abbildung 4.1: Hydraulikplan des Systems aus Biomasse-Feuerung (1), Pufferspeicher (2), Solarkreis (3) und Heizkreis (4).

Abbildung 4.1 zeigt den Hydraulikplan des Gesamtsystems. Die Biomasse-Feuerung und die Solarkollektoren erwärmen Wasser, welches über Rohre in den Pufferspeicher transportiert und dort gespeichert wird. Als Abnehmer der gespeicherten Wärme dient ein an den Pufferspeicher angeschlossener Heizkreis.

Im Vorlauf der Biomasse-Feuerung ist ein 3-Wege-Ventil verbaut (siehe Abbildung 4.2). Je nach Stellung dieses Ventils wird ein Teil des Vorlauf-Massenstroms abgezweigt und mit dem Rücklauf vermischt. Die hier vorliegende Verschaltung wird Rücklaufanhebung genannt und sorgt für eine ausreichend hohe Rücklaufftemperatur T_{RL} . Das ist unbedingt notwendig, da es bei einer zu niedrigen Rücklaufftemperatur in der heißen Anlage zu Kondensation und in weiterer Folge zu Korrosion kommen kann. Bei der Erstellung des Prädiktionsmodells wird diese Rücklaufanhebung jedoch nicht berücksichtigt, da durch die Basisregelungen der Biomasse-Feuerung sowie der Kesselkreispumpe und der Rücklaufanhebung der übertragene Wärmestrom \dot{Q}_K unabhängig von der Rücklaufanhebung ist.

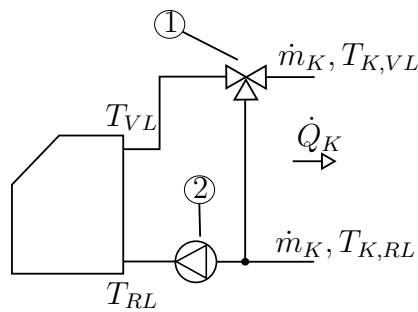


Abbildung 4.2: Hydraulikplan der Biomasse-Feuerung mit 3-Wege-Ventil (1) und Kesselkreispumpe (2).

Die Solarkollektoren (siehe Abbildung 4.3) sind über einen Wärmeübertrager (meist Plattenwärmeübertrager) mit dem restlichen Wärmenetz verbunden.

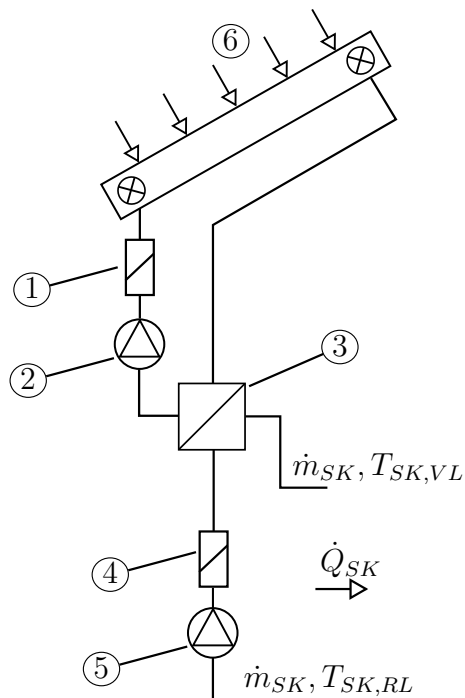


Abbildung 4.3: Hydraulikplan des Solarkreises mit Rückschlagventilen (1,4), Pumpen (2,5), Wärmeübertrager (3) und Solarkollektoren (6).

Eine direkte Anbindung der Solarkollektoren ist nicht möglich, da die Kollektoren ein Frostschutzmittel enthalten. Die Rückschlagventile verhindern eine Durchströmung des Wärmeübertragers entgegen der vorgesehenen Richtung.

Im Heizkreis (siehe Abbildung 4.4) wird über ein 3-Wege-Ventil die gewünschte Vorlauftemperatur eingestellt.

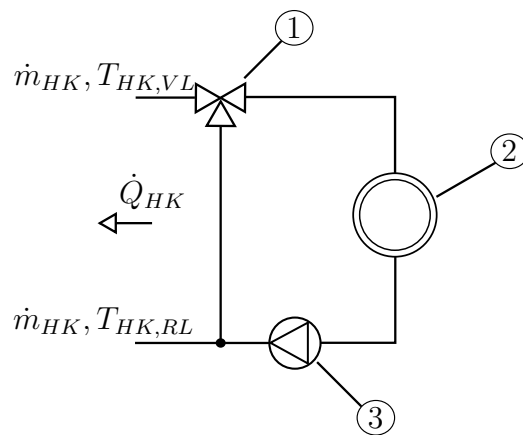


Abbildung 4.4: Hydraulikplan des Heizkreises mit 3-Wege-Ventil (1), Verbraucher (2) und Pumpe (3).

4.2 Modellierung der Biomasse-Feuerung

Die betrachtete Biomasse-Feuerung (siehe Abbildung 4.5) wurde für die Verbrennung von Hackgut konzipiert, ist kommerziell verfügbar und für eine Wärmeabgabe bis $\dot{Q} = 30 \text{ kW}$ ausgelegt. Diese Anlage kann grundsätzlich in 4 Zonen unterteilt werden: Brennstoffbett, Primärverbrennungszone, Sekundärverbrennungszone und Wärmeübertrager. Der Brennstoff (Hackgut) wird mit einer Förderschnecke vom Vorratsbehälter in den Feuerraum befördert und das Hackgut gelangt auf einen beweglichen Drehrost. Im ersten Schritt wird der Brennstoff erwärmt und bei Erreichen einer Temperatur von 100°C verdampft das im Hackgut gebundene Wasser. Eine weitere Erwärmung des Brennstoffs führt dann zur Freisetzung der flüchtigen Komponenten und am Rost bleibt die Holzkohle übrig. Diese wird mit Sauerstoff aus der Primärluft verbrannt. Normalerweise wird weniger Primärluft zugeführt als für eine vollständige Verbrennung notwendig ist. In der Sekundärverbrennungszone erfolgt dann erst die vollständige Verbrennung des Rauchgases unter Zugabe von weiterem Sauerstoff (Sekundärluft). In der nächsten Stufe durchströmt das heiße Rauchgas einen Wärmeübertrager. Der Großteil der Energie des Rauchgases wird hier auf das Wasser im Wärmeübertrager übertragen. Ein Rauchgasventilator sorgt für den Unterdruck der notwendig ist, damit das Rauchgas die Anlage zur Gänze über den Kamin verlässt.

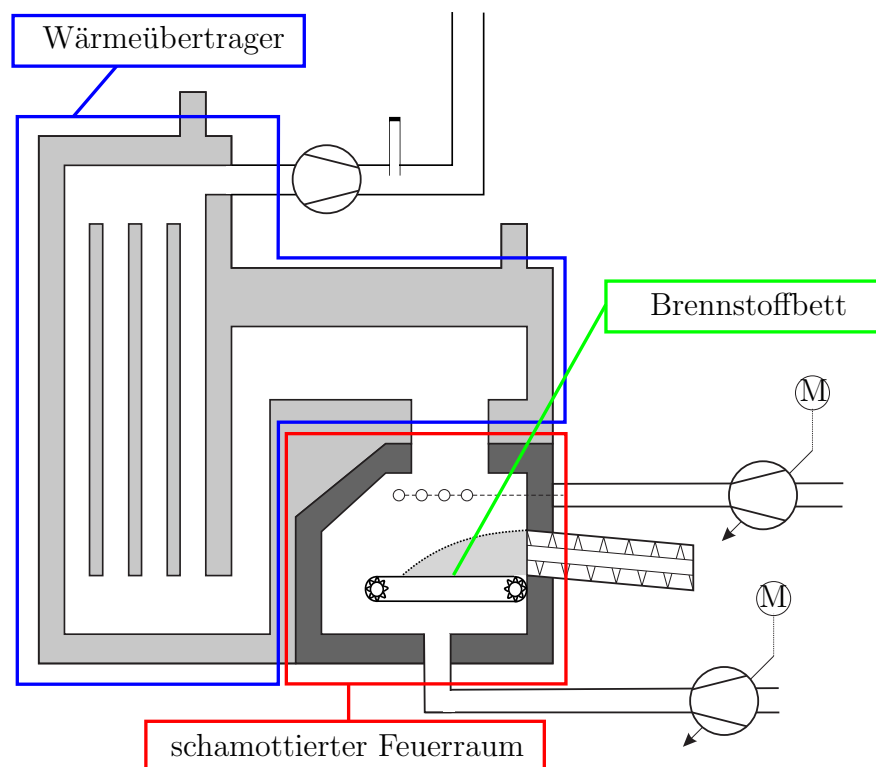


Abbildung 4.5: Anlagenschema der Biomasse-Feuerung.

Zur Regelung der Verbrennung in Biomasse-Feuerungen wurden in der Vergangenheit unterschiedliche Methoden entwickelt. Diese reichen von einfachen PID-Regler-Strukturen über den Einsatz von Fuzzy-Logik bis hin zu modellbasierten Regelungen. Insbesondere für modellbasierte Regelungen sind hinreichend genaue mathematische Modelle entscheidend. Geeignete Modelle für die in dieser Arbeit betrachteten Biomasse-Kleinfeuerungsanlagen werden in [11, 23] vorgestellt. Für den Einsatz als Prädiktionsmodell in einem übergeordneten MPC-Algorithmus können diese jedoch nicht übernommen werden. Zum einen muss die Prädiktion des Anlagenverhaltens über einen bestimmten Prädiktionshorizont nicht so genau sein wie es für eine modellbasierte Regelung notwendig ist und kann somit mit geringerer Komplexität erfolgen. Zum anderen sind die Modelle in der oben angegebenen Literatur nicht für die Beschreibung des Anfahr- und Auskühlvorgangs geeignet. Besonders bei Kleinanlagen in Einfamilienhäusern ist es jedoch oftmals notwendig diese mehrmals pro Tag ein- und auszuschalten. Ein Prädiktionsmodell für das Gesamtsystem muss also auch in der Lage sein neben dem geregelten Betrieb die Start- und Stopvorgänge ausreichend genau abzubilden.

Um die Idee der nachfolgenden Modellbildung zu verdeutlichen folgt zunächst eine sehr vereinfachte verbale Beschreibung der Vorgänge in einer Biomasse-Feuerung. Dazu wird angenommen, dass die gesamte Anlage schon seit ausreichend langer Zeit außer Betrieb ist. Somit haben alle Bauelemente sowie das Wasser im Wärmeübertrager Umgebungstemperatur. Nun startet man die Anlage und fordert eine bestimmte Leistung:

1. **Anfahren:** Eine Förderschnecke transportiert den Brennstoff von einem Brennstofflager auf das Brennstoffbett. Dord wird dieser unter Zugabe von Primärluft

getrocknet und in weiterer Folge verbrannt. Die dabei freigesetzte Wärmeenergie wird zum Teil auf den Stahl und den Schamott übertragen und dort gespeichert (siehe Abbildung 4.5). Die restliche Wärme wird im Wärmeübertrager größtenteils auf das Wasser übertragen. Ein kleiner Teil der Energie verlässt die Anlage mit dem Abgas über den Kamin. Das Wasser im Wärmeübertrager wird nun bei geschlossenem 3-Wege-Ventil so lange erhitzt, bis es eine gewünschte Temperatur erreicht hat. Beim Erreichen dieser Temperaturschwelle wird dann der Vorlaufmassenstrom durch Öffnen des Ventils aktiviert. Von diesem Zeitpunkt an wird also Wärme an das angeschlossene Wärmenetz abgegeben, die Anlage arbeitet jetzt im Nennbetrieb.

2. **Nennbetrieb:** Spätestens in diesem Betriebsmodus ist die eigentliche Regelung der Anlage aktiv. Diese sorgt nun für eine effiziente Verbrennung und für die Bereitstellung der geforderten Wärmemenge. Der Wassermassenstrom sollte so geregelt werden, dass die Vorlauftemperatur konstant gehalten wird. Auf die Vorteile einer konstanten Vorlauftemperatur wird bei der Modellierung des Pufferspeichers im Abschnitt 4.3 näher eingegangen.
3. **Auskühlen:** Wird von der übergeordneten Instanz (Benutzer, Steuerung, Systemregelung,...) keine Leistung mehr gefordert, so wird zunächst die Brennstoffförder-schnecke gestoppt. Der restliche Brennstoff am Brennstoffbett wird weiterhin unter Zugabe von Primär- und Sekundärluft verbrannt. Nach einiger Zeit wird die Verbrennung mangels Brennstoffzufuhr enden. Die in der Anlage gespeicherte Energie wird zum Teil weiterhin an das Wasser im Wärmeübertrager abgegeben. Ist die Regelung nicht mehr in der Lage die gewünschte Vorlauftemperatur zu halten, wird der Wassermassenstrom abgeschaltet. Die Anlage kühlt nun langsam ab und gibt dabei die gespeicherte Wärme kontinuierlich an die Umgebung ab. Wird nach einer gewissen Zeit wieder ein Wärmestrom gefordert, so beginnt der Zyklus wieder bei Punkt 1.

Betrachtet man die Biomasse-Feuerung aus systemtechnischer Sicht, so handelt es sich dabei um ein System mit 3 Eingängen (siehe Abbildung 4.2 und 4.6): Der geforderte Wärmestrom $\dot{Q}_{K,Soll}$ in W, die Rücklauftemperatur des Wassermassenstroms $T_{K,RL}$ in °C und die Umgebungstemperatur am Standort der Anlage $T_{Umgebung}$ in °C. Als Ausgänge des Modells werden die Vorlauftemperatur des Wassermassenstroms $T_{K,VL}$ in °C und der zum Pufferspeicher strömende Wassermassenstrom \dot{m}_K in kg/s, der sich durch die unterlagerte Regelung ergibt, festgelegt. Die Verluste setzen sich vor allem aus den Rauchgasverlusten $\dot{Q}_{V,RG}$ in W sowie den Abstrahlverlusten an die Umgebung $\dot{Q}_{V,Umg}$ in W zusammen.

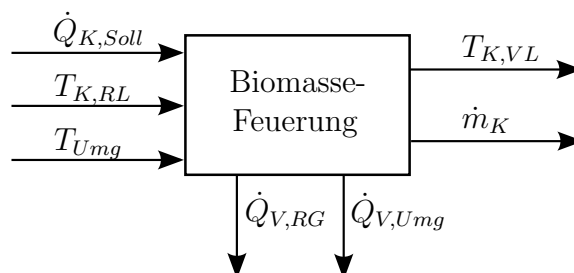


Abbildung 4.6: Ein- und Ausgänge der Biomasse-Feuerung

Um die unterschiedlichen Betriebsmodi der Biomasse-Feuerung in einem Modell zusammenzufassen ist es notwendig, bei der Modellierung auf ein hybrides Modell zurückzugreifen. Die Grundlagen zu hybriden Modellen sowie deren Einsatz in einem MPC-Algorithmus wurden in den Abschnitten 2.3 und 3.3 diskutiert. Nach den vorangegangenen Überlegungen können 3 Zustandsgrößen für eine übergeordnete Beschreibung der gesamten Biomasse-Feuerung verwendet werden. Diese sind die Masse an unverbrannten Brennstoff am Rost $m_{CHO,Rost}$ in kg, die im Stahl und im Schamott gespeicherte Wärme $Q_{St,SCH}$ in J sowie die im Wasser des Wärmeübertragers gespeicherte Energie Q_W in J.

In den folgenden Abschnitten werden nun Teilmodelle für das Brennstoffbett (Abschnitt 4.2.1), die im Stahl und Schamott gespeicherte Wärme (Abschnitt 4.2.2) und die Wärme im Wasser des Wärmeübertragers (Abschnitt 4.2.3) hergeleitet. Die hybriden Eigenschaften des Systems werden bis zum Einführen der Schaltbedingungen in Abschnitt 4.2.5 dabei zunächst nicht berücksichtigt. Die Definition aller in den folgenden Abschnitten eingeführten Parameter erfolgt in Abschnitt 6.2.2.

4.2.1 Modellierung des Brennstoffbetts

Für die Masse am Brennstoffbett kann die Gleichung

$$m_{CHO,Rost}(t) = \int_0^t (-\dot{m}_{Abb}(\tau) + \dot{m}_{CHO,Brst}(\tau - T_{tot}))d\tau \quad (4.1)$$

angeschrieben werden. Der Massenstrom \dot{m}_{Abb} in kg/s beschreibt die Reduktion der Brennstoffmasse durch die Verbrennung und $\dot{m}_{CHO,Brst}$ in kg/s den von der Förderschnecke zugeführten Brennstoffmassenstrom. Dabei wird zusätzlich die Zeitverzögerung vom Einschleusen des Brennstoffs in die Anlage bis zum Starten dessen Verbrennung mit der Totzeit T_{tot} in s modelliert. Leitet man Gleichung (4.1) nach der Zeit ab, so erhält man mit

$$\frac{dm_{CHO,Rost}(t)}{dt} = -\dot{m}_{Abb}(t) + \dot{m}_{CHO,Brst}(t - T_{tot}) \quad (4.2)$$

die erste Differentialgleichung des Systems. In guter Näherung kann man davon ausgehen, dass der abgebaute Brennstoff \dot{m}_{Abb} proportional zur Gesamtmasse an Brennstoff am Rost $m_{CHO,Rost}$ ist. Der zugeführte Brennstoff $\dot{m}_{CHO,Brst}$ ist proportional zur geforderten Kesselleistung $\dot{Q}_{K,Soll}$. Die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite von Gleichung (4.2) werden somit durch

$$\dot{m}_{Abb}(t) = k_{Abb}m_{CHO,Rost}(t) \quad \text{mit} \quad [k_{Abb}] = \frac{1}{s} \quad (4.3)$$

und

$$\dot{m}_{CHO,Brst}(t - T_{tot}) = f_{Brst}\dot{Q}_{K,Soll}(t - T_{tot}) \quad \text{mit} \quad [f_{Brst}] = \frac{\text{kg}}{\text{J}} \quad (4.4)$$

ersetzt. Durch Einsetzen von Gleichung (4.3) und (4.4) in Gleichung (4.2) erhält man für das vereinfachte Brennstoffbett-Modell die Differentialgleichung

$$\frac{d(m_{CHO,Rost}(t))}{dt} = -k_{Abb}m_{CHO,Rost}(t) + f_{Brst}\dot{Q}_{K,Soll}(t - T_{tot}). \quad (4.5)$$

Multipliziert man den abgebauten Brennstoffmassenstrom $k_{Abb}m_{CHO,Rost}$ mit seinem auf die trockene Brennstoffmasse bezogenen Heizwert² H_U , so erhält man für die Ausgangsgröße des Teilmodells „Brennstoffbett“ jenen Enthalpiestrom, der bei vollständiger Verbrennung freigesetzt wird:

$$\dot{H}_{Verbrennung}(t) = k_{Abb}m_{CHO,Rost}(t)H_U, \quad [\dot{H}_{Verbrennung}(t)] = \frac{J}{s}. \quad (4.6)$$

4.2.2 Modellierung von Stahl und Schamott als Wärmespeicher

Die durch Verbrennung von Biomasse freigesetzte Wärme (siehe Gleichung (4.6)) strömt mit dem heißen Rauchgas durch die Anlage. Dabei kommt es zu Wärmeübertragung zwischen Stahl bzw. Schamott und dem Rauchgas $\dot{Q}_{RG-St,Sch}(t)$ in J/s. Die übrige Wärme strömt mit dem Rauchgas zum Wärmeübertrager und erwärmt dort das Wasser. Unter Vernachlässigung der Wärmeverluste an die Umgebung kann für die Änderung der im Stahl und Schamott gespeicherten Wärmemenge $Q_{St,Sch}(t)$ in J die Gleichung

$$\frac{dQ_{St,Sch}(t)}{dt} = \dot{Q}_{RG-St,Sch}(t) \quad (4.7)$$

angesetzt werden. Der übertragene Wärmestrom $\dot{Q}_{RG-St,Sch}(t)$ wird dabei durch die Gleichung

$$\dot{Q}_{RG-St,Sch} = q\dot{H}_{Verbrennung}(t) - pQ_{St,Sch}(t) \quad \text{mit} \quad [q] = -, [p] = \frac{1}{s} \quad (4.8)$$

beschrieben. Diese setzt sich zusammen aus einem Teil proportional zum aus der Verbrennung resultierenden Enthalpiestrom $\dot{H}_{Verbrennung}$ abzüglich einem Teil proportional zur im Stahl und Schamott gespeicherten Wärmeenergie $Q_{St,Sch}$.

Durch Einsetzen von Gleichung (4.6) in Gleichung (4.8) erhält man mit der Differentialgleichung (4.7) die Beschreibung für das Teilmodell „Stahl und Schamott“:

$$\frac{dQ_{St,Sch}(t)}{dt} = qk_{Abb}m_{CHO,Rost}(t)H_U - pQ_{St,Sch}(t). \quad (4.9)$$

Als Ausgangsgröße dieses Modells wird

$$\dot{H}_{WU,Ein}(t) = \dot{H}_{Verbrennung}(t) - \dot{Q}_{RG-St,Sch}(t) = (1 - q)m_{CHO,Rost}(t)k_{Abb}H_u + pQ_{St,Sch} \quad (4.10)$$

festgelegt. Die Größe $\dot{H}_{WU,Ein}$ in J/s beschreibt den rauchgasseitig zur Wärmeübertragung im Wärmeübertrager zur Verfügung stehenden Enthalpiestrom und ist somit zugleich die Eingangsgröße für das im folgenden Abschnitt beschriebene Modell des Wärmeübertragers. Für eine Verbesserung der Genauigkeit des Modells könnten getrennte Modellansätze bzw. Modellparameter für die 3 in Abschnitt 4.2.1 definierten Betriebszustände (Anfahren, Nennbetrieb, Auskühlen) sowie in Abhängigkeit des Zustandes der Ventilatoren (insbe-

²Der Heizwert H_u von Biomasse ist der Quotient von der bei vollständiger Verbrennung von Biomasse frei werdenden Wärmemenge und der Masse des festen Brennstoffes, wenn das dabei entstehende Wasser im gasförmigen Zustand vorliegt und die Temperaturen von Brennstoff und Verbrennungsprodukten 25 °C beträgt. [9]

sondere des Rauchgasventilators) verwendet werden, da diese entscheidenden Einfluss auf die Wärmeübertragung haben. Für die Verwendung des Prädiktionsmodells in einer modellprädiktiven Regelung ist jedoch unter Umständen bereits die Beschreibung der geregelten Biomasse-Feuerung mittels PT2-Glied ausreichend. Die Begründung hierfür erfolgt bei der Diskussion der durchgeführten Simulationsstudien in Kapitel 6.

4.2.3 Modellierung des Wärmeübertragers

Dieses Teilmodell beschreibt die Energieübertragung vom heißen Rauchgas auf das Wasser im Wärmeübertrager und berücksichtigt zusätzlich die Verluste (Umgebungsverluste und Rauchgasverluste). Als Vereinfachung kann für das Prädiktionsmodell zunächst angenommen werden, dass das gesamte Wasser im Wärmeübertrager die selbe Temperatur hat. In der Realität ist, bedingt durch die aus der niedrigen Rücklauftemperatur T_{RL} resultierenden Führung des Wasserstromes innerhalb des Wärmeübertragers, mit einem Temperaturgradienten zu rechnen. Der Wärmeübertrager wird hier nun als idealer Rührkessel modelliert (siehe Abbildung 4.7).

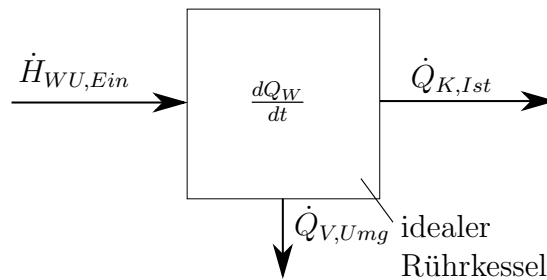


Abbildung 4.7: Ein- und Ausgänge des vereinfachten Wärmeübertragers.

Die Eingangsgröße dieses Teilmodells ist der zur Wärmeübertragung grundsätzlich zur Verfügung stehende Enthalpiestrom $\dot{H}_{WU, Ein}$. Der Ausgang des Modells ist der auf den Hydraulikkreis übertragene Wärmestrom $\dot{Q}_{K, Ist}$. Weiters sind insbesondere im Stillstand (keine Wärmeübertragung an den Hydraulikkreis) die Wärmeverluste $\dot{Q}_{V, Umg}$ an die Umgebung (Abstrahlungsverluste) zu berücksichtigen. Als Zustandsgleichung für die Änderung der Energie des Wassers im Wärmeübertrager Q_W kann somit

$$\frac{dQ_W(t)}{dt} = \dot{H}_{WU, Ein}(t)\eta - \dot{Q}_{V, Umg}(t) - \dot{Q}_{K, Ist}(t) \quad (4.11)$$

geschrieben werden. Der dimensionslose Faktor η beschreibt das endliche Übertragungsvermögen des Wärmeübertragers und berücksichtigt indirekt die Rauchgasverluste $\dot{Q}_{V, RG}$. Die Umgebungsverluste werden als Näherung mit

$$\dot{Q}_{V, Umg}(t) = \alpha_{WU} A_{WU} (T_W(t) - T_{Umg}(t)) \quad \text{mit} \quad [\alpha_{WU}] = \frac{W}{m^2 K}, [A_{WU}] = m^2 \quad (4.12)$$

beschrieben. Dieses einfache Verlustmodell basiert auf dem konvektiven Wärmeübergang mit dem Modellparameter (Wärmeübergangskoeffizient) α_{WU} . Diese Größe ist im Stillstand viel größer als im Nennbetrieb der Biomasse-Feuerung und des Weiteren ist sie sehr stark davon abhängig ob der Rauchgasventilator in Betrieb ist oder nicht. Der Einfachheit halber

wird α_{WU} in dieser Arbeit als konstant angenommen. Die fiktive äußere Oberfläche des Wärmeübertragers wird mit A_{WU} beschrieben. Die Temperatur des Wassers T_W in °C wird über die bekannte Wassermasse m_W und die Zustandsgröße Q_W mit

$$Q_W(t) = m_W c_W (T_W(t) - T_{Umg}(t)) \quad (4.13)$$

berechnet. Die anhand von Simulationsstudien festgelegten Modellparameter α_{WU} , A_{WU} und η werden in Abschnitt 6.2.2 definiert.

Beim Zusammenfassen dieses Teilmodells ist zu bedenken, dass der von der Biomasse-Feuerung auf den Hydraulikkreis übertragene Wärmestrom $\dot{Q}_{K,Ist}(t)$ neben der Abhängigkeit von der Zeit auch vom aktuellen Betriebsmodus $\zeta \in \{1, 2, 3\}$ der Anlage abhängt. Genau genommen muss also $\dot{Q}_{K,Ist}(t, \zeta)$ geschrieben werden. Der Zusammenhang zwischen den Zuständen des Systems und dem aktuellen Betriebsmodus ζ wird beim Einführen der Schaltbedingungen in Abschnitt 4.2.5 näher betrachtet. Für das Teilmodell „Wärmeübertrager“ kann mit den Gleichungen (4.10), (4.11), (4.12) und (4.13)

$$\frac{dQ_W(t)}{dt} = k_{Abb} m_{CHO,Rost}(t) H_U (1 - q) \eta + p Q_{St,Sch}(t) \eta - \frac{\alpha_{WU} A_{WU}}{m_W c_W} Q_W(t) - \dot{Q}_{K,Ist}(t, \zeta) \quad (4.14)$$

geschrieben werden.

4.2.4 Zusammenfassung der Teilsysteme

In diesem Abschnitt werden die Teilmodelle aus den Abschnitten 4.2.1, 4.2.2 und 4.2.3 zu einem Gesamtmodell zusammengefasst.

Die Abbildung 4.8 soll noch einmal die Struktur des Prädiktionsmodells veranschaulichen. Der Eingang des Systems ist der geforderte Wärmestrom $\dot{Q}_{K,Soll}(t)$. Dementsprechend ist der Ausgang dann der von der Biomasse-Feuerung gelieferte Wärmestrom $\dot{Q}_{K,Ist}(t)$. Die Teilsysteme sind durch den Ausgang $\dot{H}_{Verbrennung}(t)$ des „Brennstoffbetts“ (Gleichung (4.6)) und den Ausgang $\dot{H}_{WU,Ein}(t)$ des Modells „Stahl und Schamott“ (Gleichung (4.10)) untereinander verbunden. Die Wärmeverluste an die Umgebung $\dot{Q}_{V,Umg}(t)$ sind insbesondere bei abkühlender Anlage zu berücksichtigen.

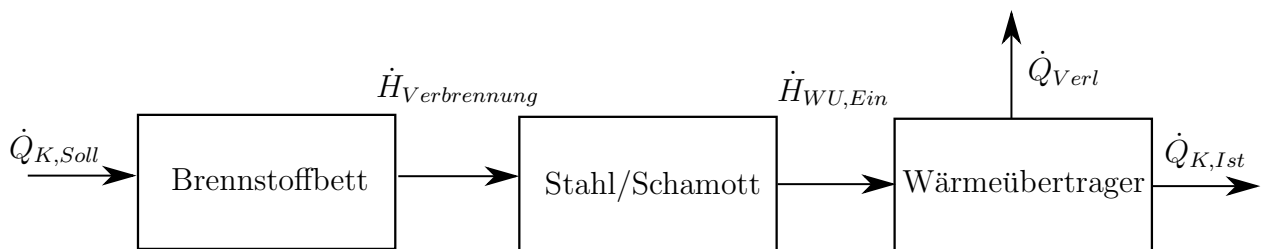


Abbildung 4.8: Strukturbild des Prädiktionsmodells der Biomasse-Feuerung.

Zur übersichtlichen Darstellung wird im nächsten Schritt in den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dm_{CHO,Rost}(t)}{dt} &= -k_{Abb}m_{CHO,Rost}(t) + f_{Brst}\dot{Q}_{K,Soll}(t - T_{tot}) \\ \frac{dQ_{St,Sch}(t)}{dt} &= qk_{Abb}m_{CHO,Rost}(t)H_U - pQ_{St,Sch}(t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_W(t)}{dt} &= k_{Abb}m_{CHO,Rost}(t)H_U(1 - q)\eta + pQ_{St,Sch}(t)\eta \\ &\quad - \frac{\alpha_{WU}A_{WU}}{m_Wc_W}Q_W(t) - \dot{Q}_{K,Ist}(t, \zeta) \end{aligned} \quad (4.16)$$

des Gesamtmodells der allgemeine Zustandsvektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} m_{CHO,Rost}(t) \\ Q_{St,Sch}(t) \\ Q_W(t) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

eingeführt. Im Sinne der besseren Lesbarkeit werden die Abhängigkeiten der Variablen von der Zeit im Folgenden weggelassen. Die Gleichungen können jetzt in der für lineare Systeme üblichen Form

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + b_1u \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - \dot{Q}_{K,Ist} \end{aligned} \quad (4.18)$$

angeschrieben werden. Der abgegebene Wärmestrom $\dot{Q}_{K,Ist}$ ist vom aktuellen Systemmodus abhängig und wird deshalb mit dem Einführen der Schaltbedingungen in Abschnitt 4.2.5 genauer definiert. Die Koeffizienten a_{ij} und b_1 sind mit

$$\begin{aligned} a_{11} &= -k_{Abb} \\ a_{21} &= qk_{Abb}H_U & a_{22} &= -p \\ a_{31} &= (1 - q)k_{Abb}H_U\eta & a_{32} &= p\eta & a_{33} &= -\frac{\alpha_{WU}A_{WU}}{m_Wc_W} \end{aligned}$$

und

$$b_1 = f_{Brst}$$

eindeutig festgelegt. Die Eingangsgröße u des Modells ist die von der Biomasse-Feuerung geforderte Leistung:

$$u = \dot{Q}_{K,Soll}(t - T_{tot}). \quad (4.19)$$

4.2.5 Schaltbedingungen

Nachdem mit Gleichung (4.18) in Abschnitt 4.2.4 das Verhalten der Biomasse-Feuerung grundsätzlich beschrieben ist, werden im Folgenden die notwendigen Schaltbedingungen festgelegt. Erst durch diese können die 3 Betriebsmodi der Anlage (Anfahren, Nennbetrieb

und Abkühlen), wie sie zu Beginn dieses Kapitels definiert wurden, realisiert werden. Dazu wird zunächst die geforderte Leistung $\dot{Q}_{K,Soll}$ mit

$$0,3\dot{Q}_{K,Nenn} \leq \dot{Q}_{K,Soll} \leq \dot{Q}_{K,Nenn} \quad (4.20)$$

begrenzt. Unter dem festgelegten Grenzwert von 30% dieser Nennleistung kann von der Basisregelung der Feuerung keine effiziente und vorallem schadstoffarme Verbrennung mehr gewährleistet werden.

Aufbauend auf den Herleitungen der vorherigen Abschnitte werden die Voraussetzungen für das Umschalten zwischen den Betriebsmodi hier noch einmal kurz zusammengefasst und die Bedingung des jeweiligen Modus definiert:

1. **Anfahren:** In diesem Modus wird kein Wärmestrom $\dot{Q}_{K,Ist}$ abgegeben und der geforderte Wärmestrom $\dot{Q}_{K,Soll}$ liegt in dem in Gleichung (4.20) festgelegten Bereich. Die Biomasse-Feuerung wird mit einem konstanten Brennstoffmassenstrom beschickt und das Wasser im Wärmeübertrager wird erwärmt. Das System befindet sich solange im Modus *Anfahren*, bis die Wassertemperatur T_W einen festgelegten Schwellwert $T_{Schwell}=T_{K,VL,Soll}$ erreicht. Danach schaltet das System in den *Nennbetrieb*. Solange die Bedingungen

$$T_W \leq T_{Schwell} \quad \text{und} \quad 0,3\dot{Q}_{K,Nenn} \leq \dot{Q}_{K,Soll} \quad (4.21)$$

eingehalten werden, befindet sich das System im Modus *Anfahren*.

2. **Nennbetrieb:** Die unterlagerten Basisregelungen der Biomasse-Feuerung sowie der Kesselkreispumpe und der Rücklaufanhebung sorgen dafür, dass der Vorlauf eine konstante Temperatur $T_{K,VL}=T_{K,VL,Soll}$ hat. Fällt die geforderte Leistung $\dot{Q}_{K,Soll}$ unter den eingestellten Schwellwert, so wird die Brennstoffzufuhr unterbrochen und das Modell wechselt in den Modus *Abkühlen*. Die Bedingungen für den *Nennbetrieb* können demnach mit

$$T_W > T_{Schwell} \quad \text{und} \quad 0,3\dot{Q}_{K,Nenn} \leq \dot{Q}_{K,Soll} \quad (4.22)$$

beschrieben werden.

3. **Abkühlen:** Der restliche Brennstoff am Rost verbrennt. Die Vorlauftemperatur kann durch Verringern des Wassermassenstroms \dot{m}_K auf einem konstanten Wert gehalten werden. Es wird so lange ein Wärmestrom $\dot{Q}_{K,Ist}$ abgegeben, bis die Wassertemperatur T_W unter den Schwellwert $T_{Schwell}$ fällt. Danach kühlt das System durch den Verlustterm $\dot{Q}_{V,Umg}$ in Gleichung (4.11) kontinuierlich ab. Die Anlage befindet sich solange im Modus *Abkühlen*, bis wieder eine gültige Leistung $\dot{Q}_{K,Soll}$ angefordert wird. In diesem Modus verbleibt das Modell also solange

$$\dot{Q}_{K,Soll} < 0,3\dot{Q}_{K,Nenn} \quad (4.23)$$

eingehalten wird.

Das Modell aus Gleichung (4.18) kann in weiterer Folge durch eine geschickte, an den jeweiligen Modus angepasste, Wahl der Ausgangsgröße $\dot{Q}_{K,Ist}$, mit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}_\zeta \mathbf{x} + \mathbf{b}_\zeta u \quad \text{mit} \quad \zeta \in \{1, 2, 3\} \quad (4.24)$$

angeschrieben werden. Die diskrete Variable ζ beschreibt den aktuellen Modus. Beim *Anfahren* wird keine Leistung $\dot{Q}_{K,Ist}$ abgegeben. Das System ist in diesem Modus also durch

$$A_1 = \begin{bmatrix} -k_{Abb} & 0 & 0 \\ qk_{Abb}H_U & -p & 0 \\ (1-q)k_{Abb}H_U\eta & p\eta & -\frac{\alpha_{WU}A_{WU}}{m_Wc_W} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b_1 = \begin{bmatrix} f_{Brst} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

definiert.

Geht man davon aus, dass die Feuerungsregelung im *Nennbetrieb* immer den geforderten Wärmestrom liefern kann, so gilt die Bedingung

$$\frac{dQ_W}{dt} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \dot{Q}_{K,Ist} = \dot{H}_{WU,Ein}\eta - \dot{Q}_{V,Umg} \quad \text{mit} \quad \dot{Q}_{V,Umg} \ll \dot{H}_{WU,Ein}\eta \quad (4.25)$$

und das System vereinfacht sich zu

$$A_2 = \begin{bmatrix} -k_{Abb} & 0 & 0 \\ qk_{Abb}H_U & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{bmatrix} f_{Brst} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Umgebungsverluste sind im *Nennbetrieb* im Verhältnis zum abgegebenen Wärmestrom so gering, dass sie vernachlässigt werden können.

Beim *Abkühlen* wird der Anlage kein Brennstoff mehr zugeführt. Die Verluste $\dot{Q}_{V,Umg}$ beeinflussen das System in dieser Phase am meisten und müssen hier deshalb berücksichtigt werden. Somit erhält man für das *Abkühlen* ein System mit

$$A_3 = \begin{bmatrix} -k_{Abb} & 0 & 0 \\ qk_{Abb}H_U & -p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_{WU}A_{WU}}{m_Wc_W} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zusammengefasst kann für das Prädiktionsmodell der Biomasse-Feuerung schlussendlich

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 u, & \text{in } B_1 \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 u, & \text{in } B_2 \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{x} + \mathbf{b}_3 u, & \text{in } B_3 \end{cases} \quad (4.26)$$

$$y_K := \dot{Q}_{K,Ist} = \begin{cases} 0, & \text{in } B_1 \\ \dot{H}_{WU,Ein}\eta - \dot{Q}_{V,Umg}, & \text{in } B_2 \\ \dot{H}_{WU,Ein}\eta - \dot{Q}_{V,Umg}, & \text{in } B_3 \end{cases} \quad (4.27)$$

$$y_K = \mathbf{c}_\zeta^T \mathbf{x}_K \quad \text{mit} \quad \zeta \in \{1, 2, 3\} \quad (4.28)$$

mit den Definitionsbereichen

$$\begin{aligned}
 B_1 &: T_W \leq T_{Schwell} \quad \wedge \quad 0,3\dot{Q}_{K,Nenn} \leq \dot{Q}_{K,Soll} \\
 B_2 &: T_W > T_{Schwell} \quad \wedge \quad 0,3\dot{Q}_{K,Nenn} \leq \dot{Q}_{K,Soll} \\
 B_3 &: \dot{Q}_{K,Soll} < 0,3\dot{Q}_{K,Nenn}
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

geschrieben werden.

4.3 Modellierung des Pufferspeichers

Der Wirkungsgrad von Biomasse-Feuerungen ist in der Regel am größten, wenn die Anlage unter Volllast betrieben wird und sie können außerdem nicht beliebig schnell auf Lastanforderungen reagieren. Weiters sind die Anlagen derart dimensioniert, dass sie bei hohen Leistungen eine bestmögliche Verbrennung haben (geringer Schadstoffausstoß). Die Wärmeanforderung durch den Verbraucher unterliegt aber starken Schwankungen, d.h. je nach Nennleistung der Feuerung würde bei Volllastbetrieb fast immer mehr Energie bereitgestellt werden, als verbraucht werden kann. Darüber hinaus sind Biomasse-Feuerungen auch prinzipbedingt nicht in der Lage Laständerungen beliebig schnell zu folgen. Weiters soll ein getaktetes Starten und Stoppen der Feuerung aufgrund der großen Verluste bei diesen Vorgängen unbedingt vermieden werden. Aus all diesen Gründen wird ein Pufferspeicher zwischen Erzeuger und Verbraucher geschaltet (siehe Abbildung 4.1), der sowohl Lastspitzen als auch schnelle Laständerungen abdecken kann. Dieser dient auch zum Speichern der von den Solarkollektoren gewonnenen Wärme. Bevor mit dem Entwurf des Prädiktionsmodells begonnen werden kann, wird im Folgenden kurz der grundsätzliche Aufbau des in dieser Arbeit betrachteten und in weiterer Folge modellierten Pufferspeichers (siehe Abbildung 4.9) erklärt.



Abbildung 4.9: Foto des untersuchten Pufferspeichers (Versuchsanlage des Kompetenzzentrums *Bioenergy2020+*, 1.500l)

Abbildung 4.10 zeigt den prinzipiellen Aufbau des Pufferspeichers. Schon allein die große Anzahl an Anschlüssen lässt erkennen, dass es viele verschiedene Möglichkeiten gibt, den Speicher in ein Wärmenetz einzubinden.

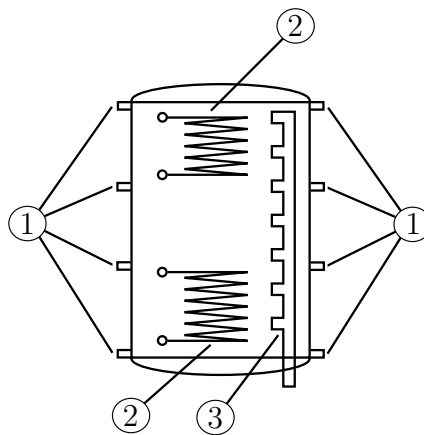


Abbildung 4.10: Prinzipieller Aufbau des Pufferspeichers mit Anschlüssen für Vor- und Rückläufe (1), Glattrohrregister (2) und Schichtladeeinheit (3).

Pufferspeicher für Warmwasser werden in dieser Größenordnung (vgl. Abbildung 4.9) in der Regel als schmale, hohe Zylinder ausgeführt. Der Grund dieser Bauform liegt in der Wärmeleitfähigkeit des Wassers. Je schmaler der Speicher ist, desto kleiner ist die Grenzfläche zwischen den Temperaturschichten, was einen geringen Temperaturschichtausgleich zwischen kaltem und warmem Wasser zur Folge hat. Über die Höhe des Pufferspeichers sind mehrere Anschlüsse für die Vor- und Rückläufe der anzuschließenden Anlagenkomponenten verteilt. Beim betrachteten Puffermodell befinden sich im Zylinder zwei Glattrohrregister

und eine Schichtladeeinheit. Die Glattrohrregister dienen dem Einbringen von Wärme aus Solarkollektoren. Die Schichtladeeinheit ist ein senkrechttes Rohr im Pufferspeicher, mit Auslässen in verschiedenen Höhen. Dies dient dazu, dass der eingespeiste Rücklauf eines Heizkreises oder der Vorlauf von Solarkollektoren so strömt, dass das Wasser in diesem Rohr aufgrund des Dichteunterschiedes nach oben strömt und genau in der Höhe eingespeist wird, in welcher das Wasser im Speicher die gleiche Temperatur wie das eingespeiste Wasser hat.

Experimentelle Untersuchungen wie auch Ergebnisse von Simulationsstudien in [15] zeigten deutlich, dass sich beim Beladen eines Pufferspeichers mit heißem Wasser von oben ein ausgeprägter Sprung im Temperaturprofil nach unten ausbildet (siehe Abbildung 4.11a). Diese ausgeprägte Grenze zwischen kaltem und warmem Wasser wird Thermokline genannt. Mit der Zeit weitet sich der Temperatursprung aufgrund von Wärmeleitung auf und es entsteht ein fließender Übergang zwischen der oberen und unteren Temperaturschicht (siehe Abbildung 4.11b).

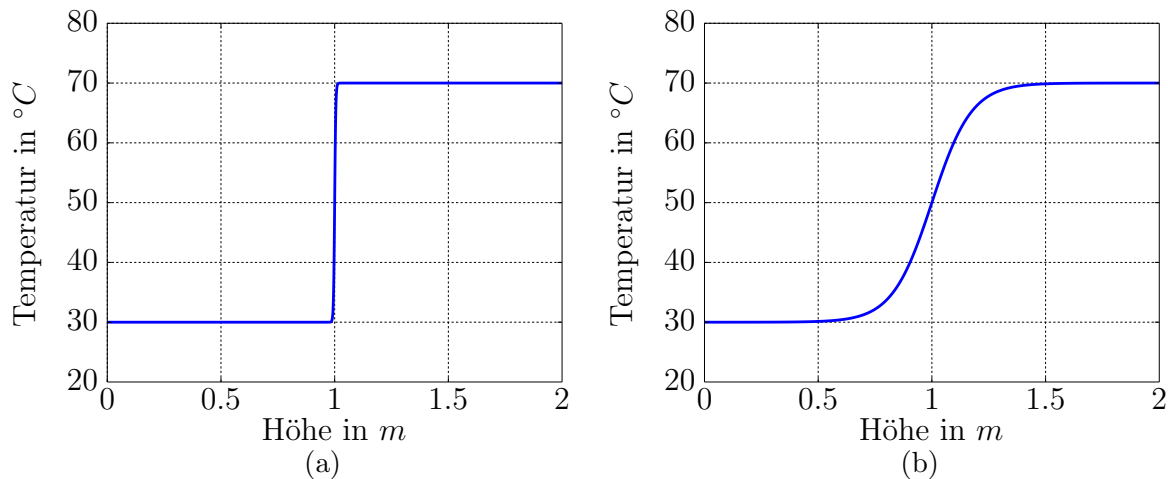


Abbildung 4.11: Temperaturprofil eines Pufferspeichers mit zwei Temperaturzonen ($T_o = 70\text{ °C}$, $T_u = 30\text{ °C}$). (a) Ausgangszustand unmittelbar nach Beladung des Speichers; (b) Aufweitung der Thermokline nach einer Zeit von $t = 3\text{ h}$.

Die Aufweitung der Thermokline kann durch das *Fouriersche Gesetz* der Wärmeleitung beschrieben werden. Dieser beschreibt die Übertragung von Wärmeenergie als Folge eines Temperaturgradienten. Die partielle Differentialgleichung

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.30)$$

mit der Wärmestromdichte \dot{q} in W/m^2 , der spezifischen Wärmeleitfähigkeit λ in W/mK und dem Temperaturgradienten $\partial T/\partial x$ in K/m beschreibt diesen Vorgang.

Das mathematische Äquivalent zum Wärmeleitsatz für Gebiete unterschiedlicher Stoffkonzentrationen ist der *erste Ficksche Diffusionssatz*

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (4.31)$$

mit der Teilchenstromdichte J in mol/m²s, der Diffusionskonstante D in m²/s und dem Konzentrationsgradienten $\partial c/\partial x$ in mol/m⁴.

Im nächsten Schritt wird jetzt ausgehend vom *Fourierschen Gesetz* der Wärmeleitung die Wärmeleitungsgleichung hergeleitet. Durch Einsetzen von Gleichung (4.30) in die eindimensionale Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{q}}{\partial x} \quad (4.32)$$

erhält man den Zusammenhang

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (4.33)$$

und in weiterer Folge, bei konstanter Wärmeleitfähigkeit λ , die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (4.34)$$

Gleichungen dieser Art werden Transportgleichungen genannt und können allgemein mit

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0 \quad (4.35)$$

angeschrieben werden. Diese partielle Differentialgleichung besitzt die folgende Gaußfunktion als Fundamentallösung

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right). \quad (4.36)$$

Die Fundamentallösung wird auch als Wärmeleitungskern bezeichnet und ist nicht die vollständige Lösung der Transportgleichung. Vielmehr dient sie dazu, die Berechnung des Temperaturübergangs bei speziellen Randbedingungen durch Integration zu ermöglichen:

$$T(x, t) = T_u + \Delta T \int_{-\infty}^x u(\zeta, t) d\zeta \quad \text{mit} \quad \Delta T = T_0 - T_u. \quad (4.37)$$

Vergleicht man nun diese Fundamentallösung mit der Dichtefunktion der Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.38)$$

mit deren Standardabweichung σ und dem Erwartungswert μ , so ist zu erkennen, dass die Standardabweichung von Gleichung (4.36) mit

$$\sigma = \sqrt{2at} \quad (4.39)$$

angeschrieben werden kann. Mit der Standardabweichung σ wurde also ein Maß für die Aufweitung des Wärmeleitungskerns gefunden. Dies ist gleichbedeutend mit der Aufweitung des Übergangsbereichs zwischen den zwei Temperaturschichten im Pufferspeicher. Die Beziehung aus Gleichung (4.39) wird später im Abschnitt 4.3.2 bei der Modellierung der Thermokline wieder aufgegriffen.

Wie in Abbildung 4.1 dargestellt, erfolgt die Beladung des Speichers mit warmen Wasser, sowie die Entnahme desselben durch den Heizkreis jeweils an den oberen Anschlüssen des Pufferspeichers. Die Entnahme von kaltem Wasser, sowie das Einspeisen des Heizkreis-Rücklaufs erfolgen an den unteren Anschlüssen. Es wird von einer Einbindung der Solaranlage über einen Plattenwärmeübertrager ausgegangen. Aufgrund dieser Art der Einbindung des Speichers in die Anlage werden die Glattrohrregister aus Abbildung 4.10 nicht benötigt und werden daher auch nicht modelliert.

In den folgenden Abschnitten folgt nun eine detaillierte Beschreibung der Entwicklung des Prädiktionsmodells, wobei sämtliche eingeführte Parameter in Abschnitt 6.2.2 definiert werden.

4.3.1 Systemtechnische Betrachtung des Modells

Für den Entwurf des Modells wird zunächst angenommen, dass das gesamte Speichervolumen in zwei Bereiche mit jeweils konstanter Temperatur (T_o und T_u in °C) unterteilt werden kann. Die Grenze zwischen den Bereichen wird als Thermokline bezeichnet und befindet sich in der Höhe h_{Tk} in m. Abbildung 4.12 zeigt das vereinfachte Schema des Pufferspeichers mit den zwei Temperaturbereichen. Der Kesselkreis liefert mit dem Massenstrom \dot{m}_K in kg/s eine Vorlauftemperatur von $T_{K,VL}$ in °C und entnimmt gleichzeitig Wasser mit der Temperatur $T_{u,K,RL}$ in °C. Gleiches gilt für den Solarkreis mit dem Massenstrom \dot{m}_{SK} in kg/s und den Temperaturen $T_{SK,VL}$ in °C sowie $T_{u,SK,RL}$ in °C. Der Heizkreis entnimmt das Wasser mit dem Massenstrom \dot{m}_{HK} in kg/s und einer Vorlauftemperatur von $T_{o,HK,VL}$ in °C. Der Rücklauf hat eine Temperatur von $T_{HK,RL}$ in °C. Es ist zu erwähnen, dass mit Ausnahme der Höhe des Speichers H_{Sp} in m alle hier eingeführten Größen zeitabhängig sind. Im Sinne der besseren Lesbarkeit werden diese Abhängigkeiten jedoch nicht angeschrieben.

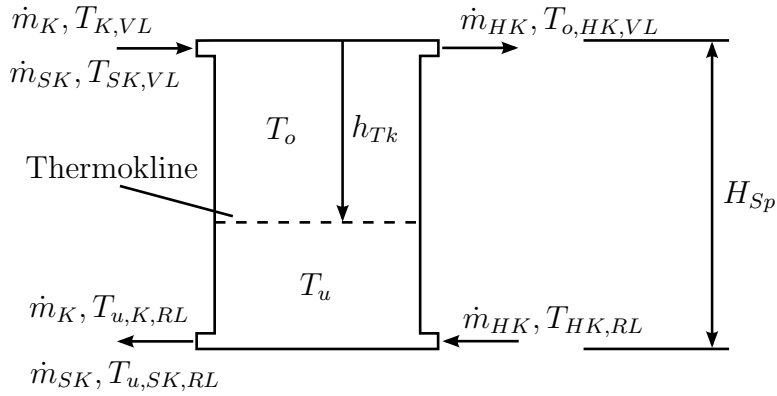


Abbildung 4.12: Schematische Darstellung des Pufferspeichers mit den Einlässen für die Vor- und Rückläufe, zwei Temperaturbereichen sowie der Thermokline.

Für diesen ersten Teil der Modellbildung wird zunächst angenommen, dass die Entnahmetemperaturen gleich den Temperaturen des jeweiligen Bereichs sind:

$$\begin{aligned} T_{u, K, RL} &= T_u \\ T_{u, SK, RL} &= T_u \\ T_{o, HK, VL} &= T_o. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Im Folgenden wird nun für jeden Temperaturbereich die Energiebilanz aufgestellt. Abbildung 4.13 zeigt, exemplarisch für den oberen Temperaturbereich, die Zusammenhänge der zugeführten ($\dot{Q}_{K, VL}$ in J/s und $\dot{Q}_{SK, VL}$ in J/s) und abgegebenen ($\dot{Q}_{HK, VL}$ in J/s) Wärmeströme sowie der Verluste $\dot{Q}_{V, o}$ in J/s.

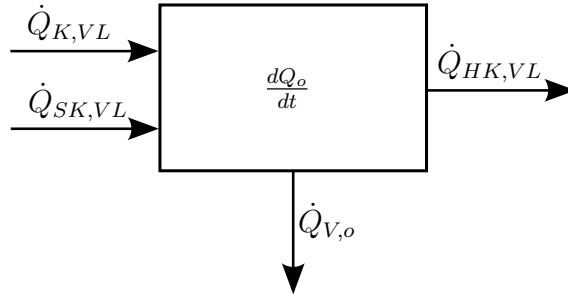


Abbildung 4.13: Energiebilanz für den oberen Temperaturbereich.

Die Energiebilanzen für den oberen und unteren Temperaturbereich lauten somit:

$$\frac{dQ_o}{dt} = \dot{Q}_{K, VL} + \dot{Q}_{SK, VL} - \dot{Q}_{HK, VL} - \dot{Q}_{V, o} \quad (4.41)$$

und

$$\frac{dQ_u}{dt} = -\dot{Q}_{K, RL} - \dot{Q}_{SK, RL} + \dot{Q}_{HK, RL} - \dot{Q}_{V, u}, \quad (4.42)$$

wobei Q_o und Q_u in J die Wärmemengen im jeweiligen Temperaturbereich beschreiben. Die Verluste $\dot{Q}_{V,o}$ setzen sich aus den Wand- und den Deckenwärmeverlusten zusammen. Als einfacher Ansatz für die Modellierung dieser Verluste dient

$$\dot{Q}_{V,o} = \alpha A_{Sp}(T_o - T_{Umg}) + \alpha U_{Sp} h_{Tk}(T_o - T_{Umg}) \quad (4.43)$$

mit dem Wärmeübergangskoeffizienten α in W/m²K, der Umgebungstemperatur T_{Umg} in °C, der Grundfläche des Speichers A_{Sp} in m² und dem Umfang des Speichers U_{Sp} in m. Da kaltes Wasser im Pufferspeicher immer nach unten sinkt und dort nahezu kein Austausch stattfindet, wird sich am Boden immer eine kalte Temperaturschicht ausbilden. Für die Modellierung von $\dot{Q}_{V,u}$ wird nun angenommen, dass diese unterste Schicht näherungsweise Umgebungstemperatur hat. Das bedeutet, es findet fast keine Wärmeübertragung durch den Boden des Pufferspeichers statt und die Verluste können daher mit

$$\dot{Q}_{V,u} = \alpha U_{Sp}(H_{Sp} - h_{Tk})(T_u - T_{Umg}) \quad (4.44)$$

angesetzt werden. Die restlichen zu- und abfließenden Wärmeströme errechnen sich aus den Beziehungen in Abbildung 4.12 sowie der Wärmekapazität von Wasser c_W in W/kgK zu

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{K,VL} &= c_w \dot{m}_K T_{K,VL} & \dot{Q}_{SK,VL} &= c_w \dot{m}_{SK} T_{SK,VL} & \dot{Q}_{HK,VL} &= c_w \dot{m}_{HK} T_{o,HK,VL} \\ \dot{Q}_{K,RL} &= c_w \dot{m}_K T_{u,K,RL} & \dot{Q}_{SK,RL} &= c_w \dot{m}_{SK} T_{u,SK,RL} & \dot{Q}_{HK,RL} &= c_w \dot{m}_{HK} T_{HK,RL}. \end{aligned}$$

Schreibt man nun noch für die Energie im oberen und unteren Bereich

$$Q_o = c_W \rho_W A_{Sp} h_{Tk} T_o \quad (4.45)$$

und

$$Q_u = c_W \rho_W A_{Sp} (H_{Sp} - h_{Tk}) T_u \quad (4.46)$$

mit der Dichte von Wasser ρ_W in kg/m³, so erhält man durch Einsetzen der soeben definierten Wärmeströme in Gleichung (4.41) und (4.42) die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(c_W \rho_W A_{Sp} h_{Tk} T_o) &= c_W (\dot{m}_K T_{K,VL} + \dot{m}_{SK} T_{SK,VL} - \dot{m}_{HK} T_{o,HK,VL}) - \\ &\quad - \alpha A_{Sp}(T_o - T_{Umg}) - \alpha U_{Sp} h_{Tk}(T_o - T_{Umg}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(c_W \rho_W A_{Sp} (H_{Sp} - h_{Tk}) T_u) &= c_W (-\dot{m}_K T_{u,K,RL} - \dot{m}_{SK} T_{u,SK,RL} + \dot{m}_{HK} T_{HK,RL}) - \\ &\quad - \alpha U_{Sp} (H_{Sp} - h_{Tk})(T_u - T_{Umg}). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die Ableitungen der jeweils linken Seite von Gleichung (4.47) und (4.48) werden unter Anwendung der Produktregel mit

$$\frac{d}{dt}(c_W \rho_W A_{Sp} h_{Tk} T_o) = c_W \rho_W A_{Sp} \dot{h}_{Tk} T_o + c_W \rho_W A_{Sp} h_{Tk} \dot{T}_o \quad (4.49)$$

und

$$\frac{d}{dt}(c_W \rho_W A_{Sp} (H_{Sp} - h_{Tk}) T_u) = c_W \rho_W A_{Sp} H_{Sp} \dot{T}_u - c_W \rho_W A_{Sp} \dot{h}_{Tk} T_u - c_W \rho_W A_{Sp} h_{Tk} \dot{T}_u \quad (4.50)$$

berechnet. Die zeitabhängige Änderung der Höhe der Thermokline \dot{h}_{Tk} ist nur von den zu- und abfließenden Massenströmen abhängig und wird durch die Gleichung

$$\rho_W A_{Sp} \dot{h}_{Tk} = \dot{m}_K + \dot{m}_{SK} - \dot{m}_{HK} \quad (4.51)$$

beschrieben.

Würde man die Modellbildung an dieser Stelle beenden, dann hätte man mit den Gleichungen (4.47), (4.48) und (4.51) bereits ein funktionsfähiges, wenn auch ungenaues, Modell für die Prädiktion vom Zustand des Pufferspeichers. Die zeitliche Aufweitung der Thermokline wurde hier jedoch zum Beispiel noch nicht berücksichtigt und soll deshalb Thema des nächsten Abschnitts sein.

4.3.2 Modellierung der Thermokline

Im vorigen Abschnitt wurde das Modell des Pufferspeichers mit 2 Bereichen konstanter Temperatur und einer idealen Trennlinie zwischen diesen beiden Regionen angesetzt (siehe Abbildung 4.12). Durch die eingangs beschriebenen Effekte an der Grenzfläche der beiden Schichten kommt es zur Aufweitung des Temperaturübergangs (siehe Abbildung 4.11). Für eine einfache mathematische Beschreibung dieses komplexen physikalischen Vorgangs wird zunächst in Abbildung 4.14 mit δ_{Tk} in m ein Maß für die Aufweitung eingeführt.

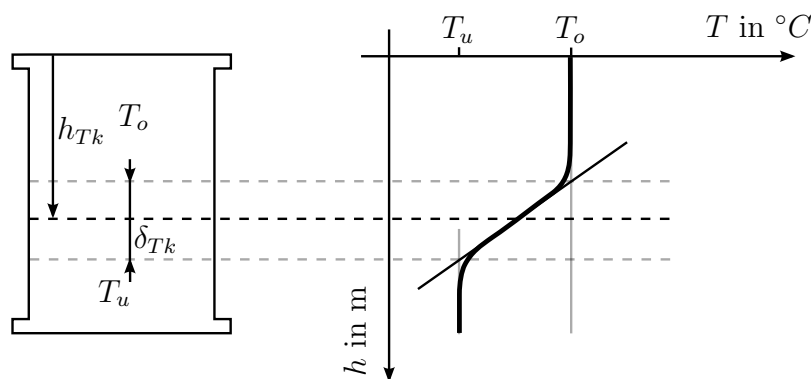


Abbildung 4.14: Aufweitung der Thermokline mit zugehörigem Temperaturprofil und Tangente im Wendepunkt.

Berechnet man eine Tangente für den Wendepunkt des Temperaturprofils und ermittelt deren Schnittpunkt mit der oberen T_o und unteren Temperatur T_u , so lässt sich daraus die Aufweitung δ_{Tk} bestimmen. Nach der geometrischen Definition kann nun die Dynamik von δ_{Tk} modelliert werden. Aus Gleichung (4.39) ist bekannt, dass sich das Übergangsgebiet zwischen beiden Regionen in etwa mit

$$\delta_{Tk} \sim \sqrt{t} \quad \text{mit} \quad [t] = \text{s} \quad (4.52)$$

ausbreitet, weshalb

$$\delta_{Tk} = c\sqrt{t} \quad \text{mit} \quad [c] = \frac{\text{m}}{\sqrt{\text{s}}} \quad (4.53)$$

geschrieben werden kann. Leitet man diesen Ausdruck nach der Zeit ab, so erhält man mit Gleichung (4.53) die Differentialgleichung

$$\dot{\delta}_{Tk} = \frac{c}{2} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{c^2}{2} \frac{1}{c\sqrt{t}} = \frac{c^2}{2} \frac{1}{\delta_{Tk}} = \frac{\tilde{c}}{\delta_{Tk}}. \quad (4.54)$$

Vergleiche mit bewährten, komplexeren Modellen zur Beschreibung des Pufferspeichers [15] haben gezeigt, dass dieser einfache Zusammenhang die Aufweitung der Thermokline über Zeiträume von mehreren Tagen hinreichend genau beschreibt. Die Simulationsergebnisse in Abbildung 4.15 zeigen die Gegenüberstellung der Ergebnisse eines Abkühlversuchs welcher jeweils mit dem komplexen Pufferspeichermodell aus [15] und dem in dieser Arbeit entwickelten Prädiktionsmodell durchgeführt wurde. Für die dargestellten Simulationsergebnisse wurden die Modelle mit den Daten aus Tabelle 6.1 und 6.4 parametrisiert.

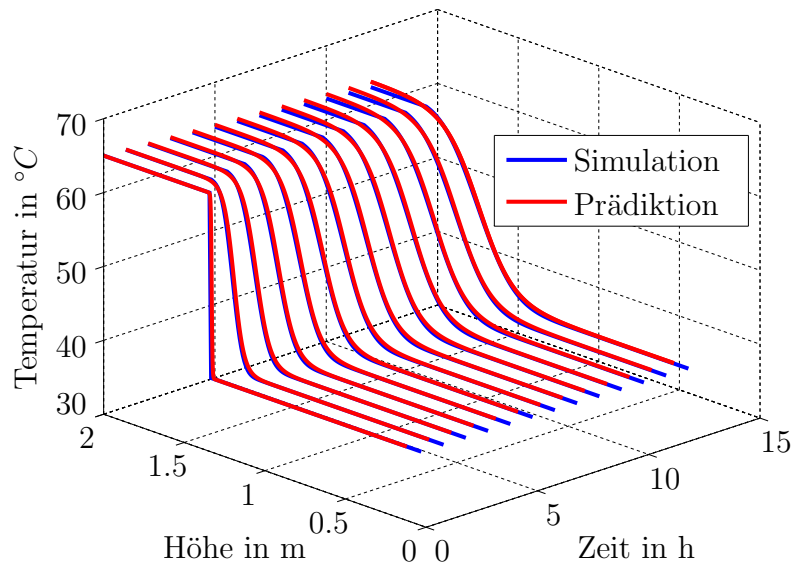


Abbildung 4.15: Vergleich des Abkühlvorganges bei komplexem Simulationsmodell und in dieser Arbeit entwickelten Prädiktionsmodell.

Wird der Pufferspeicher durch das Verhältnis der be- und entladenden Massenströme komplett beladen ($h_{Tk} \rightarrow H_{Sp}$) oder entladen ($h_{Tk} \rightarrow 0$), so wird zwangsläufig auch Wasser aus der Grenzregion $h = h_{Tk} \pm \delta_{Tk}$ entnommen. Die Modellierung der auftretenden Effekte bei der Entnahme von Wasser aus dieser Grenzregion stellt die größte Herausforderung bei diesem Modell dar. Simulationsstudien mit dem Speichermodell aus [15] zeigten, dass die Wasserentnahme im Bereich $h = h_{Tk} \pm \delta_{Tk}$ näherungsweise mit einer Verkleinerung von δ_{Tk} beschrieben werden kann. Die Änderung $\dot{\delta}_{Tk}$ muss also durch einen multiplikativen Teil F zu Gleichung (4.54)

$$\dot{\delta}_{Tk} = \frac{\tilde{c}}{\delta_{Tk}} F \quad (4.55)$$

so erweitert werden, dass δ_{Tk} kleiner wird, wenn sich das Grenzgebiet am oberen oder unteren Rand des Pufferspeichers befindet. Als erster Ansatz kann für eine derartige Erweiterung zum Beispiel $F := d(h_{Tk}, \delta_{Tk})$ mit

$$\dot{\delta}_{Tk} \sim \left(h_{Tk} - \frac{\delta_{Tk}}{2} \right) \left(H_{Sp} - h_{Tk} - \frac{\delta_{Tk}}{2} \right) =: d(h_{Tk}, \delta_{Tk}) \quad (4.56)$$

verwendet werden. Für die Änderung der Grenzregion bedeutet das somit

$$\dot{\delta}_{Tk} \leq 0 \quad \forall \left(h_{Tk} \leq \frac{\delta_{Tk}}{2} \right) \vee \left(H_{Sp} - h_{Tk} \leq \frac{\delta_{Tk}}{2} \right), \quad (4.57)$$

während ansonsten

$$\dot{\delta}_{Tk} > 0 \quad (4.58)$$

gilt. Eine Erweiterung mit dem Ansatz aus Gleichung (4.56) hat jedoch den Nachteil, dass sich die Proportionalität immer in Abhängigkeit der aktuellen Ladehöhe ändert. Im realen Pufferspeicher bleibt die Aufweitung der Thermokline jedoch solange nahezu unverändert, bis die Grenzregion den oberen bzw. unteren Rand erreicht. Es muss also eine Funktion $f(d(h_{Tk}, \delta_{Tk}))$ gefunden werden, die für $d(h_{Tk}, \delta_{Tk}) > 0$ einen (nahezu konstanten!) positiven Wert liefert und bei $d(h_{Tk}, \delta_{Tk}) \leq 0$ negativ ist. Für diesen Zweck bietet sich

$$f(x) = 1 - e^{-ax} \quad (4.59)$$

mit dem noch zu wählenden Parameter a an (siehe Abbildung 4.16).

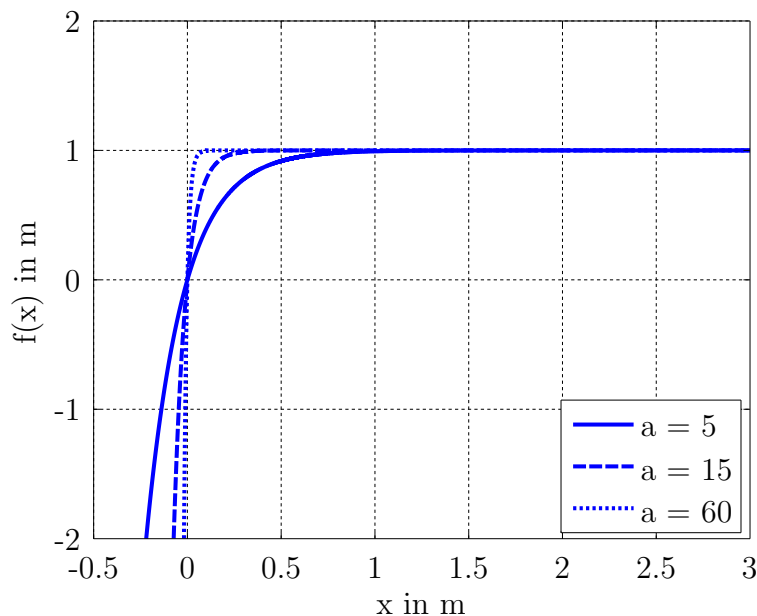


Abbildung 4.16: Funktion zur Normierung der Thermokline.

Setzt man jetzt für die Erweiterung $F := f(d(h_{Tk}, \delta_{Tk}))$ mit

$$\dot{\delta}_{Tk} \sim f(d(h_{Tk}, \delta_{Tk})) = -\exp\left(-a \underbrace{\left(h_{Tk} - \frac{\delta_{Tk}}{2}\right) \left(H_{Sp} - h_{Tk} - \frac{\delta_{Tk}}{2}\right)}_{=d(h_{Tk}, \delta_{Tk})}\right) + 1 \quad (4.60)$$

an, so kann diese an der Stelle

$$h_{Tk} = \frac{H_{Sp}}{2} \quad \text{mit} \quad \delta_{Tk} \approx 0 \quad (4.61)$$

normiert werden. Eine Normierung mit den Bedingungen aus Gleichung (4.61) und der Proportionalität aus Gleichung (4.60) hat zur Folge, dass sich die Thermokline bei einer mittleren Ladehöhe des Pufferspeichers gemäß Gleichung (4.54) aufweitet. Die Funktion $f(d(h_{Tk}, \delta_{Tk}))$ bewirkt eine Stauchung derselben bei vollständig beladenem bzw. entladene Speicher.

Aus dem Ansatz zur Normierung

$$\frac{1}{N} f(d(h_{Tk}, \delta_{Tk})) \stackrel{!}{=} 1 \quad (4.62)$$

erhält man durch Einsetzen von $h_{Tk} = \frac{H_{Sp}}{2}$ und $\delta_{Tk} = 0$ den Normierungs-Faktor

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{-\exp\left(-a \frac{H_{Sp}^2}{4}\right) + 1}. \quad (4.63)$$

Die normierte Differentialgleichung für die Aufweitung der Thermokline lautet somit

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{Tk} &= \frac{\tilde{c}}{\delta_{Tk}} \frac{1}{N} f(d(h_{Tk}, \delta_{Tk})) = \\ &= \frac{\tilde{c}}{\delta_{Tk}} \frac{1}{1 - \exp\left(-a \frac{H_{Sp}^2}{4}\right)} \left(-\exp\left(-a \left(h_{Tk} - \frac{\delta_{Tk}}{2}\right) \left(H_{Sp} - h_{Tk} - \frac{\delta_{Tk}}{2}\right)\right) + 1\right). \end{aligned} \quad (4.64)$$

4.3.3 Zusammenfassung der Teilsysteme

Die in Abschnitt 4.3.2 beschriebene Aufweitung der Grenzfläche zwischen oberen und unteren Temperaturbereich beeinflusst unter Umständen auch die Temperatur des entnommenen Wassers. Während bei der Entwicklung des Modells in Abschnitt 4.3.1 davon ausgegangen wird, dass die entnommenen Temperaturen ($T_{u,K,RL}$, $T_{u,SK,RL}$ und $T_{o,HK,VL}$) immer das Niveau des jeweiligen Bereichs haben, sollen diese jetzt dem wahren Temperaturprofil im Pufferspeicher angepasst werden. Dazu muss zunächst eine Funktion gefunden werden, die den Verlauf der Temperatur im Pufferspeicher beschreibt. Der physikalisch und

mathematisch korrekte Temperaturverlauf ergibt sich aus Gleichung (4.37). Das Integral über die Fundamentallösung würde als Ergebnis die Gaußsche Fehlerfunktion der Form

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau \quad (4.65)$$

liefern. Als Ersatz für diese relativ komplizierte Funktion erweist sich der Tangens Hyperbolicus aufgrund seiner Form und Grenzwerte als besonders geeignet. Durch eine geschickte Skalierung dieser Hyperbelfunktion erhält man mit

$$T_{Sp}(h, \dots) = \underbrace{\frac{T_o + T_u}{2}}_{=:a} - \underbrace{\frac{T_o - T_u}{2}}_{=:b} \tanh(s(h - h_{Tk})) \quad (4.66)$$

ein gutes Profil der Temperatur im Pufferspeicher $T_{Sp}(h, \dots)$. Der Parameter s in $1/m$ beschreibt maßgeblich die Form dieses Temperaturprofils und die Steigung k_{Tk} im Wendepunkt kann mit

$$k_{Tk} \Big|_{h=h_{Tk}} = \frac{dT_{Sp}(h, \cdot)}{dh} \Big|_{h=h_{Tk}} = -bs (1 - \tanh^2(s(h - h_{Tk}))) \Big|_{h=h_{Tk}} = -bs \quad (4.67)$$

berechnet werden. Mit der Aufweitung der Thermokline δ_{Tk} aus Abschnitt 4.3.2 kann für die Steigung auch

$$k_{Tk} = \frac{T_o - T_u}{\delta_{Tk}} \quad (4.68)$$

geschrieben werden. Der Parameter s in Gleichung (4.66) steht also in direktem Zusammenhang mit δ_{Tk} :

$$s = -\frac{2}{\delta_{Tk}}. \quad (4.69)$$

Nach einigen Umformungen der Gleichungen (4.47), (4.48), (4.51) und (4.65) erhält man für das Prädiktionsmodell des Pufferspeichers die vier Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{dT_o}{dt} &= -\frac{1}{\rho_W A_{Sp} h_{Tk}} (\dot{m}_K + \dot{m}_{SK} - \dot{m}_{HK}) T_o + \\
&+ \frac{1}{\rho_W A_{Sp} h_{Tk}} (\dot{m}_K T_{K,VL} + \dot{m}_{SK} T_{SK,VL} - \dot{m}_{HK} T_{o,HK,VL}) - \\
&- \frac{1}{c_W \rho_W A_{Sp} h_{Tk}} (\alpha A_{Sp} (T_o - T_{Umg}) - \alpha U_{Sp} h_{Tk} (T_o - T_{Umg})) \\
\frac{dT_u}{dt} &= -\frac{1}{\rho_W A_{Sp} (H_{Sp} - h_{Tk})} (\dot{m}_K + \dot{m}_{SK} - \dot{m}_{HK}) T_u + \\
&+ \frac{1}{\rho_W A_{Sp} (H_{Sp} - h_{Tk})} (-\dot{m}_K T_{u,K,RL} - \dot{m}_{SK} T_{u,SK,RL} + \dot{m}_{HK} T_{HK,RL}) - \\
&- \frac{U_{Sp} \alpha}{c_W \rho_W A_{Sp}} (T_u - T_{Umg}) \\
\frac{dh_{Tk}}{dt} &= \frac{1}{\rho_W A_{Sp}} (\dot{m}_K + \dot{m}_{SK} - \dot{m}_{HK}) \tag{4.70} \\
\frac{d\delta_{Tk}}{dt} &= \frac{\tilde{c}}{\delta_{Tk}} \frac{1}{1 - \exp\left(-a \frac{H_{Sp}^2}{4}\right)} \left(-\exp\left(-a \left(h_{Tk} - \frac{\delta_{Tk}}{2}\right) \left(H_{Sp} - h_{Tk} - \frac{\delta_{Tk}}{2}\right)\right) + 1 \right)
\end{aligned}$$

mit den Entnahmetemperaturen

$$\begin{aligned}
T_{o,HK,VL} &= \frac{T_o + T_u}{2} - \frac{T_o - T_u}{2} \tanh(-2\delta_{Tk} (h_{HK,VL} - h_{Tk})) \\
T_{u,K,RL} &= \frac{T_o + T_u}{2} - \frac{T_o - T_u}{2} \tanh(-2\delta_{Tk} (h_{K,RL} - h_{Tk})) \\
T_{u,SK,RL} &= \frac{T_o + T_u}{2} - \frac{T_o - T_u}{2} \tanh(-2\delta_{Tk} (h_{SK,RL} - h_{Tk})). \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Durch die Einführung der Aufweitung der Thermokline in Abschnitt 4.3.2 ist es jetzt möglich, die Entnahmehöhen über $h_{HK,VL}$, $h_{K,RL}$ und $h_{SK,RL}$ in m, individuell anzupassen.

4.4 Modellierung der Solarkollektoren

Um eine Basis für die Entwicklung des Prädiktionsmodells von Solarkollektoren zu schaffen, wird im Folgenden zunächst grundsätzlich deren Technik erläutert. Abbildung 4.17 zeigt einen Schnitt durch den schematischen Aufbau eines Solarkollektors.

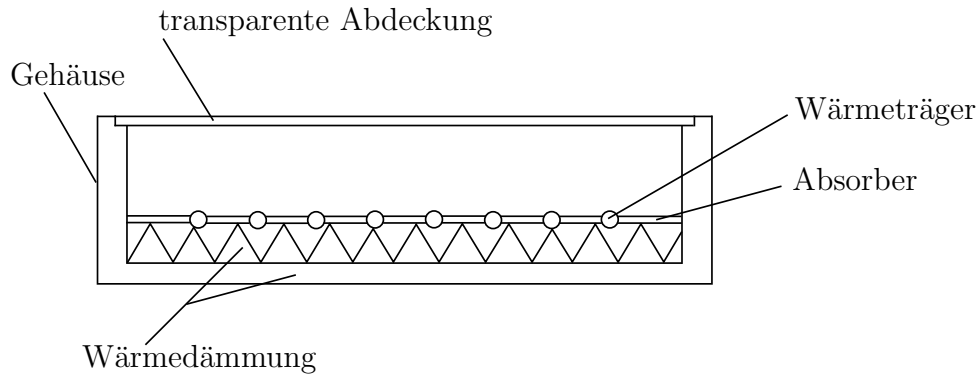


Abbildung 4.17: Aufbau eines Solarkollektors.

Sonnenstrahlen durchdringen eine transparente Abdeckung (z.B.: Glasplatte) und treffen danach auf einen Absorber. Dieser absorbiert einen großen Teil der einfallenden Strahlung und erwärmt sich. Die dadurch entstehende Wärme wird dann auf einen Wärmeträger übertragen, wofür meist in den Absorber integrierte Rohre dienen. Um Beschädigungen durch Frost, bei tiefen Aussentemperaturen, vorzubeugen wird dem Wasser in diesen Rohren ein Frostschutzmittel zum Herabsenken des Gefrierpunkts beigemischt. Aus diesem Grund ist auch die Trennung des Solarkreises vom restlichen Wärmenetz durch einen Wärmeübertrager erforderlich. Um Verluste an die Umgebung gering zu halten, ist eine allseitige Wärmedämmung des Absorbers notwendig. Die transparente Abdeckung verhindert Verluste nach oben (Glashauseffekt), während der Absorber nach unten durch Dämmmaterial isoliert ist. Bei modernen Vakuumröhrenkollektoren erreicht man diese allseitige Wärmeisolierung durch Glasröhren, die von einem Vakuum umschlossen sind.

Um eine, vom Sonnenstand abhängige, Prädiktion des solaren Eintrags in das Gesamtsystem zu erhalten, wird im Abschnitt 4.4.1 zunächst ein Modell für die effektive Sonneneinstrahlung auf die Solarkollektoren erstellt. Im Abschnitt 4.4.2 werden dann die Solarkollektoren mathematisch modelliert. Die Definition aller in den folgenden Abschnitten eingeführten Parameter erfolgt in Abschnitt 6.2.2.

4.4.1 Modellierung der effektiven Sonneneinstrahlung

Ausgangspunkt für die Modellierung der Sonneneinstrahlung ist die Solarkonstante mit $I_0 = 1387 \text{ W/m}^2$. Diese beschreibt die gemittelte, extraterrestrische solare Strahlungsleistung. Bis zum Auftreffen der Strahlung auf die Erdoberfläche wird diese in der Atmosphäre durch verschiedene Effekte abgeschwächt. In Abbildung 4.18 sind diese Effekte schematisch dargestellt.

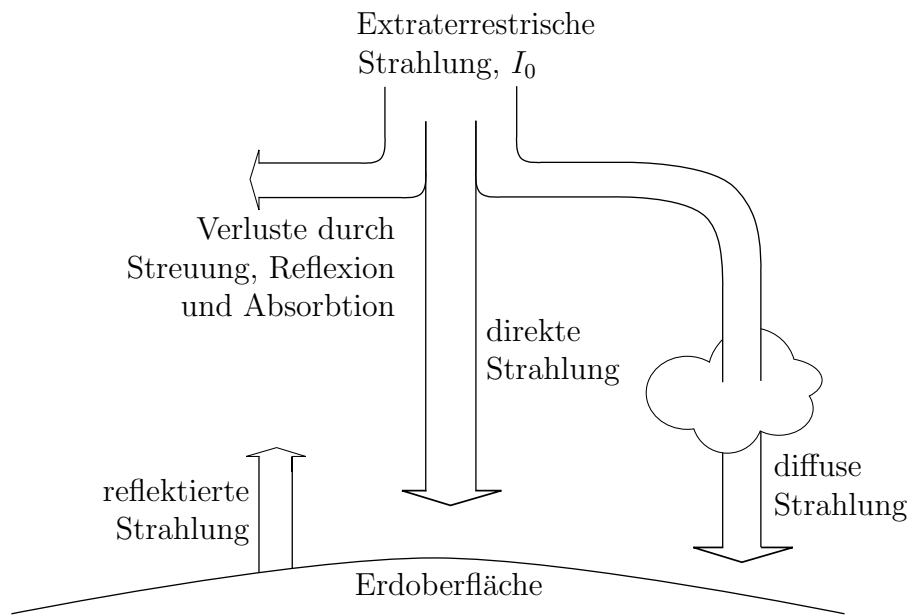


Abbildung 4.18: Streuung und Reflexion der extraterrestrischen Strahlung in der Atmosphäre und an der Erdoberfläche.

Auf der Erdoberfläche wird zwischen direkter, reflektierter und diffuser Strahlung unterschieden. Die *direkte Strahlung* ist jener Teil des Sonnenlichts, der ungehindert durch die Atmosphäre gelangt. Je nach Grad der Bewölkung wird ein Teil der einfallenden Strahlung in der Atmosphäre gestreut. Dieser Anteil heißt *diffuse Strahlung*. Abhängig vom Standort der Solaranlage kommt ein weiterer Teil der einfallenden Strahlung durch Reflexionen in der Umgebung zustande, welcher als *reflektierte Strahlung* bezeichnet wird. Die unterschiedlichen Einfallswinkel dieser drei Strahlungsarten sind bei der Modellierung der Sonneneinstrahlung unbedingt zu berücksichtigen. Da Klimadaten meistens die zeitlich gemittelte Strahlung auf eine horizontale Ebene abbilden, muss dann auf jenen Strahlungsanteil umgerechnet werden, der auf die Solarkollektoren trifft. Abbildung 4.19 zeigt das Blockschaltbild für das Modell der Sonneneinstrahlung.

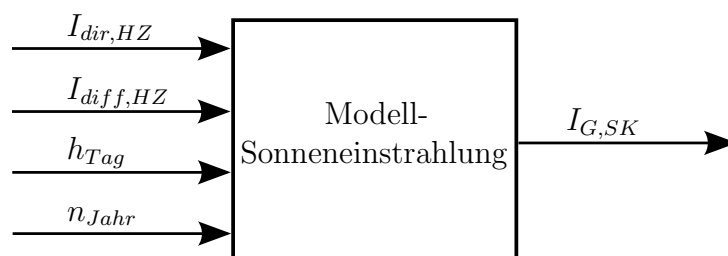


Abbildung 4.19: Blockschaltbild vom Modell der Sonneneinstrahlung mit seinen Ein- und Ausgängen.

Eingänge des Modells sind die direkte Strahlung auf eine horizontale Ebene $I_{dir,HZ}$ in W/m^2 , die diffuse Strahlung auf eine horizontale Ebene $I_{diff,HZ}$ in W/m^2 sowie die dimensionslosen Größen aktuelle Stunde des Tages $h_{Tag} \in [1, 2, \dots, 24]$ und aktueller Tag des Jahres

$n_{Jahr} \in [1, 2, \dots, 365]$. Der Ausgang liefert dann die Gesamtstrahlung $I_{G,SK}$ in W/m^2 auf die geneigte Kollektorfläche. Die nachfolgenden Formeln und Modellierungsansätze für die effektive Sonneneinstrahlung auf Solarkollektoren stammen aus [7].

Um die *direkte Strahlung* zu berechnen ist es zunächst notwendig, deren Einfallswinkel Θ in $^\circ$ zu bestimmen. Dieser ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \sin \delta \sin \varphi \cos \beta - \sin \delta \cos \varphi \sin \beta \cos \gamma + \\ &\quad + \cos \delta \cos \varphi \cos \beta \cos \omega + \cos \delta \sin \varphi \sin \beta \cos \gamma \cos \omega + \\ &\quad + \cos \delta \sin \beta \sin \gamma \sin \omega \end{aligned} \quad (4.72)$$

und ist somit definiert durch den Winkel zwischen Äquatorebene und Sonne bei Sonnenhöchststand δ in $^\circ$ (Deklination), die geographische Breite am Standort der Anlage φ in $^\circ$, die Neigung der Ebene β in $^\circ$, die Winkelabweichung der Fläche von der Südrichtung γ in $^\circ$ und dem Stundenwinkel ω in $^\circ$.

Die Einstrahlung auf eine horizontale Fläche kann aus Gleichung (4.72) über

$$\beta = 0^\circ \Rightarrow \cos \Theta_Z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \omega \quad (4.73)$$

mit dem Zenitwinkel Θ_Z in $^\circ$ berechnet werden. Dieser beschreibt den Einfallswinkel der direkten Strahlen auf eine horizontale Ebene auf der Erdoberfläche.

Für den Stundenwinkel ω und die Deklination δ kann näherungsweise

$$\omega = 180^\circ - h_{Tag} 15^\circ \quad (4.74)$$

mit der dimensionslosen Stundenzahl h_{Tag} und

$$\delta = 23,45^\circ \sin \left(360 \frac{284 + n_{Jahr}}{365} \right) \quad (4.75)$$

mit der ebenfalls dimensionslosen Tagzahl n_{Jahr} geschrieben werden. Mit den beiden Gleichungen (4.72) und (4.73) kann der dimensionslose Umrechnungsfaktor

$$R_{dir} = \frac{\cos \Theta}{\cos \Theta_Z} \quad (4.76)$$

festgelegt werden. Multipliziert man diesen mit der direkten Strahlung auf eine horizontale Ebene $I_{dir,HZ}$, so erhält man die direkte Einstrahlung auf den geneigten Solarkollektor $I_{dir,SK}$ in W/m^2 :

$$I_{dir,SK} = I_{dir,HZ} R_{dir} = I_{dir,HZ} \frac{\cos \Theta}{\cos \Theta_Z}. \quad (4.77)$$

Als nächstes soll der Beitrag der *diffusen Strahlung* bestimmt werden. Diese Strahlungsart entsteht durch die Streuung des Sonnenlichts in der Atmosphäre und trifft deshalb aus verschiedenen Richtungen auf die Erdoberfläche auf, der Hauptteil der Strahlungsleistung kommt jedoch aus der Richtung der Sonne. Daraus folgt, dass bei waagrechten Kollektoren ($\beta = 0^\circ$) nahezu die gesamte *diffuse Strahlung* absorbiert wird, während bei senkrechten

Kollektoren ($\beta = 90^\circ$) nur etwa die Hälfte dieser Strahlung absorbiert werden kann.

Die *reflektierte Strahlung* entsteht durch Reflexionen von direkter und diffuser Strahlung an der Umgebung (Häuser, Bäume, Schnee, usw. ...). Dieser Teil der Strahlung weist die größte Standortabhängigkeit auf. Für die Neigungsabhängige Gewichtung wird angenommen, dass bei waagrechten Kollektoren ($\beta = 0^\circ$) keine *reflektierte Strahlung* und bei senkrechten Kollektoren ($\beta = 90^\circ$) etwa die Hälfte absorbiert wird.

Die Gesamtstrahlung die auf den Solarkollektor auftrifft $I_{G,SK}$ in W/m^2 setzt sich aus allen drei beschriebenen Strahlungsarten zusammen:

$$I_{G,SK} = I_{dir,HZ}R_{dir} + I_{diff,HZ}\frac{1 + \cos\beta}{2} + (I_{dir,HZ} + I_{diff,HZ})\frac{1 - \cos\beta}{2}re. \quad (4.78)$$

Dabei beschreibt der dimensionslose Reflexionskoeffizient re den Einfluss der Umgebung auf die Intensität der reflektierten Strahlung.

4.4.2 Modellierung der Solarkollektoren

Für die Modellierung der Solarkollektoren wird zunächst, gemäß Abbildung 4.20, die Energiebilanz des Kollektors mit seinen Verlusten aufgestellt.

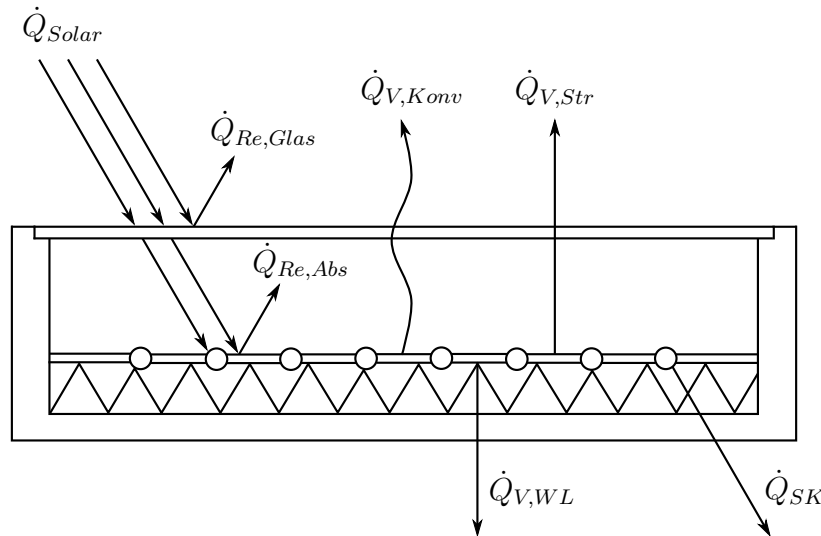


Abbildung 4.20: Zu- und abfließende Leistungen eines Solarkollektors.

Die Verluste bestehen aus den an Glas und Absorber reflektierten Strahlungsanteilen $\dot{Q}_{Re,Glas}$ bzw. $\dot{Q}_{Re,Abs}$ in J/s , der konvektiven Wärmeabgabe und langwelligen Abstrahlung des Absorbermaterials $\dot{Q}_{V,Konv}$ und $\dot{Q}_{V,Str}$ in J/s sowie den Verlusten durch die Wärmeleitfähigkeit der Isolierung und des Gehäuses $\dot{Q}_{V,WL}$ in J/s . Die Größe \dot{Q}_{SK} in J/s beschreibt den von den Solarkollektoren an den Hydraulikkreis abgegebenen Wärmestrom. Die solare Einstrahlung aus Gleichung (4.78) trägt mit

$$\dot{Q}_{Solar} = I_{G,SK}A_{SK} \quad (4.79)$$

zur Energiebilanz bei, wobei A_{SK} in m^2 die Absorberfläche der Solarkollektoren ist. Als Gleichung kann die Energiebilanz mit

$$\dot{Q}_{SK} = \dot{Q}_{Solar} - \dot{Q}_{Re,Glas} - \dot{Q}_{Re,Abs} - \dot{Q}_{V,Konv} - \dot{Q}_{V,Str} - \dot{Q}_{V,WL} \quad (4.80)$$

angeschrieben werden. Der Wirkungsgrad von Solarkollektoren ist über das Verhältnis von auf den Wärmeübertrager übertragenen Wärmestrom \dot{Q}_{SK} und auf den Kollektor eintreffender Solarstrahlung \dot{Q}_{Solar}

$$\mu_{SK} = \frac{\dot{Q}_{SK}}{\dot{Q}_{Solar}} = \frac{\dot{Q}_{SK}}{I_{G,SK} A_{SK}} \quad (4.81)$$

definiert. Dessen Abhängigkeit von Betriebsbedingungen und Umgebungseinflüssen kann man auch mit der in der Fachliteratur gängigen Formel

$$\mu_{SK} = k_0(\Theta) - k_1 \frac{\bar{T}_{Abs} - T_a}{I_{G,SK}} - k_2 \frac{(\bar{T}_{Abs} - T_a)^2}{I_{G,SK}} \quad (4.82)$$

beschreiben. Dieses Wirkungsgradmodell enthält den dimensionslosen Konversionsfaktor des Kollektors $k_0(\Theta)$ (optischer Wirkungsgrad), den Wärmeverlustkoeffizienten k_1 in $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$, die mittlere Temperatur der Flüssigkeit im Absorber \bar{T}_{Abs} in $^\circ\text{C}$, die Aussentemperatur T_a in $^\circ\text{C}$ und die Strahlungsleistung $I_{G,SK}$ in W/m^2 . Der Koeffizient k_2 in $\text{W}/\text{m}^2\text{K}^2$ repräsentiert den temperaturabhängigen Wärmeverlustkoeffizienten und bewirkt eine Annäherung des Wirkungsgrades an die realen Strahlungsverluste. Die Parameter $k_0(\Theta)$, k_1 und k_2 sind in der Regel in den Datenblättern der Solarkollektoren angegeben.

Der optische Wirkungsgrad

$$k_0(\Theta) = \tau_{Abd} f_{Konv}(\Theta) \alpha_{Abs}, \quad (4.83)$$

errechnet sich aus dem vom Einfallswinkel der Strahlung abhängigen Winkelfaktor $f_{Konv}(\Theta)$, dem Transmissionskoeffizienten der Glasabdeckung τ_{Abd} und dem Absorptionsgrad des Absorbermaterials α_{Abs} . In Datenblättern ist meist der Winkelfaktor an der Stelle $f_{Konv}(50^\circ)$ gegeben. Näherungsweise können mittels $f_{Konv}(0^\circ) = 1$ bzw. $f_{Konv}(50^\circ)$ und linearer Interpolation die Winkelfaktoren für alle $\Theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ berechnet werden.

Der Solarkreis (siehe Abbildung 4.3) soll, wie der Kesselkreis mit der Biomasse-Feuerung, so geregelt werden, dass seine Vorlauftemperatur $T_{SK,VL}$ in $^\circ\text{C}$, mit dem Massenstrom \dot{m}_{SK} in kg/s als Stellgröße, auch bei geringer solarer Einstrahlung konstant gehalten wird. Das hier entwickelte Prädiktionsmodell berücksichtigt die Dynamik dieser untergeordneten Regelung nicht und man kann somit für den vom Solarkollektor übertragenen Wärmestrom

$$\dot{Q}_{SK} = c_W \dot{m}_{SK} (T_{SK,VL} - T_{SK,RL}) \quad (4.84)$$

schreiben. Durch Zusammenfassen der Gleichungen (4.80), (4.81) und (4.84) kann bei gegebener Vorlauftemperatur $T_{SK,VL}$ für den Massenstrom \dot{m}_{SK} die Beziehung

$$\dot{m}_{SK} = \frac{I_{G,SK} A_{SK}}{c_W (T_{SK,VL} - T_{SK,RL})} \left(k_0 - k_1 \frac{\bar{T}_{Abs} - T_a}{I_{G,SK}} - k_2 \frac{(\bar{T}_{Abs} - T_a)^2}{I_{G,SK}} \right) \quad (4.85)$$

angeschrieben werden, wobei sich die mittlere Temperatur der Flüssigkeit im Absorber \bar{T}_{Abs} in °C näherungsweise über

$$\bar{T}_{Abs} = \frac{T_{SK,RL} - T_{SK,VL}}{2} \quad (4.86)$$

berechnen lässt. Mit Gleichung (4.78) aus Abschnitt 4.4.1 und Gleichung (4.85) hat man nun ein relativ einfaches, quasistationäres Modell für die Prädiktion des Solarkreismassenstroms \dot{m}_{SK} in kg/s. Auf eine Zusammenfassung der Teilsysteme „Sonneneinstrahlung“ und „Solarkollektoren“ wird hier bewusst verzichtet, da die beiden Funktionen in den Gleichungen (4.78) und (4.85) bereits direkt für eine Prädiktion verwendet werden können.

4.5 Zusammenfassung

Nach einer einführenden Beschreibung des Aufbaus und der Funktionsweise des Gesamtsystems wurde in diesem Kapitel ein dreiteiliges Prädiktionsmodell einer gesamten Wärmeversorgungsanlage entwickelt. Das Resultat ist eine Kombination aus Hybridmodell (Biomassefeuerung), nichtlinearem Modell (Pufferspeicher) und statischem Modell (Solarkollektoren). Die Differentialgleichungen basieren auf den insgesamt 7 Zustandsgrößen

- $x_1 \dots$ Masse von Brennstoff in der Biomasse-Feuerung,
- $x_2 \dots$ gespeicherte Wärme im Stahl und Schamott der Biomasse-Feuerung,
- $x_3 \dots$ gespeicherte Wärme im Wasser des Wärmeübertragers der Biomasse-Feuerung,
- $x_4 \dots$ Temperatur der oberen Temperaturschicht im Pufferspeicher,
- $x_5 \dots$ Temperatur der unteren Temperaturschicht im Pufferspeicher,
- $x_6 \dots$ Höhe der Trennlinie zwischen den Schichten,
- $x_7 \dots$ Aufweitung der Grenzschicht

und können durch Zusammenfassen der Zustände zu

$$\mathbf{x}_{BMK} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \quad (4.87)$$

und

$$\mathbf{x}_{Puffer} = [x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7]^T \quad (4.88)$$

in einer allgemeinen Schreibweise mit

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_K}{dt} &= \mathbf{A}_\zeta \mathbf{x}_K + \mathbf{b}_\zeta u_K, & \zeta \in \{1, 2, 3\} \\ u_K &= Q_{K,Soll} \\ y_K &= \dot{Q}_{K,Ist} = \mathbf{c}_\zeta^T \mathbf{x}_K, & \zeta \in \{1, 2, 3\}\end{aligned}\tag{4.89}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_{Puffer}}{dt} &= \mathbf{f}_{Puffer}(t, \mathbf{x}_{Puffer}, \mathbf{u}_{Puffer}) \\ \mathbf{u}_{Puffer} &= [\dot{m}_K \quad T_{K,VL} \quad \dot{m}_{SK} \quad T_{SK,VL} \quad \dot{m}_{HK} \quad T_{HK,RL}]^T \\ \mathbf{y}_{Puffer} &= [T_{o,HK,VL} \quad T_{u,K,RL} \quad T_{u,SK,RL}]^T\end{aligned}\tag{4.90}$$

zusammengefasst werden. Die beiden Differentialgleichungssysteme in Gleichung (4.89) und (4.90) sind über den Massenstrom

$$\dot{m}_K = \frac{y_K}{c_W(T_{K,VL} - T_{u,K,RL})}\tag{4.91}$$

mit der durch die Basisregelung von Kesselkreispumpe und Rücklaufanhebung vorgegebenen Vorlauftemperatur $T_{K,VL} = T_{K,VL,Soll}$ miteinander gekoppelt. Der Massenstrom \dot{m}_{HK} des Heizkreises wird bei konstanter Rücklauftemperatur $T_{HK,RL}$ aus einem Lastprofil $\dot{Q}_{HK}(t)$ mittels

$$\dot{m}_{HK} = \frac{\dot{Q}_{HK}}{c_W(T_{o,HK,VL} - T_{HK,RL})}\tag{4.92}$$

berechnet und für den Massenstrom des Solarkollektors \dot{m}_{SK} gilt die Gleichung (4.85).

Kapitel 5

Reglerentwurf für eine Wärmeversorgungsanlage

Für die Regelung einer Wärmeversorgungsanlage mit Biomasse-Feuerung mittels NMPC wurden in den vorangegangenen Kapiteln zunächst die notwendigen Grundlagen zu dynamischen Hybridsystemen (Abschnitt 2.3), Optimalsteuerungen (Abschnitt 2.1) und NMPC (Abschnitt 2.2) besprochen. Nach einer Einführung in die Methodik von MIOCPs (Kapitel 3) wurde in Kapitel 4 ein Prädiktionsmodell für die in dieser Arbeit betrachtete Wärmeversorgungsanlage (Abbildung 1.1) entwickelt.

Darauf aufbauend soll nun in diesem Kapitel ein gemischt-ganzzahliger NMPC-Regler (MINMPC) entworfen werden. Die angestrebten Regelziele dieser Aufgabenstellung bestehen dabei aus:

- Einer Minimierung des Brennstoffverbrauchs und
- einer Minimierung der Ein-/ Ausschaltvorgänge der Biomasse-Feuerung.

Eine optimale Regelung der Anlage hinsichtlich dieser Forderungen würde zunächst den Jahresnutzungsgrad verbessern. Dieser beschreibt das Verhältnis von im Brennstoff (Hackgut) enthaltener Energie zur tatsächlich genutzten Wärmeenergie. Weiters würden die Schadstoffemissionen, welche insbesondere während der Ein-/ und Ausschaltvorgänge sehr hoch sind, reduziert werden.

5.1 Gütefunktional

Aus Sicht der betrachteten übergeordneten Systemregelung ist die einzige Stellgröße der Wärmeversorgungsanlage durch die Soll-Kesselleistung $\dot{Q}_{K,soll}(t - T_{tot})$ in W gegeben (siehe Gleichung (4.19)).

Die Totzeit des Brennstoffbetts T_{tot} in s soll beim Reglerentwurf nicht berücksichtigt werden. Im Vergleich zu den langen anderen Zeiten (z.B.: Start- und Stopvorgänge der Feuerung), ist diese Vereinfachung durchaus zulässig. Andernfalls kann T_{tot} zum Beispiel in der Dynamik des Anfahrvorganges berücksichtigt werden.

Der den zu minimierenden Brennstoffverbrauch repräsentierende Brennstoffmassenstrom ist gemäß Gleichung (4.4) direkt proportional zur Soll-Kesselleistung $\dot{Q}_{K,soll}$. Eine Minimierung des Brennstoffmassenstromes $\dot{m}_{CHO,Brst}$ kann demnach auch durch eine Minimierung von $\dot{Q}_{K,soll}$ erreicht werden. Für die Minimierung der Anzahl der Ein-/ und Ausschaltvorgänge der Biomasse-Feuerung wird der in Abschnitt 3.5 beschriebene Ansatz

$$\tilde{\sigma}_k^i = (2c_k^i - 1)(a_k^i + a_{k+1}^i - 1) + 1 \quad (5.1)$$

für eine schaltende Stellgröße ($i = 1$) gewählt. Für das zu minimierende Gütefunktional kann somit

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \dot{Q}_{K,Soll,i} + \sum_{j=0}^{N-1} S_j \tilde{\sigma}_j, \quad (5.2)$$

mit dem Prädiktionshorizont von $N \in \mathbb{N}$ Intervallen, geschrieben werden. Die Vektoren \mathbf{R} und \mathbf{S} sind zeitliche Gewichtungen und $\tilde{\sigma}_i$ gemäß Gleichung (5.1) die Anzahl der Ein- und Ausschaltvorgänge über alle N Intervalle.

5.2 Umschaltung der Systemmodi

Bei dem Modell der Wärmeversorgungsanlage aus Kapitel 4 handelt es sich um ein hybrides System mit einer Mischung aus autonomen und gesteuerten Umschaltungen. Die Schaltereignisse zwischen den Systemmodi ζ (Anfahren, Nennbetrieb und Auskühlen) werden also in Abhängigkeit der Systemzustände \mathbf{x} und der Stellgröße $\dot{Q}_{K,Soll}$ ausgelöst.

Bevor die Modellgleichungen für den Einsatz in einem NMPC-Algorithmus bearbeitet werden, soll der Definitionsbereich der Stellgröße in Erinnerung gerufen werden. Gemäß Kapitel 4 kann die Biomasse-Feuerung eine Leistung von 30% - 100% der Nennleistung liefern. Es kann also $\dot{Q}_{K,Min} := 0,3\dot{Q}_{K,Nenn}$ bzw. $\dot{Q}_{K,Max} := \dot{Q}_{K,Nenn}$ definiert werden. Mit der ausgeschalteten Feuerung ergibt sich demnach $\dot{Q}_{K,Soll} \in \{0, [0,3, 1]\}$ als Definitionsbereich für die Stellgröße.

Die Umschaltvorgänge zwischen den Systemmodi ζ im Prädiktionsmodell

$$\frac{d\mathbf{x}_K}{dt} = \mathbf{A}_\zeta \mathbf{x}_K + \mathbf{b}_\zeta u_K := \mathbf{f}_{K,\zeta}(\mathbf{x}_K, u_K), \quad \zeta \in \{1, 2, 3\} \quad (5.3)$$

$$y_K = \mathbf{c}_\zeta^T \mathbf{x}_K = \tilde{f}_{yK}(\mathbf{x}_K, u_K), \quad (5.4)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_{Puffer}}{dt} = \mathbf{f}_{Puffer}(\mathbf{x}_{Puffer}, \mathbf{u}_{Puffer}) \quad (5.5)$$

mit den Definitionsbereichen

$$B_1 = T_W \leq T_{Schwell} \quad \wedge \quad \dot{Q}_{K,Min} \leq \dot{Q}_{K,Soll}, \quad (5.6)$$

$$B_2 = T_W > T_{Schwell} \quad \wedge \quad \dot{Q}_{K,Min} \leq \dot{Q}_{K,Soll}, \quad (5.7)$$

$$B_3 = \dot{Q}_{K,Soll} < \dot{Q}_{K,Min} \quad (5.8)$$

aus Abschnitt 4.2.5 werden jetzt durch eine Glättung der rechten Seite des hybriden Modells der Biomasse-Feuerung $\mathbf{f}_{K,\zeta}(\mathbf{x}_K, \mathbf{u}_k)$ aus Gleichung (5.3) eliminiert. Hierzu werden in einem ersten Schritt die Bedingungen $B1$, $B2$ und $B3$ durch Schaltflächen, basierend auf der Übergangsfunktion

$$s(\varphi, \tau) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{\varphi}{\tau}\right)} \quad (5.9)$$

ersetzt. Abbildung 5.1 zeigt die Glättungsfunktion aus Gleichung (5.9) für verschiedene Werte des Glättungsparameters τ .

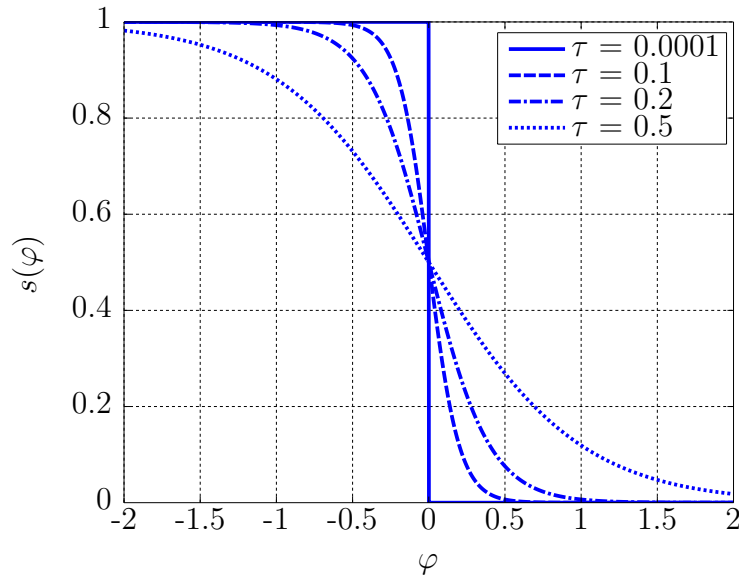


Abbildung 5.1: Eindimensionale Glättungsfunktion in Abhängigkeit einer Variable φ mit verschiedenen Werten für den Glättungsparameter τ .

Wie man sieht, hat diese Funktion ihren Wendepunkt genau an der Stelle $\varphi = 0$. Ersetzt man jetzt die Variable φ durch eine Schaltbedingung $\varphi(\mathbf{x}, u)$ in Abhängigkeit von Zustands- und Stellgrößen (vgl. Abbildung 3.1), so können die Definitionsbereiche in den Gleichungen (5.6) bis (5.8) durch die Glättungsfunktionen

$$\begin{aligned} B1 : \quad \varphi_{11}(\mathbf{x}, u) &= -T_W + T_{Schwell} \\ \varphi_{12}(\mathbf{x}, u) &= \dot{Q}_{K,soll} - \dot{Q}_{K,min} \\ s_1(\varphi_{11}(\mathbf{x}, u), \varphi_{12}(\mathbf{x}, u)) &= \underbrace{\frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{\varphi_{11}(\mathbf{x}, u)}{\tau_T}\right)}}_{s(\varphi_{11}(\mathbf{x}, u), \tau_T)} \underbrace{\frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{\varphi_{12}(\mathbf{x}, u)}{\tau_Q}\right)}}_{s(\varphi_{12}(\mathbf{x}, u), \tau_Q)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} B2 : \quad \varphi_{21}(\mathbf{x}, u) &= T_W - T_{Schwell} \\ \varphi_{22}(\mathbf{x}, u) &= \dot{Q}_{K,soll} - \dot{Q}_{K,min} \\ s_2(\varphi_{21}(\mathbf{x}, u), \varphi_{22}(\mathbf{x}, u)) &= s(\varphi_{21}(\mathbf{x}, u), \tau_T) s(\varphi_{22}(\mathbf{x}, u), \tau_Q) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} B3 : \quad \varphi_{31}(\mathbf{x}, u) &= -\dot{Q}_{K,soll} + \dot{Q}_{K,min} \\ s_3(\varphi_{31}(\mathbf{x}, u)) &= s(\varphi_{31}(\mathbf{x}, u), \tau_Q) \end{aligned} \quad (5.12)$$

mit den Glättungsparametern für die Temperatur τ_T und die Leistung τ_Q ersetzt werden. Die Umschaltung zwischen den Systemmodi erfolgt also in Abhängigkeit von der vorgegebenen Soll-Kesselleistung $\dot{Q}_{K,soll}$ sowie der aktuellen Temperatur des Wassers im Wärmeübertrager der Biomasse-Feuerung T_W . Die Berechnung dieser Temperatur aus der Energie im Wasser des Wärmeübertragers Q_W erfolgt durch den Zusammenhang

$$x_3 = Q_W = m_W c_W (T_W - T_{Um}) \quad (5.13)$$

mit der Masse des Wassers m_W in kg . In Abbildung 5.2 werden die zweidimensionalen Glättungsfunktionen zu den Gleichungen (5.10), (5.11) und (5.12) dargestellt.

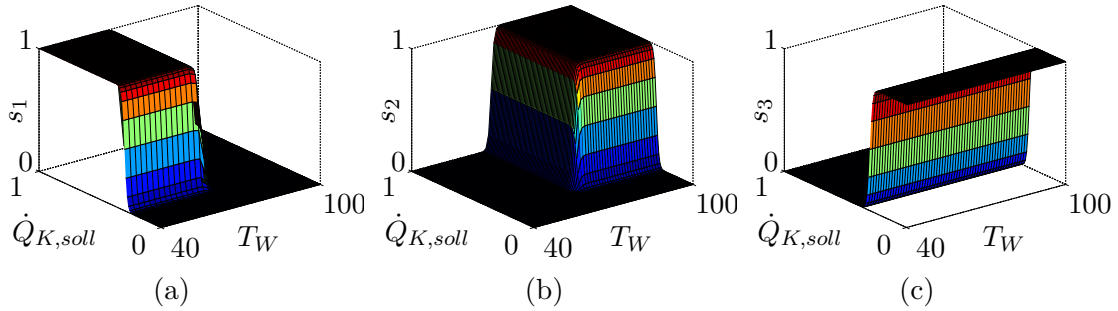


Abbildung 5.2: Glättungsfunktionen für die Schaltbedingungen $B1$ (a), $B2$ (b) und $B3$ (c) mit den Glättungsparametern $\tau_T = 0,53$ und $\tau_Q = 0,01$ sowie dem Schwellwert $T_{Schw} = 70^\circ C$.

Mit diesen Funktionen erhält man somit für die geglättete Version von Gleichung (5.3) die kontinuierliche (geglättete) Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_K}{dt} &\approx \mathbf{f}_{K,1}(\mathbf{x}_K, u_K) s_1(\varphi_{11}, \varphi_{12}) + \mathbf{f}_{K,2}(\mathbf{x}_K, u_K) s_2(\varphi_{21}, \varphi_{22}) \\ &+ \mathbf{f}_{K,3}(\mathbf{x}_K, u_K) s_3(\varphi_{31}) =: \tilde{\mathbf{f}}_K(\mathbf{x}_K, u_K) \end{aligned} \quad (5.14)$$

mit der Stellgröße $u_K = \dot{Q}_{K,soll}$. Für die geglätteten Gleichungen des Prädiktionsmodells kann also

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{x}_K}{dt} \\ \frac{d\mathbf{x}_{Puffer}}{dt} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_K(\mathbf{x}_K, u_K) \\ \mathbf{f}_{Puffer}(t, \mathbf{x}_{Puffer}, \mathbf{u}_{Puffer}) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

mit der ebenfalls geglätteten Ausgangsgröße

$$y_K \approx \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_K s_1(\varphi_{11}, \varphi_{12}) + \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_K s_2(\varphi_{21}, \varphi_{22}) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{x}_K s_3(\varphi_{31}) =: \tilde{f}_{y_K}(\mathbf{x}_K, u_K) \quad (5.16)$$

der Biomasse-Feuerung, geschrieben werden, wobei die beiden Differentialgleichungen aus Gleichung (5.15) analog zu den Gleichungen (4.89) und (4.90) gemäß Gleichung (4.91) miteinander gekoppelt sind. Aufgrund des Definitionsbereichs der Soll-Kesselleistung von

$$\dot{Q}_{K,soll} \in \{0, [0,3, 1]\} \quad (5.17)$$

kann das Modell jedoch nicht ohne Weiteres in einem NMPC-Algorithmus verwendet werden. Hierzu erfolgt im folgenden Abschnitt eine genauere Betrachtung der Stellgröße.

5.3 Äußere Konvexifizierung und Relaxierung

Die geglättete Systembeschreibung aus Gleichung (5.15) und (5.16) mit der Eingangsgröße $u_K = \dot{Q}_{K,Soll} \in \{0, [0,3, 1]\}$ soll in diesem Abschnitt einer äußeren Konvexifizierung mit anschließender Relaxierung gemäß Abschnitt 3.3 unterzogen werden. Im ersten Schritt wird dazu $\dot{Q}_{K,Soll}$ in zwei unabhängige Eingangsgrößen $\hat{u}_K \in [0,3, 1]$ und $\hat{v}_K \in \{0, 1\}$ aufgeteilt, wobei $\hat{v}_K = 0$ den eingeschalteten Zustand und $\hat{v}_K = 1$ den ausgeschalteten Zustand kennzeichnet. Die kontinuierliche Größe \hat{u}_K steht für die aktuell geforderte Kesselleistung und die ganzzahlige Größe \hat{v}_K beschreibt demnach, ob die Biomasse-Feuerung ein- oder ausgeschaltet sein soll. Erweitert man die geglättete Systembeschreibung der Biomasse-Feuerung $\tilde{\mathbf{f}}_K(\mathbf{x}_K, u_K)$ aus Gleichung (5.15) um diese Aufteilung der Stellgröße, so kann

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_K(\mathbf{x}_K, u_K) &= \hat{\mathbf{f}}_K(\mathbf{x}_K, \hat{u}_K, \hat{v}_K), \\ \tilde{f}_{y_K}(\mathbf{x}_K, u_K) &= \hat{f}_{y_K}(\mathbf{x}_K, \hat{u}_K, \hat{v}_K)\end{aligned}\quad (5.18)$$

geschrieben werden. Auf die Funktion $\hat{\mathbf{f}}_K(\mathbf{x}_K, \hat{u}_K, \hat{v}_K)$, mit der erweiterten Eingangsgröße, kann nun gemäß Gleichung (3.9) die äußere Konvexifizierung angewendet werden und man erhält

$$\hat{\mathbf{f}}_K(\mathbf{x}_K, \hat{u}_K, \hat{v}_K) := \tilde{\mathbf{f}}_K(\mathbf{x}_K, 0)\hat{v}_K + \tilde{\mathbf{f}}_K(\mathbf{x}_K, \hat{u}_K)(1 - \hat{v}_K) \quad (5.19)$$

für die Differentialgleichungen der Biomasse-Feuerung. Auf die selbe Weise lässt sich auch die vom Modus ζ abhängige Ausgangsgröße y_K konvexifizieren und man kann für das gesamte Modell der Wärmeversorgungsanlage

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{x}_K}{dt} \\ \frac{d\mathbf{x}_{Puffer}}{dt} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_K(\mathbf{x}_K, \hat{u}_K, \hat{v}_K) \\ \mathbf{f}_{Puffer}(t, \mathbf{x}_{Puffer}, \mathbf{u}_{Puffer}) \end{bmatrix} =: \mathbf{f}_{ges}(t, \mathbf{x}, \hat{u}_K, \hat{v}_K) \quad (5.20)$$

und

$$y_k \approx \hat{f}_{y_K}(\mathbf{x}_K, \hat{u}_K, \hat{v}_K) = \tilde{f}_{y_K}(\mathbf{x}_K, 0)\hat{v}_K + \tilde{f}_{y_K}(\mathbf{x}_K, \hat{u}_K)(1 - \hat{v}_K) \quad (5.21)$$

schreiben. Der Zusammenhang zwischen $\hat{\mathbf{f}}_K$ und \mathbf{f}_{Puffer} in Gleichung (5.20) wurde in Abschnitt 4.5 dokumentiert.

5.4 Optimalsteuerungsproblem

In den vorherigen Abschnitten wurde die hybride Systembeschreibung für die Verwendung in einem MIOCP vorbereitet, indem eine äußere Konvexifizierung durchgeführt wurde. In diesem Abschnitt soll nun ausgehend von der Definition 3.1 bzw. Gleichung (3.12) ein MIOCP für die Berechnung einer Optimalsteuerung der Wärmeversorgungsanlage

entworfen werden. Für einen Optimierungshorizont von $\mathcal{T} \in [t_0, t_f] \subset \mathbb{R}_+$ ist das MIOCP durch

$$\begin{aligned}
& \min_{\hat{u}_K(t), \hat{v}_K(t)} J(t, \mathbf{x}(t), \hat{u}_K(t), \hat{v}_K(t)) & (5.22) \\
\text{unter } & \dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{f}_{ges}(t, \mathbf{x}(t), \hat{u}_K(t), \hat{v}_K(t)), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\
& 0 \geq h_{min} - h(t), \\
& 0 \geq h(t) - h_{max}, \\
& 0,3 \leq \hat{u}_K(t) \leq 1,0 \\
& \hat{v}_K(t) \in \{0, 1\}, & \forall t \in \mathcal{T}
\end{aligned}$$

mit $h(t) = x_6(t)$ gegeben. Nebenbedingungen sind die Beschränkungen der Ladehöhe des Pufferspeichers h_{max} und h_{min} , der Soll-Kesselleistung u_K , sowie die geglätteten und konvexifizierten Differentialgleichungen aus Gleichung (5.20). Durch Diskretisierung des MIOCPs aus Gleichung (5.22) mittels direktem Mehrfachschießverfahren (siehe Abschnitt 2.1.3) erhält man für die Zeitpunkte $\{t_k\}, 0 \leq k \leq N - 1$ ein MINLP der Form

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{z}} J(\mathbf{z}) &= \sum_{i=0}^{N-1} R_i \hat{u}_{K,i} + \sum_{j=0}^{N-1} S_j \sigma_j & (5.23) \\
\text{mit } \mathbf{z} &:= [\mathbf{s}_{k+1}^T \quad \hat{u}_{K,k} \quad \hat{v}_{K,k} \quad c_k], \\
\text{unter } \mathbf{0} &= \hat{v}_{K,k} \hat{\mathbf{x}}_k(t_k, \mathbf{s}_k, 0)_{(t_{k+1})} + (1 - \hat{v}_{K,k}) \hat{\mathbf{x}}_k(t_k, \mathbf{s}_k, \hat{u}_{K,k})_{(t_{k+1})} - \mathbf{s}_{k+1}, \\
& \mathbf{s}_0 = \mathbf{x}_0, \\
& \sigma_k = (2c_k - 1)(\hat{v}_{K,k} + \hat{v}_{K,k+1} - 1) + 1, \\
& 0 \geq h_{min} - h_K, \\
& 0 \geq h_K - h_{max}, \\
& 0,3 \leq \hat{u}_{K,k} \leq 1,0 \\
& \hat{v}_{K,k} \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

mit dem in Gleichung (5.2) definierten Gütefunktional, sowie der Formulierung von σ_j für die Minimierung der Schaltvorgänge aus Gleichung (3.22). Nach einer Relaxierung der ganzzahligen Größe $\hat{v}_{K,k} = a_{K,k} \in [0, 1]$ kann schlussendlich das NLP

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}} \quad & J(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \hat{u}_{K,i} + \sum_{j=0}^{N-1} S_j \sigma_j \quad (5.24) \\ \text{mit } \mathbf{z} := & [\mathbf{s}_{k+1}^T \quad \hat{u}_{K,k} \quad \hat{a}_{K,k} \quad c_k], \\ \text{unter } \mathbf{0} = & \hat{a}_{K,k} \hat{\mathbf{x}}_k(t_k, \mathbf{s}_k, 0)_{(k+1)} + (1 - \hat{a}_{K,k}) \hat{\mathbf{x}}_k(t_k, \mathbf{s}_k, \hat{u}_{K,k})_{(k+1)} - \mathbf{s}_{k+1}, \\ & \mathbf{s}_0 = \mathbf{x}_0, \\ & \sigma_k = (2c_k - 1)(\hat{a}_{K,k} + \hat{a}_{K,k+1} - 1) + 1, \\ & 0 \geq h_{min} - h_K, \\ & 0 \geq h_K - h_{max}, \\ & 0,3 \leq \hat{u}_{K,k} \leq 1,0 \\ & \hat{a}_{K,k} \in [0, 1] \end{aligned}$$

einem Optimierungsalgorithmus für nichtlineare Programme zugeführt werden. In dieser Arbeit wurde zu diesem Zweck der Befehl *fmincon()* aus der „Optimization Toolbox“ von Matlab (Fa. Mathworks) verwendet. Unter den verschiedenen Lösungsmethoden die dieser Befehl bietet, wurden mit dem „interior-point“-Algorithmus [5] die besten Ergebnisse erzielt.

Nach der Berechnung der relaxierten Optimalsteuerung wird diese mit einer in Abschnitt 3.4 beschriebenen Rundungsstrategie in eine ganzzahlige Steuerung überführt. Simulationsstudien haben gezeigt, dass durch die spezielle Formulierung des Gütefunktionals zur Minimierung der Schaltvorgänge die relaxierte Lösung des Optimierungsproblems bereits deutlich in Richtung Ganzzahligkeit gedrängt wird. Daher ist es beim System der Wärmeversorgungsanlage ausreichend, das SR-Rundungsverfahren aus Abschnitt 3.4 zu verwenden.

Das Optimalsteuerungsproblem aus Gleichung (5.22) soll in weiterer Folge im Rahmen eines NMPC-Algorithmus (siehe Abschnitt 2.2) zu einer Regelung erweitert werden. Hierzu wird das NLP in Gleichung (5.24) in den NMPC-Regler aus Abbildung 2.6 integriert. Die iterative Wahl der Startwerte erfolgt mit der in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Verschiebungsmethode. Die aktuelle Lösung des Optimierungsproblems \mathbf{z}^* wird gemäß Gleichung (2.44) zeitlich um ein Element verschoben. Das jeweils letzte Element der Optimierungsvariablen \mathbf{s}_k , $\hat{u}_{K,k}$ und $\hat{a}_{K,k}$ wird dann durch die Berechnung eines Optimierungsproblems der Form (5.24) mit einem Prädiktionshorizont der Länge $N = 1$ berechnet. Diese Vorgangsweise stellt sicher, dass auch die zeitlich letzten Startwerte der Optimierungsvariablen bereits vernünftige Werte innerhalb der Systemgrenzen sind.

5.5 Zusammenfassung

Das Ziel dieses Kapitels war der Entwurf einer übergeordneten Regelung für eine Wärmeversorgungsanlage. Auf Basis des nichtlinearen und hybriden Prädiktionsmodells aus Kapitel 4 wurde zunächst ein MIOCP gemäß den Grundlagen in Kapitel 2 und Kapitel 3 aufgestellt. Als Gütefunktional wird der zeitlich gewichtete Brennstoffverbrauch sowie die Anzahl der Schaltvorgänge festgelegt. Die Lösung des MIOCPs erfolgt über eine Diskretisierung mittels direktem Mehrfachschießverfahren (siehe Kapitel 2.1.3). Als Ergebnis dieser Diskretisierung erhält man dann ein MINLP, welches mit der Methode der äußeren Konvexifizierung und anschließender Relaxierung (siehe Kapitel 3.3) gelöst wird. Durch iterative Lösung des MIOCPs mit den aktuellen Startwerten wird die Steuerung schlussendlich zu einem MINMPC-Algorithmus erweitert. Die optimale Lösung des aktuellen MIOCPs wird gemäß Verschiebungs-Methode aus Abschnitt 2.2.2 zur Generierung von möglichst guten Startwerten für die nächste NMPC-Iteration verwendet. Des Weiteren wird das hier entworfene Regelungskonzept im Kapitel 6 anhand von Simulationsstudien ausführlich getestet.

Kapitel 6

Simulationsergebnisse

In diesem Kapitel wird das zuvor entworfene MINMPC-Regelungsverfahren für eine Wärmeversorgungsanlage anhand unterschiedlicher Simulationsstudien untersucht. Nach der Definition aller notwendigen Parameter des MINMPC-Algorithmus sowie des Prädiktionsmodells in den Abschnitten 6.1 und 6.2, wird in Abschnitt 6.3 kurz das im Folgenden verwendete Simulationsmodell beschrieben.

Bei den ersten Simulationen in Abschnitt 6.4 wird die neue Regelstrategie einer klassischen 2-Punkt Regelung gegenübergestellt. Für diesen Vergleich werden durchschnittliche Tageslastprofile unterschiedlicher Jahreszeiten für die Lastabnahme des Heizkreises und der Warmwasserzapfstellen verwendet.

In zwei weiteren Simulationsstudien in Abschnitt 6.5 werden die Auswirkungen von Abweichungen bei der Prädiktion der Lastabnahme sowie des solaren Eintrages von den tatsächlichen Verläufen auf die neue Regelung untersucht.

6.1 Parameter des MINMPC-Reglers

In diesem Abschnitt werden die Parameter des in Kapitel 5 entworfenen MINMPC-Reglers festgelegt. Da die Wahl dieser Parameter ausschlaggebend für den Erfolg der Regelung ist, wird diese im Folgenden näher diskutiert.

Prädiktionshorizont

Um genügend Information über den zukünftigen Zustand des zu regelnden Systems zu erhalten, ist es notwendig, einen ausreichend langen Prädiktionshorizont \mathcal{T} zu wählen. Gemeinsam mit der Schrittweite der Zeitdiskretisierung T_{NMPC} ist der Prädiktionshorizont ausschlaggebend für die Anzahl der Optimierungsvariablen nach der Diskretisierung des MIOCP. Die Zeit, die der Lösungsalgorithmus zur Berechnung eines Optimums benötigt, steigt sehr stark mit der Anzahl der Optimierungsvariablen. Einen guten Kompromiss zwischen ausreichend langem Prädiktionshorizont und Anzahl der Optimierungsvariablen ist durch die Wahl von

$$T_{NMPC} = 30 \text{ min} \quad (6.1)$$

und

$$N = 24 \quad (6.2)$$

gegeben. Mit $N = 24$ Diskretisierungszeitpunkten bei einem Abstand von $T_{NMPC} = 30$ min ergibt sich somit ein Prädiktionshorizont von 12h.

Gütefunktional

Gemäß Gleichung (5.2) ist das verwendete Gütefunktional die gewichtete Summe des Brennstoffverbrauchs sowie der Schaltvorgänge über den gesamten Prädiktionshorizont N . Während der Brennstoffverbrauch zeitlich konstant mit

$$\mathbf{R} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T \quad (6.3)$$

gewichtet wird, erwies sich für die Gewichtung der Schaltvorgänge eine Stufenform als äußerst praktikabel. Die zur Simulation verwendeten Parameter für \mathbf{S} sind in der folgenden Abbildung graphisch dargestellt.

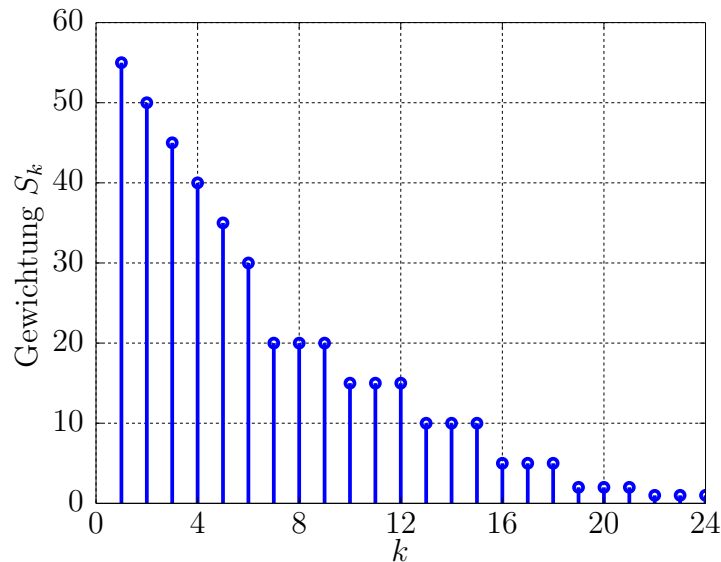


Abbildung 6.1: Graphische Darstellung des Vektors für die Gewichtung der Schaltvorgänge.

Eine Gewichtung der Schaltvorgänge gemäß Abbildung 6.1 hat zur Folge, dass Schaltvorgänge in naher Zukunft stärker bestraft werden als jene am Ende des Prädiktionshorizontes. Dies hat die vollständige Ausnutzung des Pufferspeichervolumens bei gleichzeitiger Vermeidung von unnötigen Schaltvorgängen am Beginn des Prädiktionshorizontes zur Folge.

Beschränkungen

Die gesamte Systemregelung der Wärmeversorgungsanlage hat in dieser Arbeit im wesentlichen nur zwei Beschränkungen, welche als Nebenbedingung dem MIOCP hinzugefügt werden (siehe Gleichung (5.22)). Diese Beschränkungen betreffen die Soll-Kesselleistung

$$\dot{Q}_{K,min} \leq \dot{Q}_{K,Soll} \leq \dot{Q}_{K,max} \quad (6.4)$$

mit $\dot{Q}_{K,min} = 0,3$ und $\dot{Q}_{K,max} = 1$, sowie die maximale bzw. minimale Ladehöhe des Pufferspeichers

$$h_{min} \leq h(t) \leq h_{max} \quad (6.5)$$

mit $h_{min} = 0,3$ m und $h_{max} = 1,7$ m. Bei der Festlegung dieser Grenzen für die Ladehöhe des Pufferspeichers ist aus Sicherheitsgründen eine Toleranz für etwaige Fehler in der Prädiktion eingeplant. Durch die Art der Modellbildung in Abschnitt 4.3 ist die Wahl dieser Grenzen durch die Position der oberen bzw. unteren Einlässe des Pufferspeichers beschränkt.

6.2 Prädiktionsmodell

Zur Prädiktion der zukünftigen Zustandstrajektorien der Wärmeversorgungsanlage im Zuge der MINMPC-Regelung wird das Prädiktionsmodell aus Kapitel 4 verwendet. Im Folgenden werden die für die anschließenden Simulationsstudien verwendeten Lastprofile (Abschnitt 6.2.1) sowie die Parametrierung der Prädiktionsmodelle (Abschnitt 6.2.2) festgelegt.

6.2.1 Lastprofile für die Wärmeabnehmer

Für die Lastabnahme von Heizkreis und Warmwasserzapfstellen werden in Anlehnung an [14] und [27] Lastprofile für die vier Typtage (Mittelwert einer saisonalen Lastperiode)

- Übergangszeit, bewölkt (ÜxB)
- Übergangszeit, heiter (ÜxH)
- Wintertag, bewölkt (WxB)
- Wintertag, heiter (WxH)

angenommen. Diese Lastprofile (siehe Abbildung 6.2) beinhalten jeweils den gesamten Wärmeverbrauch (Heizung und Warmwasser), sind normiert und werden in weiterer Folge durch Multiplikation mit der Kesselnennleistung $\dot{Q}_{K,Nenn}$ an die gegebene Anlage angepasst.

6.2.2 Parameter des Prädiktionsmodells

Dieser Abschnitt beinhaltet die gesamte Parametrierung des Prädiktionsmodells aus Kapitel 4. Hierzu gehören die Parameter des Pufferspeichers, der Biomasse-Feuerung und der Solarkollektoren. Bei den Parametern des Pufferspeichers in Tabelle 6.1 ist zu beachten, dass die Höhen des Heizkreisrücklaufs $h_{HK,RL}$, des Solarvorlaufs $h_{SK,VL}$ und des Kesselvorlaufs $h_{K,VL}$ für das Prädiktionsmodell nicht explizit angegeben werden müssen. Gemäß Abschnitt 4.3 werden die zufließenden Massenströme unabhängig von der Höhe entweder in die obere oder in die untere Temperaturschicht gemischt.

Die Parameter des Prädiktionsmodells der Biomasse-Feuerung wurden anhand von Experimenten angepasst, sodass Laständerungen, Aufheiz- und Auskühlvorgänge möglichst gut abgebildet werden. Das Prädiktionsmodell des Pufferspeichers wurde anhand von Simulationen so angepasst, dass es mit den Simulationsergebnissen vom komplexeren Modell aus [15] möglichst gut übereinstimmt. Die Parameter für das statische Modell

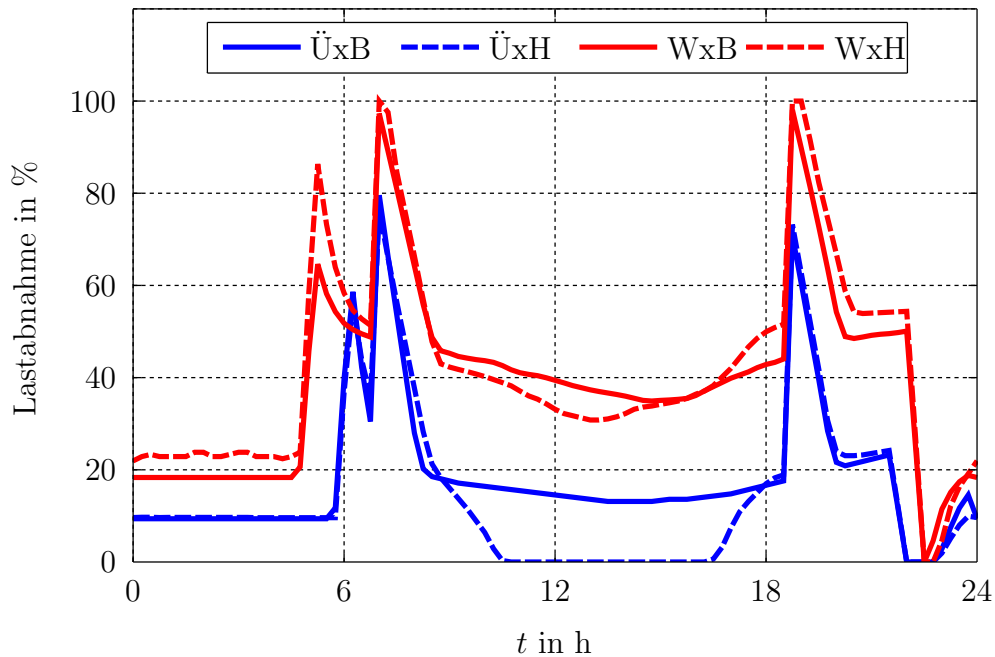


Abbildung 6.2: Typische Tageslastprofile unterschiedlicher Jahreszeiten und Bewölkungsgrade.

der Solarkollektoren wurden dem Datenblatt der Vakuumröhrenkollektoren CPC der Fa. Solarbayer entnommen.

Parameter des Pufferspeichers

Formelzeichen	Wert	Einheit	Beschreibung
ρ_W	995,8	kg/m ³	Dichte des Wassers bei $T = 30^\circ\text{C}$
A_{Sp}	0,7854	m ²	effektive Grundfläche des Speichers
U_{Sp}	3,1416	m	effektiver Umfang des Speichers
α	0,7570	W/m ² K	Wärmeübergangskoeffizient der isolierten Speicherwand
T_{Umg}	23	°C	Umgebungstemperatur
$h_{HK,VL}$	0,1	m	Heizkreisvorlauf
$h_{SK,RL}$	1,78	m	Solarrücklauf
$h_{K,RL}$	1,78	m	Kesselrücklauf
a	15	1/m ²	Normierungsfaktor
\tilde{c}	$2 \cdot 10^{-6}$	m ² /s	Aufweitungsfaktor

Tabelle 6.1: Parameter Pufferspeicher, Prädiktionsmodell.

Parameter der Biomasse-Feuerung

Formelzeichen	Wert	Einheit	Beschreibung
$\dot{Q}_{K,Nenn}$	30	kW	Kesselnennleistung
$\dot{Q}_{K,min}$	0,3	-	untere Grenze der Kesselleistung
$\dot{Q}_{K,max}$	1,0	-	obere Grenze der Kesselleistung
k_{Abb}	0,02	1/s	Zeitkonstante, Brennstoffabbau
f_{Brst}	$6,883 \cdot 10^{-8}$	kg/J	Parameter für Brennstoffumsetzung
H_u	$17,57 \cdot 10^6$	J/kg TS	Heizwert, Trockensubstanz
q	0,1	-	Anteil an gespeicherter Energie im Stahl und Schamott
p	$8 \cdot 10^{-5}$	1/s	Abkühlparameter, Stahl und Schamott
α_{Wu}	0,7	W/m ² K	Wärmeübergangskoeffizient
A_{Wu}	2	m ²	fiktive äußere Oberfläche des Wärmeübertragers
m_W	150	kg	Wassermasse im Wärmeübertrager
c_W	4.182	J/kgK	spezifische Wärmekapazität, Wasser
μ_{Nenn}	0,95	-	Wirkungsgrad des Wärmeübertragers im Nennbetrieb
μ_A	0,8	-	Wirkungsgrad des Wärmeübertragers beim Anfahren und Auskühlen
$T_{VL,Schw}$	70	°C	Schwellwert der Kesselvorlauftemperatur

Tabelle 6.2: Parameter Biomasse-Feuerung, Prädiktionsmodell.

Parameter der Solarkollektoren

Formelzeichen	Wert	Einheit	Beschreibung
c_W	4.182	J/kgK	spezifische Wärmekapazität, Wasser
$f_{Konv}(50^\circ)$	0,87	-	Winkelkorrekturfaktor bei 50°
τ_{Abd}	0,718	-	Transmissionskoeffizient
α_{Abs}	0,95	-	Absorptionsgrad des Absorbermaterials
k_1	0,974	W/m ² K	Wärmeverlustkoeffizient
k_2	0,005	W/m ² K ²	quadratischer Wärmeverlustkoeffizient
A_{SK}	10	m ²	Fläche der Solarkollektoren

Tabelle 6.3: Parameter Solarkollektoren (Vakuümrohrenkollektoren CPC der Fa. Solarbayer), Prädiktionsmodell.

6.3 Simulationsmodell

Grundsätzlich wird als Simulationsmodell das Prädiktionsmodell aus Kapitel 4 mit der Parametrierung aus Abschnitt 6.2.2 und den Lastprofilen aus Abschnitt 6.2.1 verwendet. Um realitätsnahe Simulationsstudien durchführen zu können, wird der Teil des Pufferspeichers durch ein genaueres Simulationsmodell aus [15] ersetzt. Im Folgenden wird

dieses Simulationsmodell kurz beschrieben. Die zur Simulation verwendeten Kenndaten der simulierten Anlagenkomponenten werden im Abschnitt 6.3.2 angegeben.

6.3.1 Simulationsmodell für den Pufferspeicher

Das eingangs erwähnte Simulationsmodell für den Pufferspeicher aus [15] ist grundsätzlich eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\underbrace{\rho c_W \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{Speicherung der Energie}} + \underbrace{\frac{\dot{m}_W c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{erzwungene Konvektion}} + \underbrace{\frac{\dot{q}_{Umgebung}}{A}}_{\text{Umgebungsverluste}} = \underbrace{\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{\text{axiale Wärmeleitung}}, \quad (6.6)$$

mit der Dichte des Wasser ρ in kg/m^3 , der spezifischen Wärmekapazität des Wassers c_W in J/kgK , der Wassertemperatur T in K , der Zeit t in s , dem zu-/ abgeführten Wassermassenstrom \dot{m}_W in kg/s , der Querschnittsfläche des Pufferspeichers A in m^2 , dem radialen Abstand vom Mittelpunkt z in m , der effektiven vertikalen Wärmeleitfähigkeit λ in W/mK und den Wärmeverlusten an die Umgebung je Höhe $\dot{q}_{Umgebung}$ in W/m .

Diese Ausgangsgleichung wird durch einen zusätzlichen, konvektiven Term für den Heizkreis erweitert und man erhält mit der Wärmestromdichte

$$\dot{q} = \frac{\lambda_{Iso} A_m}{d_{Iso} H (T - T_{Umgebung})} \quad (6.7)$$

für die Umgebungsverluste eine dynamische Beschreibung der Vorgänge im Pufferspeicher, welche durch Orts- und Zeitdiskretisierung gelöst wird.

Nicht berücksichtigt wird in (6.6) die sogenannte „freie Konvektion“, also die Durchmischung von Wasserschichten im Speicher aufgrund dessen temperaturabhängiger Dichte. Dieser Effekt tritt dann auf, wenn eine höherliegende Wasserschicht eine niedrigere Temperatur aufweist, als eine darunterliegende Schicht. Ist das bei zwei benachbarten Schichten der Fall, so wird die auftretende freie Konvektion durch die Mischung dieser Temperaturschichten beschrieben. Mathematisch gesehen erfolgt das durch die Berechnung des Mittelwertes der jeweiligen Temperaturen. Dies wird solange auf die gesamte Höhe des Pufferspeichers angewendet, bis sich wieder ein monoton steigender Temperaturverlauf einstellt.

6.3.2 Parameter des Simulationsmodells

Die Parametrierung des Simulationsmodells erfolgt, mit Ausnahme der partiellen Differentialgleichungen des Pufferspeichers (siehe Abschnitt 6.3.1), äquivalent zur Parametrierung des Prädiktionsmodells in Abschnitt 6.2.2. Der Vollständigkeit halber wird, ohne Angabe der Diskretisierung von Gleichung (6.6), in der Tabelle 6.4 die Parametrierung dieses Modells zusammengefasst.

Formelzeichen	Wert	Einheit	Beschreibung
c_W	4.182	J/kgK	spezifische Wärmekapazität, Wasser
d_i	1	m	Innendurchmesser des Pufferspeichers
d_{Iso}	0,1	m	Dicke der Isolierung
ρ_W	995,8	kg/m ³	Dichte des Wassers bei $T = 30^\circ\text{C}$
$T_{Sp,t}$	100	s	Schrittweite, Zeitdiskretisierung
$N_{Sp,T}$	200	–	Anzahl der Ortsdiskretisierungen (Anzahl der Temperaturschichten)
λ_{Iso}	0,0757	W/mK	Wärmeleitfähigkeit der Isolierung
T_{Umg}	23	$^\circ\text{C}$	Umgebungstemperatur
$h_{HK,VL}$	0,1	m	Heizkreisvorlauf
$h_{HK,RL}$	1,88	m	Heizkreisrücklauf
$h_{SK,VL}$	0,2	m	Solarvorlauf
$h_{SK,RL}$	1,78	m	Solarrücklauf
$h_{K,VL}$	0,2	m	Kesselvorlauf
$h_{K,RL}$	1,78	m	Kesselrücklauf

Tabelle 6.4: Parameter Pufferspeicher, Simulationsmodell.

6.4 Vergleich zwischen MINMPC und 2-Punkt Regler

Bei der Simulationsstudie in diesem Abschnitt soll die in dieser Arbeit entwickelte, modellprädiktive Regelung (MINMPC) einer herkömmlichen 2-Punkt Regelung gegenübergestellt werden. Hierfür werden die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Systemkomponenten zunächst auf die Energieflüsse reduziert. Abbildung 6.3 zeigt das Blockschaltbild der Wärmeversorgungsanlage.

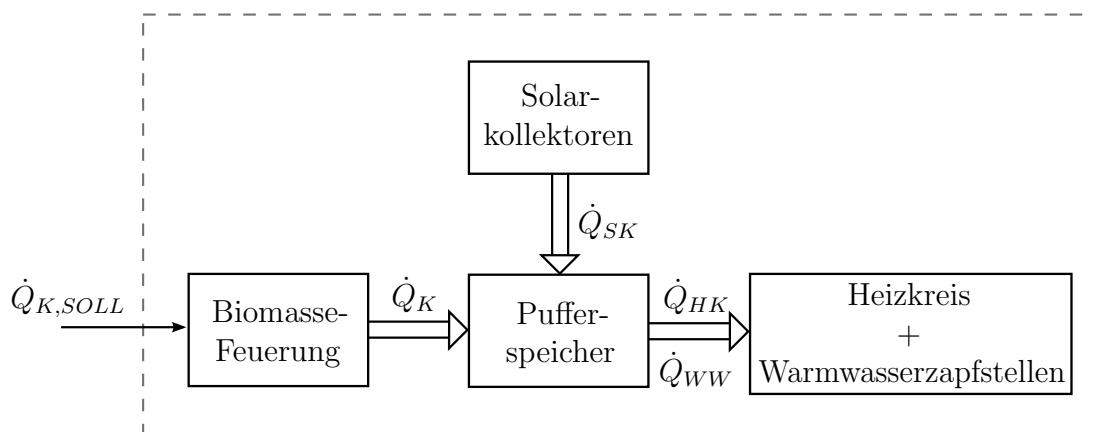


Abbildung 6.3: Komponenten der Wärmeversorgungsanlage mit den Wärmeströmen.

Die einzelnen Komponenten sind über Wärmeströme \dot{Q} in W miteinander verbunden. Bei einer hier simulierten 2-Punkt Regelung ist der Pufferspeicher mit einem oder zwei Temperatursensoren ausgestattet. Bei zwei Temperatursensoren wird einer oben (T_{oben}) und einer unten (T_{unten}) im Pufferspeicher angebracht. Ist der Pufferspeicher nahezu

entladen ($T_{oben} < T_{Schw,oben}$), so wird die Biomasse-Feuerung gestartet und der Pufferspeicher mit \dot{Q}_K beladen bis $T_{unten} > T_{Schw,unten}$ ist. Eine solche Beladung wird durch das Überschreiten der Wassertemperatur an einem Temperatursensor im unteren Bereich des Pufferspeichers angezeigt. Weiters speisen die Solarkollektoren mit dem Wärmestrom \dot{Q}_{SK} in den Pufferspeicher ein und der Heizkreis bzw. die Warmwasserzapfstellen entnehmen jeweils \dot{Q}_{HK} und \dot{Q}_{WW} . Die Leistung $\dot{Q}_{K,Soll}$ wird von der MINMPC-Regelung vorgegeben.

In den folgenden Abschnitten werden jeweils 3 aufeinanderfolgende Tage mit unterschiedlichen solaren Einträgen simuliert. Für die Leistungsabnahme vom Heizkreis und den Warmwasserzapfstellen ($\dot{Q}_{HK} + \dot{Q}_{WW}$) werden die in Abschnitt 6.2.1 beschriebenen Lastprofile verwendet.

6.4.1 Übergangszeit, bewölkt

Die Simulationsstudie in diesem Abschnitt wurde unter folgenden Bedingungen durchgeführt:

- Lastprofil: Übergangszeit, bewölkt (siehe Abschnitt 6.2.1)
- Wetter: $I_{G,HZ}/\tilde{I}_{diff,HZ}$; $100 \frac{W}{m^2}/80\%$ (Tag 1); $150 \frac{W}{m^2}/80\%$ (Tag 2); $200 \frac{W}{m^2}/80\%$ (Tag 3). In dieser Angabe ist $I_{G,HZ}$ die Globalstrahlung in W/m^2 und $\tilde{I}_{diff,HZ}$ die diffuse Strahlung in Prozent der direkten Strahlung.
- Außentemperatur: $T_{Außen} = 20^\circ C$.
- Starttag der Simulation (Tag des Jahres): $n = 150$.

Abbildung 6.4 zeigt die Ergebnisse der Simulationsstudie mit der entwickelten MINMPC-Regelung. Das erste Diagramm zeigt in blau dargestellt die, vom MINMPC-Regler vorgegebenen Stellgrößen $\dot{Q}_{K,Soll}$. Die von der Biomasse-Feuerung abgegebene Leistung \dot{Q}_K ist im selben Diagramm mit rot dargestellt. Während die Feuerung bei der 2-Punkt-Regelung (siehe Abbildung 6.5) bei Nennleistung $\dot{Q}_{K,Nenn}$ betrieben wird, reduziert die MINMPC-Regelung die Leistung durch die Wahl des Gütefunktional auf $\dot{Q}_{K,Min}$.

Das jeweils zweite Diagramm in den Abbildungen 6.4 und 6.5 zeigt den Eintrag der Solarkollektoren \dot{Q}_{SK} in den Pufferspeicher. Dieser steigt proportional mit der oben definierten Globalstrahlung. Es ist zu erwähnen, dass bei dieser Simulation eine konstante Globalstrahlung über den gesamten Tag angenommen wurde. Die Variation des solaren Eintrags ergibt sich hierbei durch den Tagesverlauf des Sonnenstandes.

Das dritte Diagramm der Abbildungen 6.4 und 6.5 zeigt den Wärmestrom der Lastabnehmer. Dieser Wärmestrom entspricht den Tageslastprofilen aus Abschnitt 6.2, welche an die Nennleistung der Biomasse-Feuerung $\dot{Q}_{K,Nenn} = 30 \text{ kW}$ angepasst wurden. Für alle 3 Tage wurde jeweils das gleiche Lastprofil verwendet.

In den letzten Diagrammen der Abbildungen 6.4 und 6.5 ist die Ladehöhe des Pufferspeichers dargestellt. Die horizontalen, rot strichlierten Linien in Abbildung 6.4 stellen die eingestellten Zustandsbeschränkungen h_{min} und h_{max} dar. In Abbildung 6.5 (2-Punkt

Regelung) kennzeichnen diese Linien die Montagehöhe der zwei Temperatursensoren. Aus dem Verlauf der Ladehöhe des Pufferspeichers bei der MINMPC-Regelung ist ersichtlich, dass die maximale Ladehöhe mehrmals überschritten wird. Der Grund hierfür liegt im verwendeten Rundungsverfahren: Die relaxierte gemischt-ganzzahlige Lösung des MIOCPs ist nicht immer 0 oder 1 sondern wird, vor allem in der Umschaltphase (z.B.: Feuerung AUS - Feuerung EIN) auch Werte dazwischen annehmen. Rundet man diese Größe dann vor der Aufschaltung auf das Simulationsmodell, so stimmt die Prädiktion nicht mehr mit der Simulation überein und die Beschränkungen können verletzt werden. Trotzdem werden die Beschränkungen nur geringfügig überschritten.

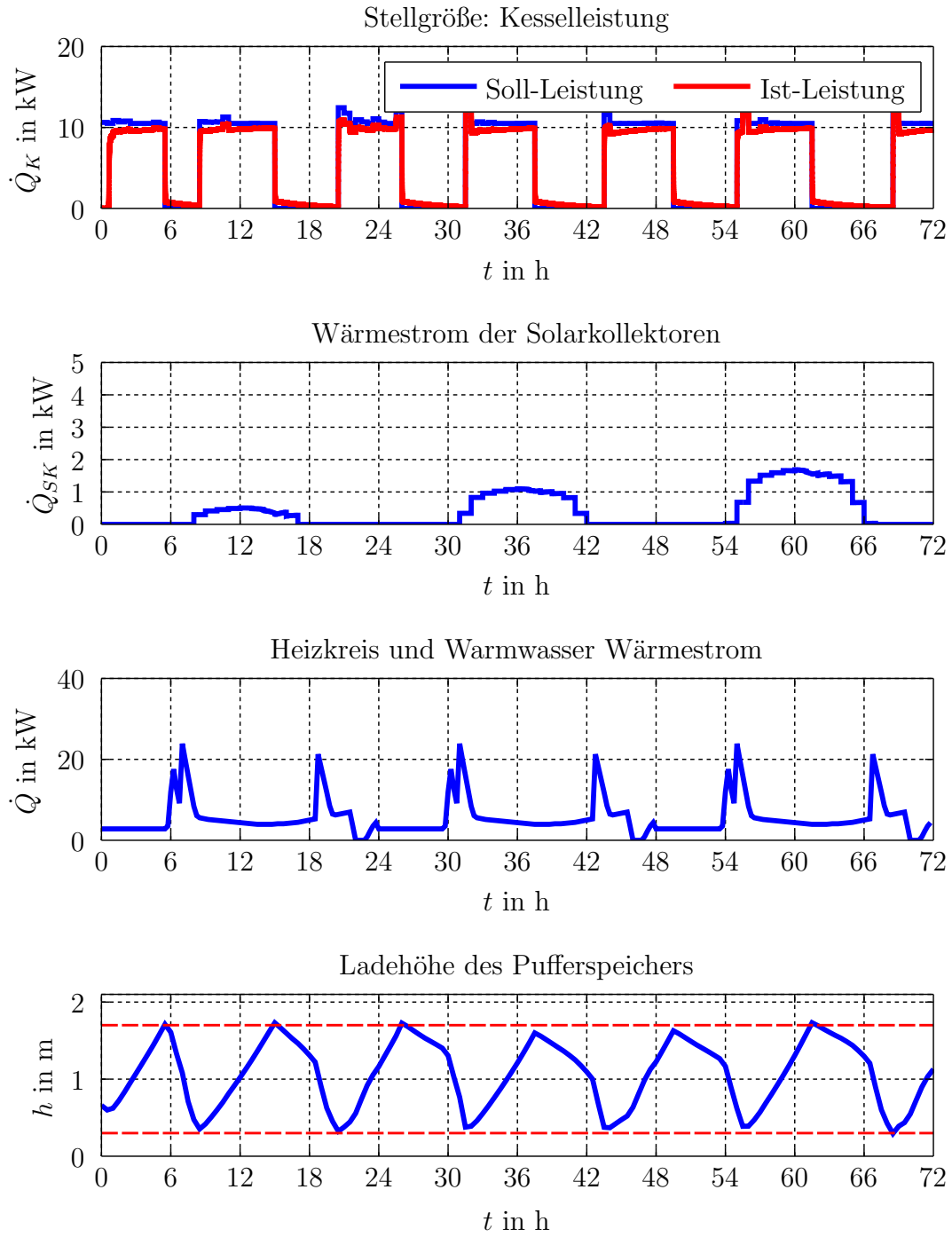


Abbildung 6.4: Simulationsstudie mit MINMPC-Regelung (Übergangszeit, bewölkt)

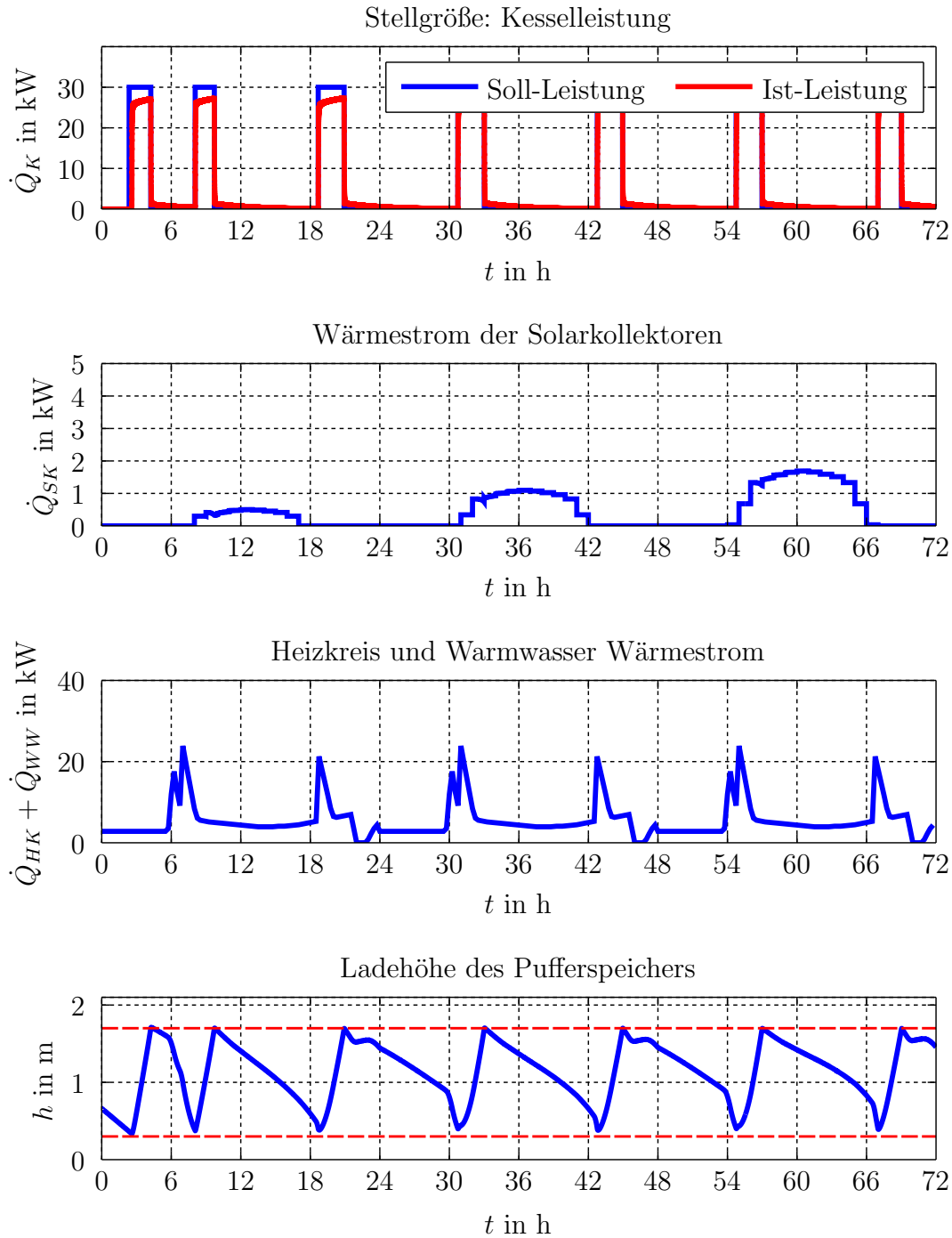


Abbildung 6.5: Simulationsstudie mit 2-Punkt Regelung (Übergangszeit, bewölkt)

In Tabelle 6.5 sind die transportierten Wärmemengen zwischen den einzelnen Elementen der Wärmeversorgungsanlage gemäß Abbildung 6.3 zusammengefasst. Die Energien Q errechnen sich aus den Wärmeströmen \dot{Q} durch tageweise Integration zu

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} \dot{Q}(t) dt. \quad (6.8)$$

Man erhält somit die gesamte mit dem Brennstoff zugeführte Energie $Q_{K,Brst}$, die von der Biomasse-Feuerung abgegebene Energie $Q_{K,Ist}$, die von den Solarkollektoren abgegebene Energie Q_{SK} , die Energieänderung im Pufferspeicher ΔQ_{Puffer} , die Verluste des Pufferspeichers $Q_{Puffer,Verl}$ sowie die Summe der abgenommenen Energie $Q_{HK} + Q_{WW}$. Die Größe $\tilde{Q}_{K,Brst}$ ist die eingesetzte Brennstoffenergie abzüglich der Differenzenergie im Pufferspeicher:

$$\tilde{Q}_{K,Brst} = Q_{K,Brst} - \Delta Q_{Puffer}. \quad (6.9)$$

	Tag 1		Tag 2		Tag 3	
	2 Pkt	MINMPC	2 Pkt	MINMPC	2 Pkt	MINMPC
	kWh	kWh	kWh	kWh	kWh	kWh
$Q_{K,Brst}$	172,50	166,31	134,00	135,76	128,00	125,19
$Q_{K,Ist}$	156,63	149,51	127,77	128,99	122,04	119,24
Q_{SK}	3,72	3,65	9,45	9,46	15,21	15,12
ΔQ_{Puffer}	23,71	16,59	0,25	1,60	0,22	-2,28
$Q_{Puffer,Verl}$	4,77	4,64	4,87	4,80	4,94	4,84
$Q_{HK} + Q_{WW}$	132,04	132,04	132,04	132,04	132,04	132,04
$\tilde{Q}_{K,Brst}$	148,79	149,71	133,75	134,16	127,78	127,48

Tabelle 6.5: Gegenüberstellung der täglich zugeführten Energie sowie der erzeugten und verbrauchten Wärmemengen bei Simulation einer Serie von drei bewölkten Tagen in der Übergangszeit.

	Σ	
	2 Pkt	MINMPC
	kWh	kWh
Q_{SK}	28,38	28,22
$Q_{Puffer,Verl}$	14,59	14,28
$Q_{HK} + Q_{WW}$	396,13	396,13
$\tilde{Q}_{K,Brst}$	410,32	411,35

Tabelle 6.6: Ausgewählte, aufsummierte Wärmemengen der Simulationsergebnisse aus Tabelle 6.5.

Vergleicht man die korrigierte Brennstoffenergie $\tilde{Q}_{K,Brst}$ der beiden Regelungsstrategien miteinander, so sind bis auf kleine Differenzen auf den ersten Blick keine nennenswerten Unterschiede zu erkennen. Die Leistungsunabhängigkeit des Wirkungsgrades η im Nennbetrieb der Biomasse-Feuerung führt dazu, dass die MINMPC-Regelung die Kesselleistung aufgrund des in Gleichung (5.2) gewählten Gütefunktionalis bis an die untere Grenze des zulässigen Leistungsbereichs minimiert. Bei einem leistungsabhängigen Wirkungsgrad mit $\eta_{30kW} > \eta_{10kW}$ würde die MINMPC-Regelung die Anlage ebenfalls mit einer höheren

Leistung betreiben. Durch die mit dem konstanten Wirkungsgrad eingeführte Vereinfachung kann demnach anhand dieser Simulationsstudie nicht entschieden werden, welche Regelungsstrategie die besseren Ergebnisse liefern wird. Ändert sich jedoch zum Beispiel der Bewölkungsgrad (Abschnitt 6.4.2) oder der solare Eintrag (Abschnitt 6.4.3), so werden trotz des leistungsunabhängigen Wirkungsgrades im Prädiktionsmodell die Vorteile der MINMPC-Regelung deutlich.

6.4.2 Übergangszeit, heiter

Die Simulationsstudie in diesem Abschnitt wurde unter folgenden Bedingungen durchgeführt:

- Lastprofil: Übergangszeit, heiter (siehe Abschnitt 6.2.1)
- Wetter: $I_{G,HZ}/\tilde{I}_{diff,HZ}$; $300 \frac{W}{m^2}/20\%$ (Tag 1); $500 \frac{W}{m^2}/20\%$ (Tag 2); $700 \frac{W}{m^2}/20\%$ (Tag 3). In dieser Angabe ist $I_{G,HZ}$ die Globalstrahlung in W/m^2 und $\tilde{I}_{diff,HZ}$ die diffuse Strahlung in Prozent der direkten Strahlung.
- Außentemperatur: $T_{Außen} = 20^\circ C$.
- Starttag der Simulation (Tag des Jahres): $n = 150$.

Das jeweils erste Diagramm in den Abbildungen 6.6 und 6.7 zeigt die Soll- und die Ist-Leistung der Biomasse-Feuerung bei der Simulation eines Tages in der Übergangszeit mit heiterer Bewölkung. Im Vergleich zur 2-Punkt Regelung wird die Anzahl der Startvorgänge der Biomasse-Feuerung bei MINMPC-Regelung um einen Startvorgang reduziert. Dies ist unter anderem darauf zurückzuführen, dass der Pufferspeicher von der 2-Punkt Regelung trotz zu erwartenden solaren Eintrags bereits vollständig beladen wurde. Somit geht jeweils ein Teil des grundsätzlich möglichen solaren Eintrags \dot{Q}_{SK} verloren (siehe Abbildung 6.7, Diagramm 2). Durch die Prädiktion wird der zukünftige solare Eintrag bei der MINMPC-Regelung berücksichtigt und der Pufferspeicher somit nie überladen. Dieser Vorteil ist insbesondere bei den Verläufen der Ladehöhen des Pufferspeichers im 4. Diagramm der Abbildungen 6.6 und 6.7 ersichtlich. Während die festgelegten Grenzen bei MINMPC-Regelung nur kurzzeitig aufgrund der Rundungsverfahren verletzt werden (siehe Abschnitt 6.4.1), ist die Ladehöhe des Pufferspeichers bei der 2-Punkt Regelung über größere Zeiträume außerhalb der festgelegten Grenzen, wodurch nicht der gesamte theoretisch verfügbare solare Eintrag genutzt werden kann.

Das erste Diagramm der MINMPC-Regelung in Abbildung 6.6 zeigt einen auf den ersten Blick ungewöhnlich kurzen Einschaltvorgang der Biomasse-Feuerung im Bereich $54 \text{ h} < t < 60 \text{ h}$. Dieser Einschaltvorgang resultiert daraus, dass der Pufferspeicher um den Zeitpunkt $t = 54 \text{ h}$ durch die hohe Lastabnahme (Abbildung 6.6, Diagramm 3) sehr schnell entleert wird. Die MINMPC-Regelung erkennt durch die Prädiktion über die kommenden 12 h, dass mit einem hohen solaren Eintrag zu rechnen ist, welcher den gesamten Verbrauch in diesem Zeitraum decken kann. Die Biomasse-Feuerung wird somit nur kurzzeitig eingeschaltet, um sicherzustellen dass die festgelegten Grenzen eingehalten werden.

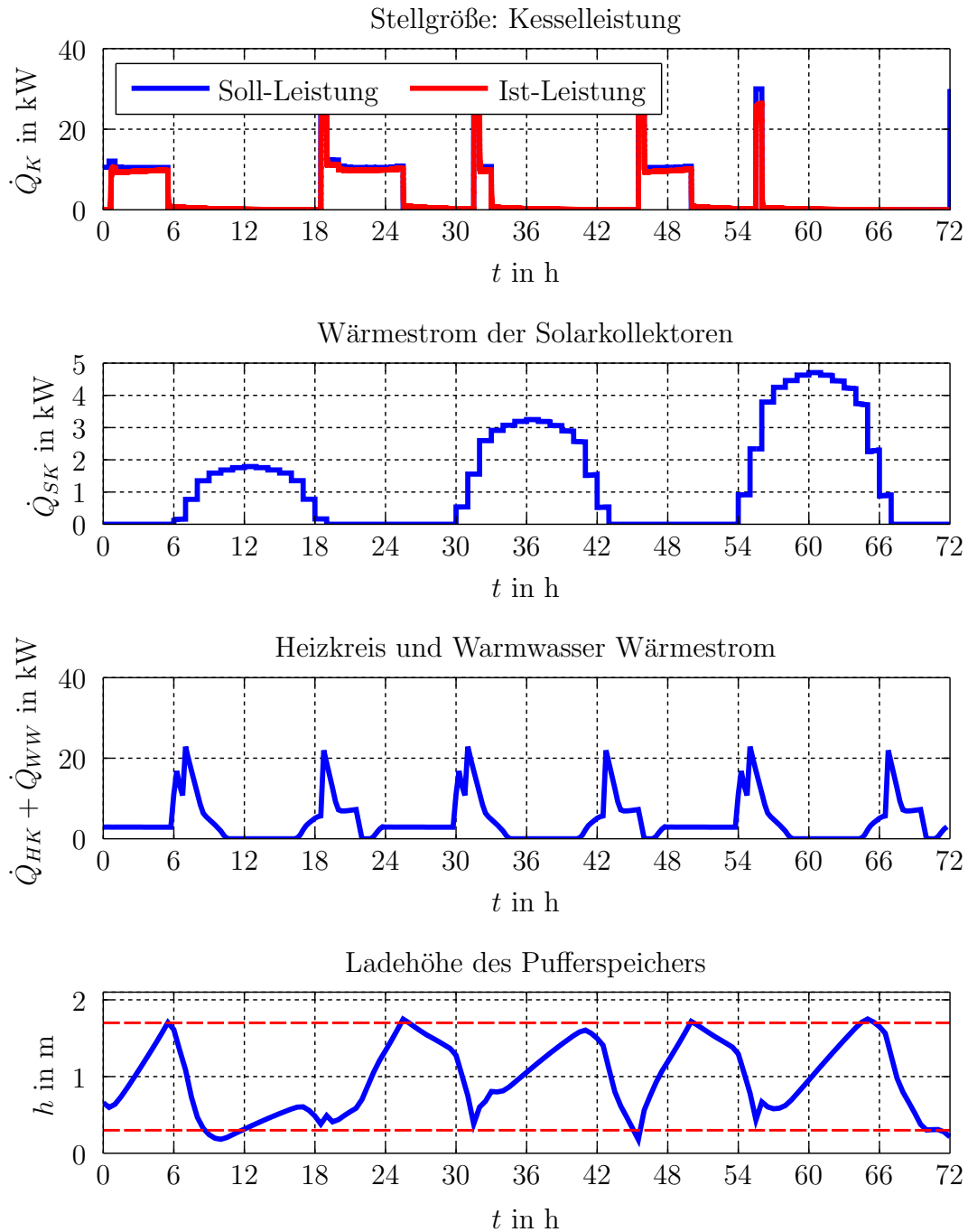


Abbildung 6.6: Simulationsstudie mit MINMPC-Regelung (Übergangszeit, heiter)

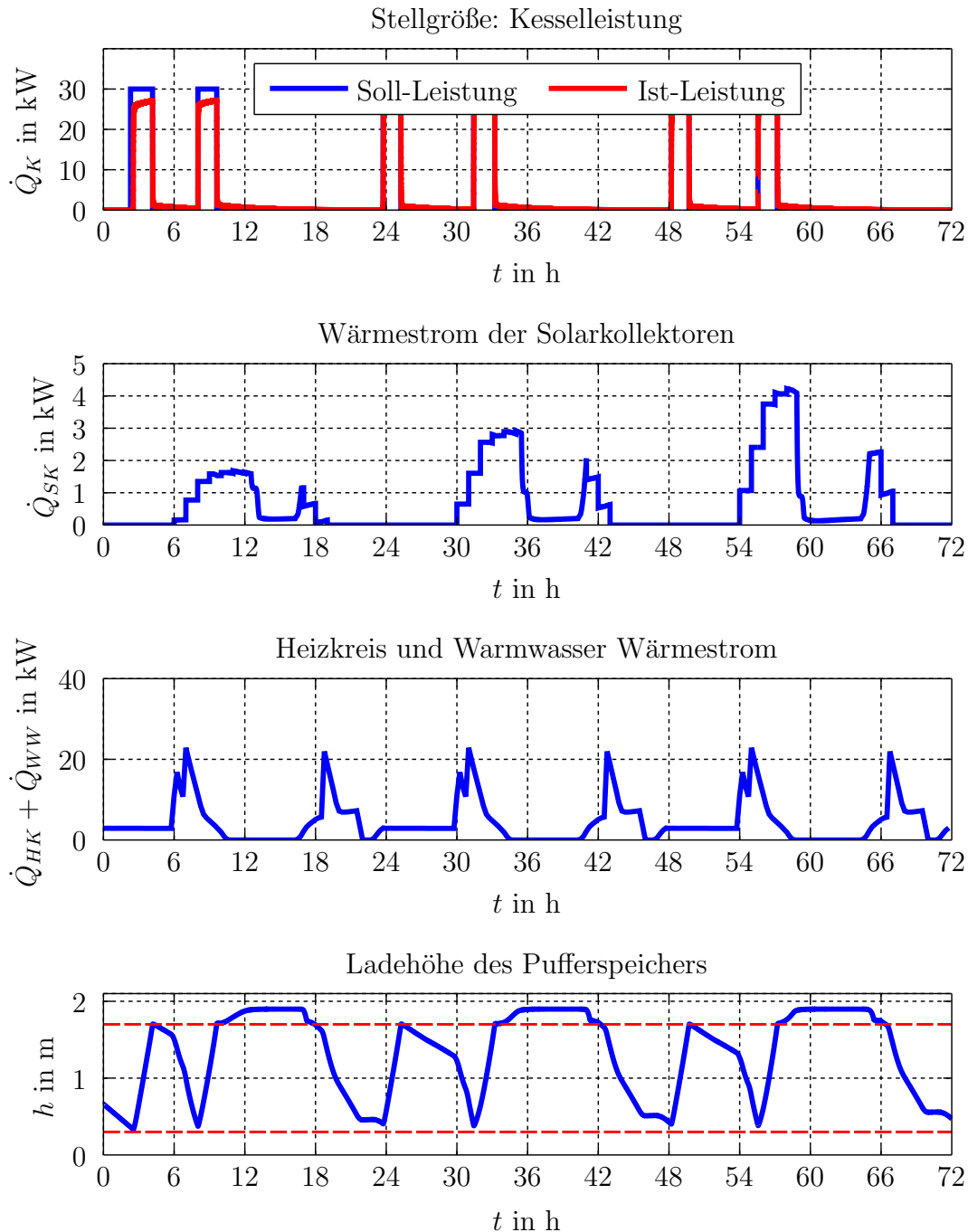


Abbildung 6.7: Simulationsstudie mit 2-Punkt Regelung (Übergangszeit, heiter)

In Tabelle 6.5 werden die pro Tag transportierten Wärmemengen gemäß Abbildung 6.3 einander gegenübergestellt. Für eine Erläuterung der Tabelleneinträge sei auf die Gleichungen (6.8) und (6.9) in Abschnitt 6.4.1 verwiesen. Es ist klar ersichtlich, dass die 2-Punkt Regelung bei jedem Tag der Simulation mehr Brennstoff $\dot{Q}_{K,Brst}$ benötigt als die MINMPC-Regelung. Dies kommt durch die schlechtere Ausnutzung des solaren Eintrags zustande. Mit dem in Tabelle 6.2 spezifizierten Heizwert H_u in J/kg würde die MINMPC-Regelung im Vergleich zur 2-Punkt Regelung in den drei simulierten Tagen eine Brennstoffersparnis von 12,6 kg ermöglichen. Diese Ersparnis errechnet sich aus der korrigierten, zugeführten

Brennstoffmenge $\tilde{Q}_{K,Brst}$. Es wird dabei jeweils tägliche Differenzenergie zwischen 2-Punkt Regelung und MINMPC-Regelung berechnet. Aus der Summe dieser Differenzen kann mittels Division durch den Heizwert H_u die Brennstoffersparnis Δm_{Brst} berechnet werden:

$$\Delta m_{Brst} = \frac{1}{H_u} \sum_{i=1}^3 \tilde{Q}_{K,Brst,2\text{ Pkt},i} - \tilde{Q}_{K,Brst,MINMPC,i}. \quad (6.10)$$

	Tag 1		Tag 2		Tag 3	
	2 Pkt	MINMPC	2 Pkt	MINMPC	2 Pkt	MINMPC
	kWh	kWh	kWh	kWh	kWh	kWh
$Q_{K,Brst}$	112,00	128,22	91,50	77,60	95,00	36,22
$Q_{K,Ist}$	99,28	112,37	88,57	74,17	90,24	36,91
Q_{SK}	10,48	16,42	15,89	30,88	20,08	45,28
ΔQ_{Puffer}	0,85	21,03	-4,69	-3,74	1,22	-26,71
$Q_{Puffer,Verl}$	5,10	4,05	5,37	4,79	5,37	4,87
$Q_{HK} + Q_{WW}$	103,88	103,88	103,88	103,88	103,88	103,88
$\tilde{Q}_{K,Brst}$	111,15	107,19	96,19	81,34	93,78	64,93

Tabelle 6.7: Gegenüberstellung der täglich zugeführten Energie sowie der erzeugten und verbrauchten Wärmemengen bei Simulation einer Serie von drei heiteren Tagen in der Übergangszeit.

	Σ	
	2 Pkt	MINMPC
	kWh	kWh
Q_{SK}	46,45	92,59
$Q_{Puffer,Verl}$	15,84	13,71
$Q_{HK} + Q_{WW}$	311,63	311,63
$\tilde{Q}_{K,Brst}$	301,13	253,46

Tabelle 6.8: Ausgewählte, aufsummierte Wärmemengen der Simulationsergebnisse aus Tabelle 6.7.

6.4.3 Winter, bewölkt

Die Simulationsstudie in diesem Abschnitt wurde unter folgenden Bedingungen durchgeführt:

- Lastprofil: Winter, bewölkt (siehe Abschnitt 6.2.1)

- Wetter: $I_{G,HZ}/\tilde{I}_{diff,HZ}$; $200 \frac{W}{m^2}/80\%$ (Tag 1); $300 \frac{W}{m^2}/80\%$ (Tag 2); $400 \frac{W}{m^2}/80\%$ (Tag 3). In dieser Angabe ist $I_{G,HZ}$ die Globalstrahlung in W/m^2 und $\tilde{I}_{diff,HZ}$ die diffuse Strahlung in Prozent der direkten Strahlung.
- Außentemperatur: $T_{Au\beta en} = 10^\circ C$.
- Starttag der Simulation (Tag des Jahres): $n = 30$.

Das jeweils erste Diagramm in den Abbildungen 6.8 und 6.9 zeigen die Soll-Leistung (blau) und die Ist-Leistung (rot) der Biomasse-Feuerung. Der Leistungsverlauf bei MINMPC-Regelung zeigt einen modulierten Betrieb der Biomasse-Feuerung im zulässigen Leistungsbereich ohne Ein- und Ausschaltvorgänge. Es wird dabei das gesamte Volumen des Pufferspeichers innerhalb der festgelegten Grenzen ausgenutzt (siehe Abbildung 6.8, Diagramm 4). Bei der 2-Punkt Regelung findet keine Modulierung der Leistung statt. Dementsprechend wird der Pufferspeicher bei der 2-Punkt Regelung immer bei voller Leistung $\dot{Q}_{K,Nenn}$ beladen, was sehr viele Schaltvorgänge und hohe Emissionen zur Folge hat.

Beim Vergleich der täglich aufgewendeten Brennstoffenergien $\tilde{Q}_{K,Brst}$ (siehe Tabelle 6.9) stellt sich allerdings die Frage, warum sich die große Anzahl an reduzierten Schaltvorgängen nicht stärker auf den Brennstoffverbrauch bei der MINMPC-Regelung auswirkt. Das hängt vorallem damit zusammen, dass für das Modell des Wärmeübertragers der Biomasse-Feuerung ein sehr kleiner Wärmeübergangskoeffizient α_{WU} (gute Isolierung) gewählt wurde. In Zeiten in denen die Biomasse-Feuerung ausgeschaltet ist, ist der Wärmeverlust der Feuerung also nur sehr gering und das Wasser im Wärmeübertrager erreicht beim nächsten Einschaltvorgang schnell wieder die zur Leistungsabgabe notwendige Temperaturschwelle $T_{VL,Schw}$. Dieser Zusammenhang wird insbesondere bei der Betrachtung des berechneten Brennstoffverbrauchs $\tilde{Q}_{K,Soll}$ in Tabelle 6.10 ersichtlich. Dieser ist bei der MINMPC-Regelung jeweils nur geringfügig niedriger als bei der 2-Punkt Regelung. Es ist allerdings zu erwähnen, dass bei der vorliegenden Simulationsstudie das Prädiktionsmodell der Biomasse-Feuerung auch als Simulationsmodell verwendet wurde. Durch die bei der Modellbildung getroffenen Vereinfachungen fallen die Stillstandsverluste der Anlage bei der Prädiktion viel geringer aus als dies bei der realen Anlage der Fall wäre. Aufgrund der Gewichtung der Schaltvorgänge im Gütefunktional und der daraus resultierenden Reduzierung der Ein- und Ausschaltvorgänge der Biomasse-Feuerung ist jedoch davon auszugehen, dass die modellprädiktive Regelung in der Realität eine viel größere Brennstoffersparnis zur Folge hätte, als dies bei den hier gezeigten Simulationsstudien der Fall ist.

Das 2. Diagramm beider Abbildungen zeigt den, aufgrund der bewölkten Wintertage, relativ niedrigen solaren Eintrag in das System. Dem ist hinzuzufügen, dass die Globalstrahlung in dieser Simulation mit 200, 300 und 400 W/m^2 für einen bewölkten Wintertag nach wie vor relativ hoch ist. Im Vergleich zur dargestellten Leistungsabnahme in den beiden 3. Diagrammen ist der solare Eintrag jedoch so gering, dass dieser keinesfalls ohne Unterstützung von der Biomasse-Feuerung den gesamten Wärmebedarf decken kann. Es wird jedoch bei der Simulation beider Regelungen der vollständige solare Eintrag genutzt. Erkennen lässt sich das an den gesamten Wärmemengen des solaren Eintrags Q_{SK} in Tabelle 6.10.

Das 4. Diagramm in Abbildung 6.8 zeigt den Verlauf der Ladehöhe im Pufferspeicher. Die Biomasse-Feuerung wird durch die Vorgabe der Kesselleistung $\dot{Q}_{K,Soll}$ so geregelt, dass Ein-/

Ausschaltvorgänge unter Ausnutzung der Kapazität des Pufferspeichers weitgehend vermieden werden. Im Gegensatz dazu wird die Biomasse-Feuerung bei der 2-Punkt Regelung (Abbildung 6.9, Diagramm 4) mit Kesselnennleistung $\dot{Q}_{K,Nenn}$ betrieben und der Pufferspeicher daher immer vollständig beladen, bevor die Feuerung wieder heruntergefahren wird.

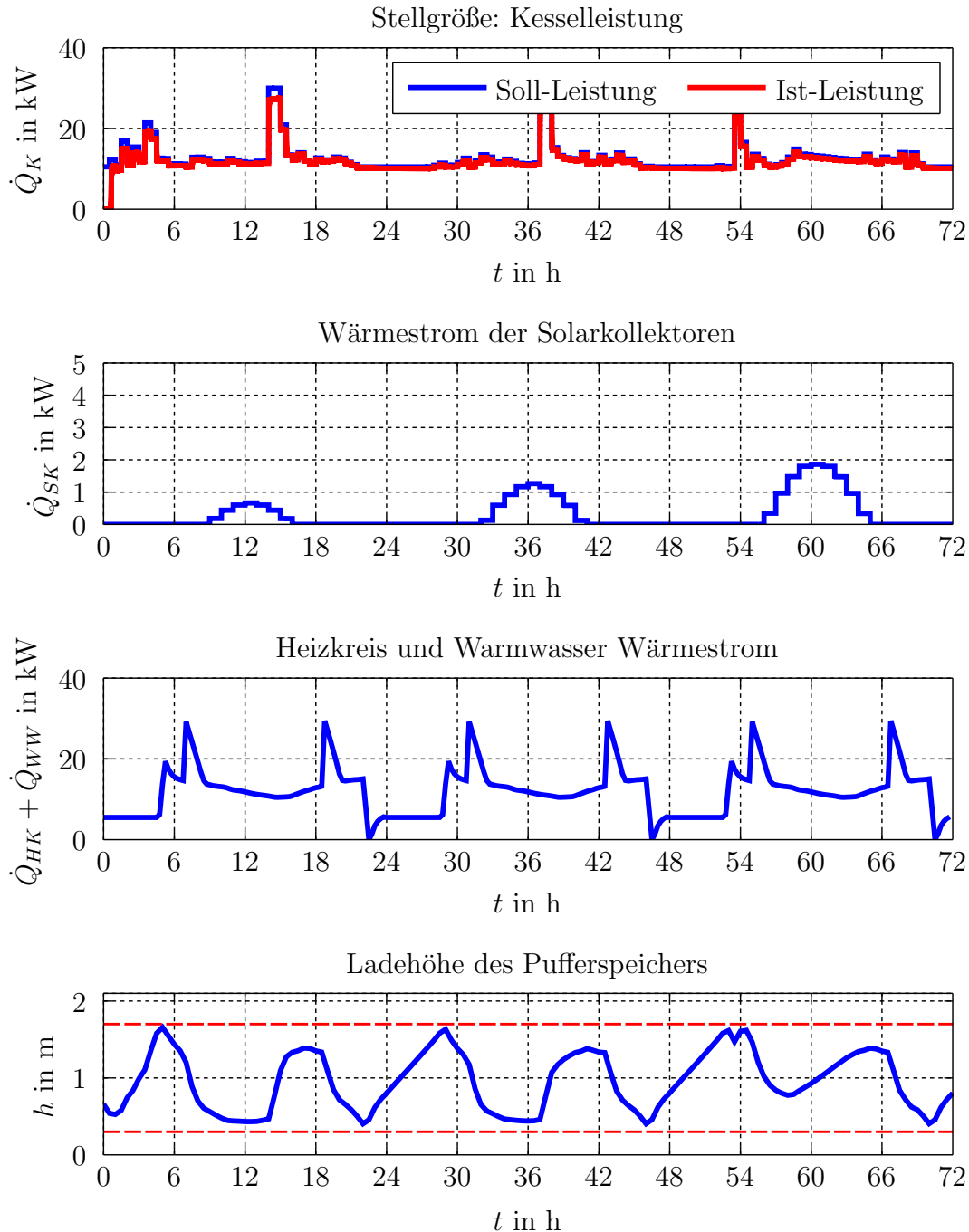


Abbildung 6.8: Simulationsstudie mit MINMPC-Regelung (Winter, bewölkt)

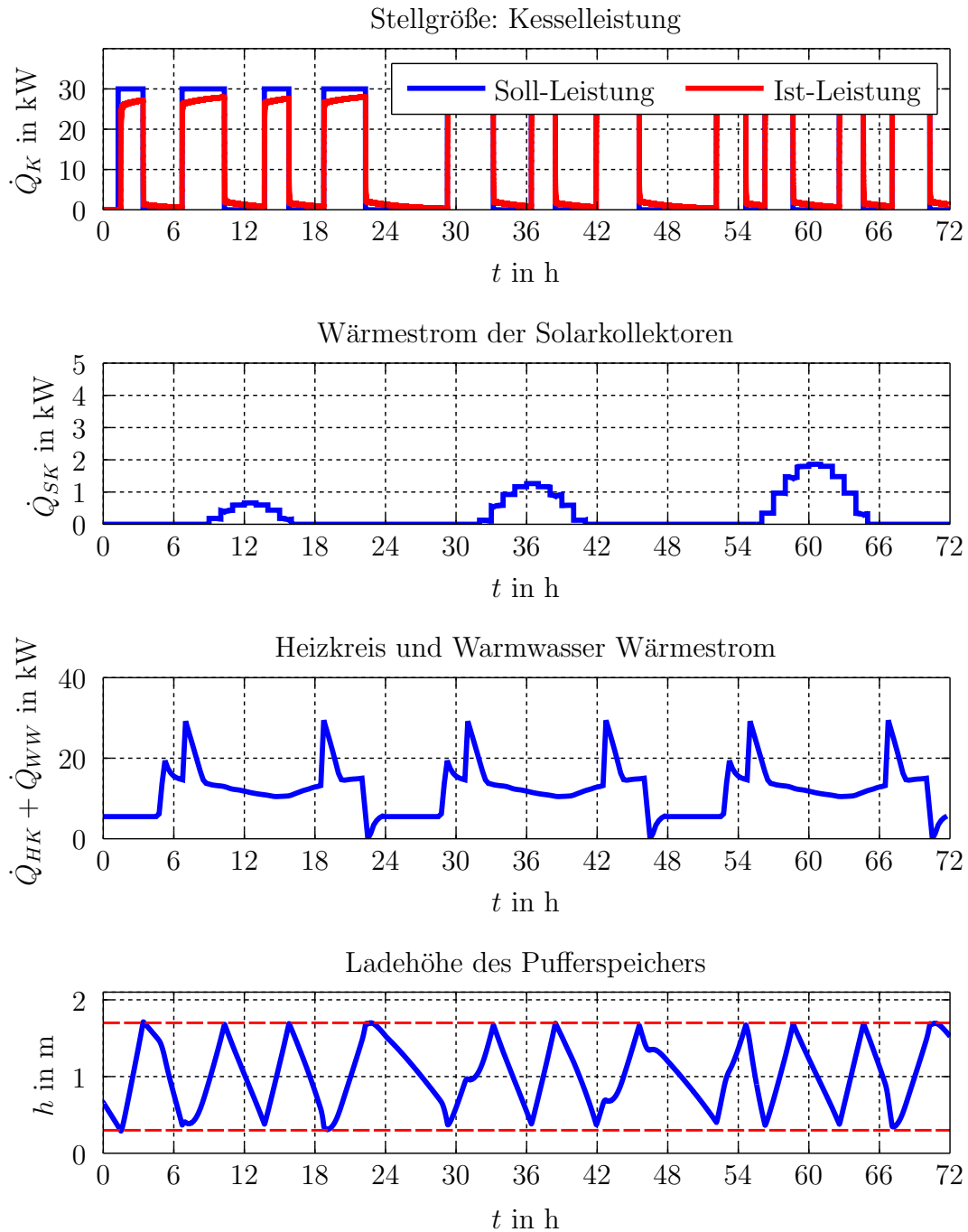


Abbildung 6.9: Simulationsstudie mit 2-Punkt Regelung (Winter, bewölkt)

	Tag 1		Tag 2		Tag 3	
	2 Pkt	MINMPC	2 Pkt	MINMPC	2 Pkt	MINMPC
	kWh	kWh	kWh	kWh	kWh	kWh
$Q_{K,Brst}$	340,50	319,74	287,50	297,91	304,50	293,71
$Q_{K,Ist}$	315,62	296,29	276,33	285,63	290,98	281,55
Q_{SK}	3,05	3,10	6,82	6,88	10,99	11,02
ΔQ_{Puffer}	26,37	7,16	-9,60	0,07	9,45	-0,08
$Q_{Puffer,Verl}$	4,64	4,38	4,72	4,55	4,69	4,77
$Q_{HK} + Q_{WW}$	287,85	287,85	287,85	287,85	287,85	287,85
$\tilde{Q}_{K,Brst}$	314,13	312,58	297,10	297,84	295,05	293,80

Tabelle 6.9: Gegenüberstellung der täglich zugeführten Energie sowie der erzeugten und verbrauchten Wärmemengen bei Simulation einer Serie von drei bewölkten Wintertagen.

	Σ	
	2 Pkt	MINMPC
	kWh	kWh
Q_{SK}	20,86	21,00
$Q_{Puffer,Verl}$	14,05	13,70
$Q_{HK} + Q_{WW}$	863,56	863,56
$\tilde{Q}_{K,Brst}$	906,27	904,21

Tabelle 6.10: Ausgewählte, aufsummierte Wärmemengen der Simulationsergebnisse aus Tabelle 6.9.

6.4.4 Winter, heiter

Die Simulationsstudie in diesem Abschnitt wurde unter folgenden Bedingungen durchgeführt:

- Lastprofil: Winter, heiter (siehe Abschnitt 6.2.1)
- Wetter: $I_{G,HZ}/\tilde{I}_{diff,HZ}$; $300 \frac{W}{m^2}/20\%$ (Tag 1); $500 \frac{W}{m^2}/20\%$ (Tag 2); $700 \frac{W}{m^2}/20\%$ (Tag 3). In dieser Angabe ist $I_{G,HZ}$ die Globalstrahlung in W/m^2 und $\tilde{I}_{diff,HZ}$ die diffuse Strahlung in Prozent der direkten Strahlung.
- Außentemperatur: $T_{Außen} = 10^\circ C$.
- Starttag der Simulation (Tag des Jahres): $n = 30$.

Die in den Abbildungen 6.10 und 6.11 gezeigten Simulationsergebnisse mit der Auswertung in Tabelle 6.11 sind vergleichbar mit den Ergebnissen des bewölkten Wintertages aus

Abschnitt 6.4.3.

Das erste Diagramm in den Abbildungen 6.10 und 6.11 zeigt jeweils die Verläufe der Soll- und Ist-Kesselleistung der Biomasse-Feuerung. Während die 2-Punkt Regelung (Abbildung 6.11) die Biomasse-Feuerung ständig ein-/ ausschaltet, wird die Leistung der Biomasse-Feuerung $\dot{Q}_{K,Soll}$ bei der MINMPC-Regelung so moduliert, dass Ein-/ Ausschaltvorgänge weitgehend vermieden werden. Betrachtet man den Verlauf der Ladehöhe des Pufferspeichers bei der MINMPC-Regelung im Diagramm 4 der Abbildung 6.10 mit dem Verlauf aus der Simulation des bewölkten Wintertags aus Abbildung 6.8, so fällt auf dass der Pufferspeicher bei der aktuellen Simulationsstudie viel näher bis an die vorgegebenen Grenzen ausgenutzt wird um Ein-/ Ausschaltvorgänge der Feuerung zu vermeiden. Der Grund hierfür liegt vorallem im verhältnismäßig höheren solaren Eintrag beim heiteren Wintertag im Vergleich zum solaren Eintrag beim bewölkten Wintertag (vgl. Abbildung 6.10, Diagramm 2 und Abbildung 6.8, Diagramm 2).

Der Vergleich der aufsummierten Wärmemengen in Tabelle 6.12 zeigt einen geringfügig niedrigeren Brennstoffverbrauch $\tilde{Q}_{K,Brst}$ bei der MINMPC-Regelung gegenüber der 2-Punkt Regelung. Generell zeigt dieser Vergleich, dass bei der Modellierung der Biomasse-Feuerung Stillstandsverluste zu gering bestraft werden. Die realen Verluste einer Biomasse-Feuerung bei Stillstand können von einer Vielzahl von Faktoren abhängen, die in dieser Arbeit nicht explizit modelliert wurden. Vielmehr wurde zur Erhaltung der Allgemeinheit der Modelle versucht, sämtliche Verluste in der Prädiktion über die Abstrahlungsverluste des Wassers im Wärmetauscher zu modellieren. Da als Simulationsmodell ebenfalls das Prädiktionsmodell verwendet wurde, fällt die Verbesserung beim Brennstoffverbrauch hier so gering aus. Würde man die Regelungen an einer realen Anlage implementieren, so wären die Unterschiede im Brennstoffverbrauch und vorallem die Unterschiede bei den Schadstoffemissionen deutlich größer zugunsten der MINMPC-Regelung.

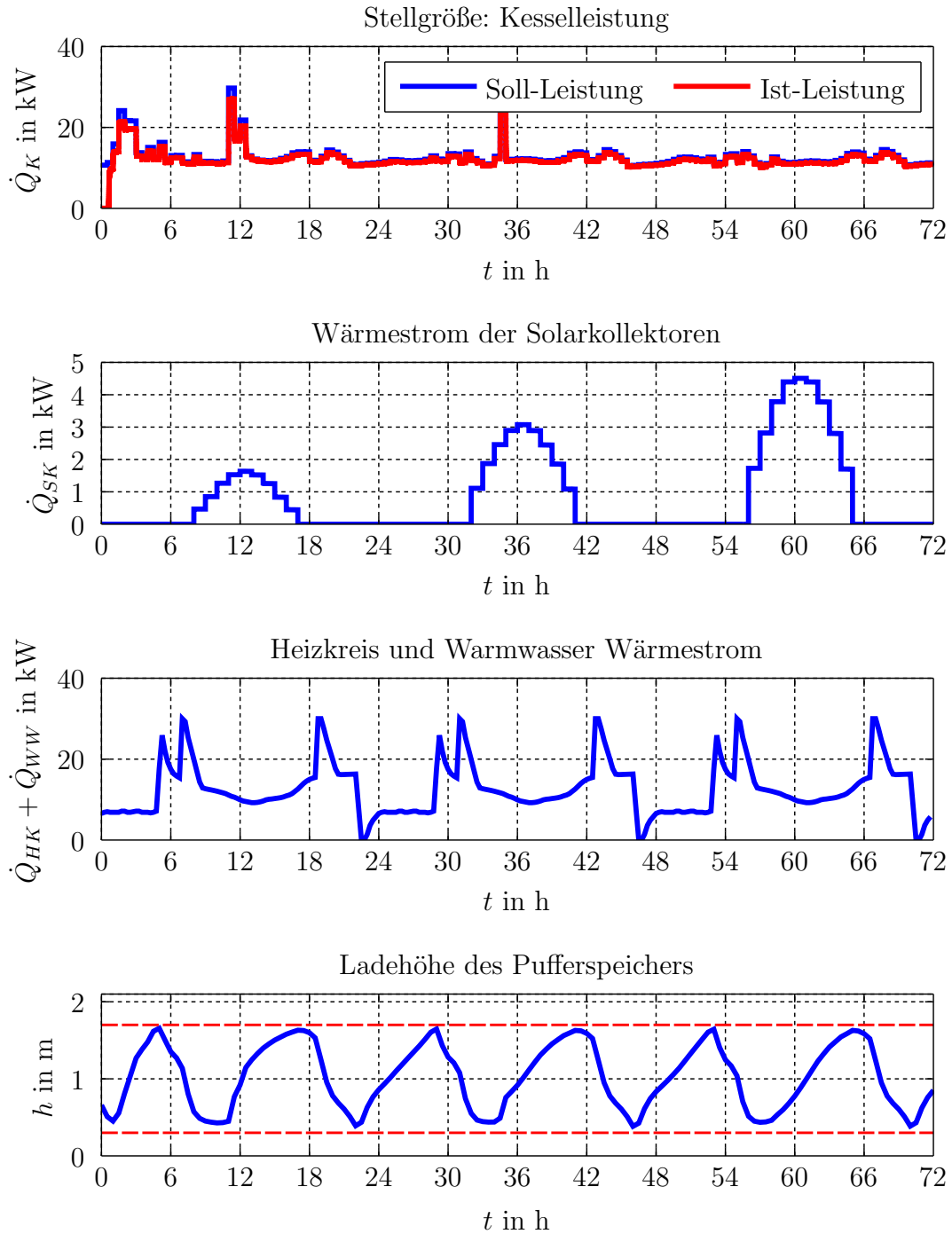


Abbildung 6.10: Simulationsstudie mit MINMPC-Regelung (Winter, heiter)

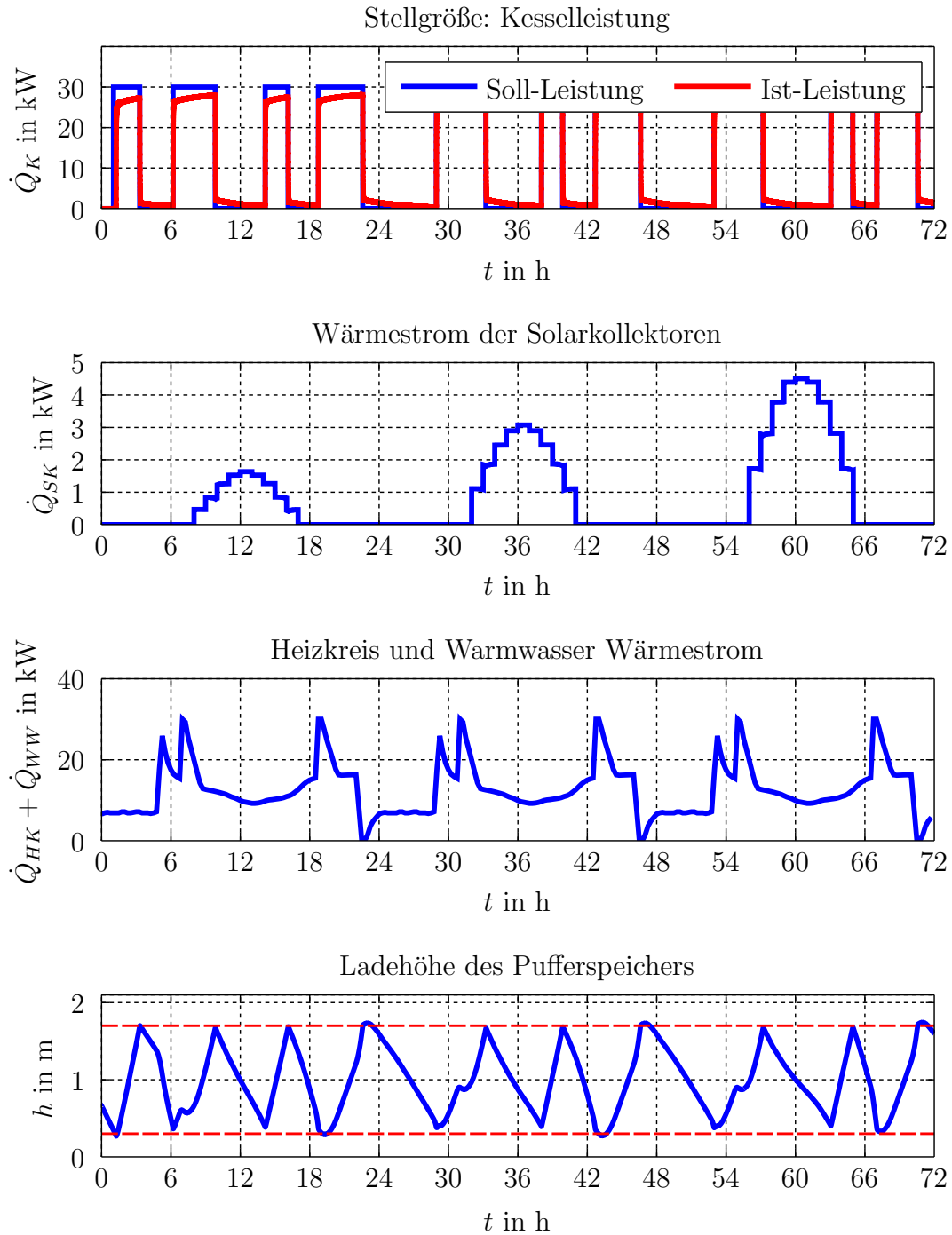


Abbildung 6.11: Simulationsstudie mit 2-Punkt Regelung (Winter, heiter)

	Tag 1		Tag 2		Tag 3	
	2 Pkt	MINMPC	2 Pkt	MINMPC	2 Pkt	MINMPC
	kWh	kWh	kWh	kWh	kWh	kWh
$Q_{K,Brst}$	352,00	333,62	301,00	299,73	290,50	290,31
$Q_{K,Ist}$	326,12	306,79	288,40	287,80	278,44	278,67
Q_{SK}	9,80	9,80	19,68	19,69	29,91	29,91
ΔQ_{Puffer}	28,10	8,55	-0,02	-0,69	0,22	0,46
$Q_{Puffer,Verl}$	4,61	4,66	4,62	4,74	4,66	4,68
$Q_{HK} + Q_{WW}$	303,41	303,41	303,41	303,41	303,41	303,41
$\tilde{Q}_{K,Brst}$	323,90	322,07	301,02	300,42	290,28	289,85

Tabelle 6.11: Gegenüberstellung der täglich zugeführten Energie sowie der erzeugten und verbrauchten Wärmemengen bei Simulation einer Serie von drei heiteren Wintertagen.

	Σ	
	2 Pkt	MINMPC
	kWh	kWh
Q_{SK}	59,38	59,40
$Q_{Puffer,Verl}$	13,89	14,08
$Q_{HK} + Q_{WW}$	910,22	910,22
$\tilde{Q}_{K,Brst}$	915,21	912,34

Tabelle 6.12: Ausgewählte, aufsummierte Wärmemengen der Simulationsergebnisse aus Tabelle 6.11.

6.5 Abweichungen bei der Prädiktion

Ziel der Simulationsstudien in diesem Abschnitt ist die Analyse des Verhaltens der MINMPC-Regelung bei falscher Prädiktion bzw. bei Abweichungen der Prädiktion der zukünftigen Systemzustände vom realen Systemverhalten. Hierfür wird das Regelungsverhalten anhand zwei verschiedener Szenarien getestet.

Im ersten Fall wird dem Warmwasserverbrauch eines bewölkten Tages in der Übergangszeit (siehe Abschnitt 6.2.1) ein zusätzlicher Verbrauch hinzugefügt. Diese zusätzliche Lastabnahme betrifft nur das Simulationsmodell, das Prädiktionsmodell im MINMPC-Algorithmus „weiß“ also nichts davon.

In der zweiten Simulationsstudie soll dann eine Abweichung des solaren Eintrags in das System betrachtet werden. Hierfür wird das Simulationsmodell mit einer realistischen Globalstrahlung (Wechsel zwischen Bewölkung und Sonnenschein) beaufschlagt. Das Prädiktionsmodell hingegen verwendet nur eine über den Tagesverlauf gemittelte Globalstrahlung.

6.5.1 Abweichung des Warmwasserverbrauchs

Die Simulation in diesem Abschnitt basiert auf der Simulationsstudie des bewölkten Tages in der Übergangszeit aus Abschnitt 6.4.1. Als einzige Änderung wurde das Lastprofil im Simulationsmodell durch einen zusätzlichen, nicht prädizierten, Warmwasserverbrauch erweitert (siehe Abbildung 6.12, Diagramm 3). Eine solche Abweichung von der Prädiktion ist durchaus realistisch und kann zum Beispiel von unregelmäßigem Duschverhalten der Hausbewohner verursacht werden.

Die Darstellung der Simulationsergebnisse erfolgt wie in den vorangegangenen Simulationsstudien gemäß der Wärmeströme. Das 1. Diagramm in Abbildung 6.12 zeigt dementsprechend die Soll-/ und Ist-Leistung der Biomasse-Feuerung. Aus diesen Leistungsverläufen kann eine Anzahl von 7 Einschaltvorgängen der Biomasse-Feuerung abgelesen werden. Der eingangs erwähnte Prädiktionsfehler (siehe Abbildung 6.12, Diagramm 3) hat im direkten Vergleich mit der Simulationsstudie in Abschnitt 6.4.1 demnach keine zusätzlichen Einschaltvorgänge der Heizung zur Folge. Allerdings kann aus dem Diagramm für die Ladehöhe des Pufferspeichers abgelesen werden, dass die Regelung durch den Prädiktionsfehler nicht das gesamte Volumen des Pufferspeichers ausnutzt. Der Grund hierfür ist die Schrittweite der Zeitdiskretisierung von $T_{NMPC} = 30$ min. Durch die große Menge an abgenommener Wärme würde sich der Pufferspeicher relativ schnell, innerhalb eines Diskretisierungsintervalls, vollständig entladen. Um die festgelegten Grenzen einzuhalten wird die Biomasse-Feuerung von der MINMPC-Regelung gestartet, obwohl der Pufferspeicher noch nicht bis an die Grenze entladen ist. Um derartigen Auswirkungen von Prädiktionsfehlern entgegenzuwirken kann zum Beispiel die Schrittweite der Zeitdiskretisierung reduziert werden. Eine solche Maßnahme würde jedoch die Anzahl der Optimierungsvariablen und somit die Berechnungszeit des Optimalsteuerungsproblems erhöhen. Mit einer Adaption der Lastprognose durch ein geeignetes Beobachtungsverfahren könnten die Auswirkungen von Prädiktionsfehlern ebenfalls deutlich reduziert werden.

Diese Simulationsstudie zeigt, dass die MINMPC-Regelung in der hier vorliegenden einfachen Konfiguration ohne die Verwendung von Beobachtern auch bei fehlerhafter Prädiktion bereits sehr gute Resultate liefert. Durch geeignete Beobachtungsstrategien, eine Reduzierung der Schrittweite der Zeitdiskretisierung und einen längeren Prädiktionshorizont kann die Robustheit und das Resultat der Regelung in Zukunft weiter verbessert werden.

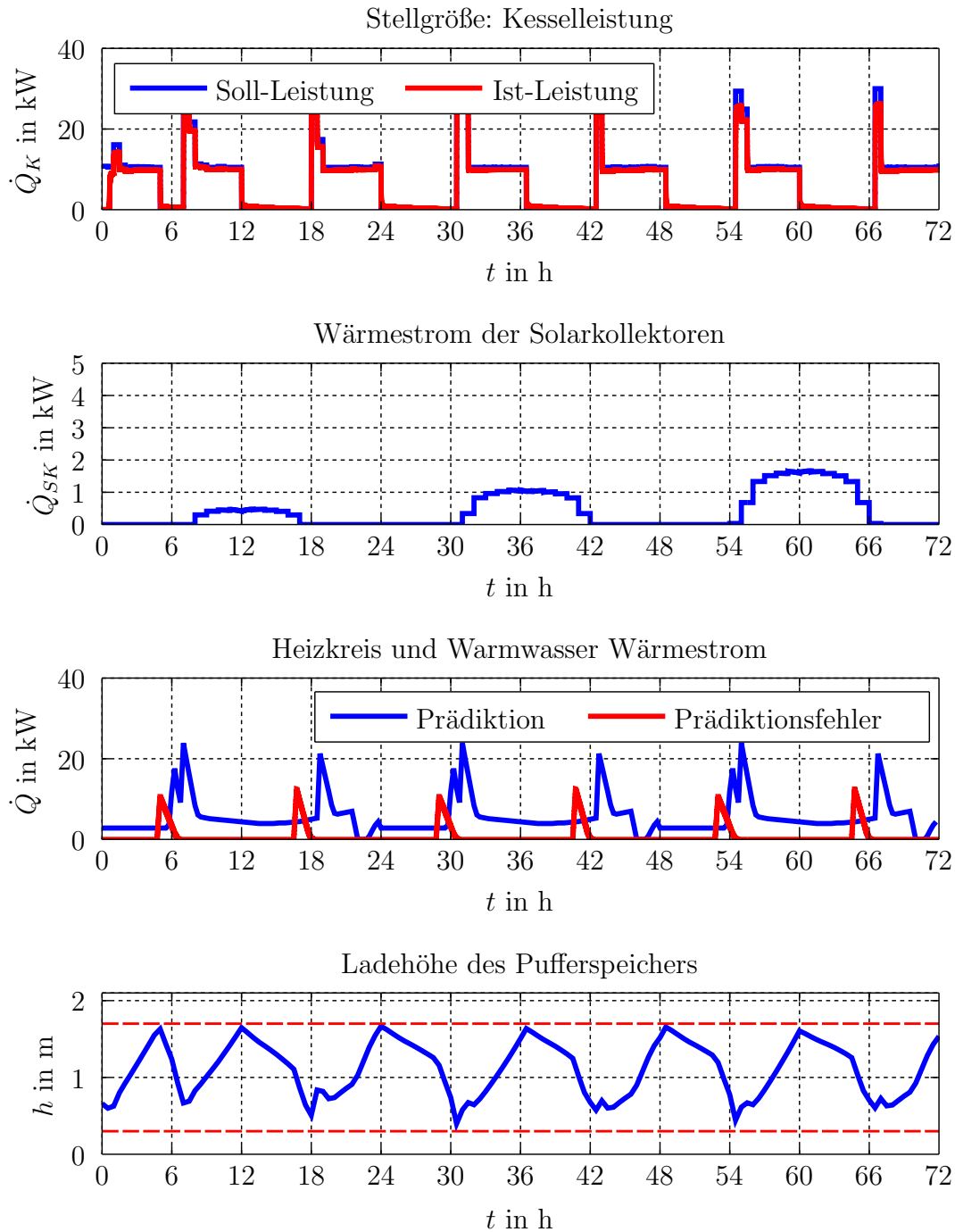


Abbildung 6.12: Simulationsstudie eines bewölkten Tages in der Übergangszeit mit fehlerhafter Vorhersage der Wärmeabnahme (zusätzlicher Warmwasserverbrauch).

6.5.2 Abweichung des solaren Eintrags

Bei der Prädiktion der zukünftigen Systemzustände kann es neben einer Abweichung von der vorhergesagten Lastanforderung vor allem zu einer Abweichung bei der Vorhersage des solaren Eintrags in das Gesamtsystem kommen. Meist liefern Wetterprognosen nur den prozentuellen Bewölkungsgrad für bestimmte Regionen und Tageszeiten. Insbesondere bei einem ständigen Wechsel von Bewölkung und Sonnenschein kann es kurzzeitig zu größeren

Abweichungen der Prädiktion von der Realität kommen. Die Simulationsstudie in diesem Abschnitt soll die Reaktion der Regelung auf eine realistische Globalstrahlung zeigen. Es wird darauf hingewiesen, dass die Prädiktion bei dieser Simulation nicht durch ein Beobachtungsverfahren auf die sich ändernde Globalstrahlung angepasst wird. Trotzdem verdeutlicht die folgende Diskussion der Ergebnisse das sehr gute Regelungsverhalten der MINMPC-Regelung.

Das 1. Diagramm in Abbildung 6.13 zeigt die Soll- und Ist-Leistung der Biomasse-Feuerung. Zwischen der Stunde 6 und 12 der Simulation zeigt der Leistungsverlauf einen kurzen Einschaltvorgang der Biomasse-Feuerung an. Zur Begründung dieses eher ungewöhnlichen Einschaltvorgangs muss die Ladehöhe des Pufferspeichers im 4. Diagramm (Abbildung 6.13) betrachtet werden. Zum Zeitpunkt des betrachteten Einschaltvorgangs erreicht die Ladehöhe des Pufferspeichers die untere Grenze. Die Prädiktion im Algorithmus der MINMPC-Regelung erkennt jedoch, dass der solare Eintrag ausreicht, dass der Pufferspeicher für die nächsten 12 h nicht die untere Ladehöhe erreichen wird. Die Feuerung wird also nur kurz gestartet. Dieser Einschaltvorgang ist demnach keine Folge der falschen Prädiktion, sondern vielmehr eine zufällige Auswirkung der verwendeten Anlagenkonfiguration. Bei den Tagen 2 und 3 ist der solare Eintrag zu gering um den Verbrauch des Heizkreises und der Warmwasserzapfstellen (siehe Abbildung 6.13, Diagramm 3) zu decken. Die Biomasse-Feuerung wird also regelmäßig, unter Ausnutzung der gesamten Pufferspeicherkapazität, gestartet.

Trotz der großen Abweichung der im Simulationsmodell und der im Prädiktionsmodell verwendeten solaren Einstrahlung auf die Solarkollektoren zeigt die MINMPC-Regelung ein äußerst gutes Regelungsverhalten. Es ist demnach davon auszugehen, dass die MINMPC-Regelung bereits in der in dieser Arbeit entwickelten Konfiguration mit den einfachen Prädiktionsmodellen aus Kapitel 4 sehr gute Regelungsergebnisse liefern würde.

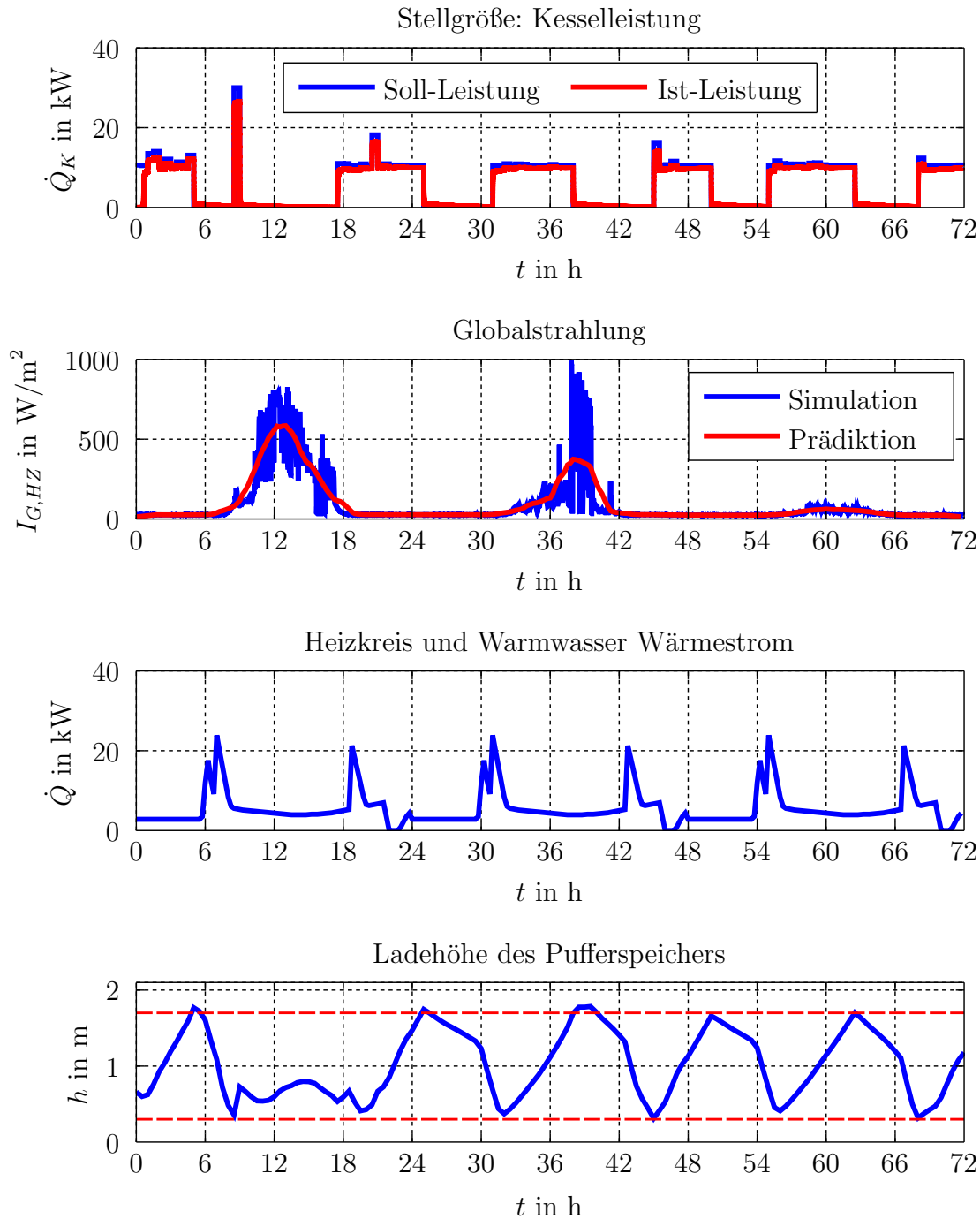


Abbildung 6.13: Simulationsstudie eines bewölkten Tages in der Übergangszeit mit fehlerhafter Vorhersage des solaren Eintrags.

6.6 Zusammenfassung

Aus den Simulationsstudien dieses Kapitels können zusammenfassend folgende Schlüsse gezogen werden. Die in dieser Arbeit entwickelte MINMPC-Regelung für eine Wärmeversorgungsanlage hat im Gegensatz zu einer herkömmlichen 2-Punkt Regelung entscheidende Vorteile. Während die Simulationsergebnisse des bewölkten Tages in der Übergangszeit

(Abschnitt 6.4.1) noch keine direkte Verbesserung des Systemverhaltens zeigten, liegen die Vorteile der neuen Regelungsstrategie bei der Simulation des heiteren Tages in der Übergangszeit (Abschnitt 6.4.2) sowie des bewölkten Wintertages (Abschnitt 6.4.3) auf der Hand. An Tagen mit hoher Globalstrahlung (Abbildung 6.7) kann es bei einer 2-Punkt-Regelung zu einer wesentlich schlechteren Ausnutzung des solaren Eintrags kommen. Die MINMPC-Regelung verringert diese Verluste bei ausreichend genauer Prädiktion vollständig, die Biomasse-Feuerung muss weniger zusätzliche Wärme liefern und die Brennstoffkosten werden somit gesenkt.

Bei der Simulation des bewölkten Wintertages spiegelt vor allem die Reduktion der Anzahl an Ein-/ und Ausschaltvorgängen bei MINMPC-Regelung die Vorteile dieser Regelungsstrategie wieder. Während die Biomasse-Feuerung bei der 2-Punkt-Regelung immer mit voller Leistung betrieben wird, erfolgt die Vorgabe der Leistung bei MINMPC-Regelung gemäß den Ergebnissen des Optimalsteuerungsproblems. Das hat aufgrund der Wahl des Gütefunktionalis eine deutlich reduzierte Anzahl an Schaltvorgängen zur Folge, was sich wiederum positiv auf die Menge der Schadstoffemissionen, die Wartungskosten sowie die Lebensdauer der Biomasse-Feuerung auswirkt.

Neben den Vorteilen, *Minimierung des Brennstoffverbrauchs durch eine bessere Ausnutzung des solaren Eintrags* und *Reduktion der Anzahl an Schaltvorgängen*, zeigten die zwei Simulationsstudien im Abschnitt 6.5 auch die Probleme der MINMPC-Regelung auf. Diese steht und fällt prinzipbedingt mit der Qualität der ihr zur Verfügung stehenden Prädiktion des zukünftigen Systemverhaltens. Ist diese nicht ausreichend genau, so kann es zu zusätzlichen Schaltvorgängen kommen. Die Simulationen haben allerdings auch gezeigt, dass die MINMPC-Regelung trotz fehlerhafter Prädiktion zuverlässig funktioniert, sehr gute Resultate liefert und dabei die vorgegebenen Grenzen einhält. Lediglich die Optimalität der Verläufe der Zustandsgrößen und Stellgrößen kann bei fehlerhafter Prädiktion nicht mehr gewährleistet werden, wobei im Vergleich zur 2-Punkt-Regelung jedoch nur in sehr ungünstigen Fällen mit einer Verschlechterung des Regelungsergebnisses zu rechnen ist.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem abschließenden Kapitel werden zunächst rückblickend die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst. Um weiterführende Arbeiten in der Thematik der Systemregelung aufzuzeigen, sollen danach in einem kurzen Ausblick einige Ideen und Vorschläge zur Erweiterung des entwickelten Regelungskonzeptes präsentiert werden.

7.1 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war der Entwurf eines modellbasierten Optimierungsalgorithmus für eine Wärmeversorgungsanlage mit Biomasse-Feuerung. In derartigen Wärmeversorgungsanlagen kommen neben einer Biomasse-Feuerung und einem oder mehreren Pufferspeichern meist Solarkollektoren zur Reduzierung der Brennstoffkosten zum Einsatz. Als Verbraucher fungieren ein Heizkreis sowie Warmwasserzapfstellen. Im Zuge einer Literaturrecherche zeigte sich die modellprädiktive Regelung als besonders geeignet für derartige Systeme. Für die Umsetzung dieser Regelungsstrategie wird zum einen die Verfügbarkeit einer ausreichend genauen Wetterprognose zur Prädiktion des solaren Eintrags in die Wärmeversorgungsanlage vorausgesetzt. Zum anderen folgt der Verlauf der Lastabnahme durch Heizkreis und Warmwasserzapfstellen in grober Näherung jahreszeitabhängigen Tageslastprofilen, welche ebenfalls zur Prädiktion herangezogen werden. Bei einer späteren Realisierung der in dieser Arbeit entwickelten Regelungsstrategie müssen diese Größen durch geeignete Schätzer ermittelt werden. In einem ersten Schritt mussten also möglichst einfache, mathematische Modelle für die gesamte Wärmeversorgungsanlage zur Prädiktion der zukünftigen Systemzustände entwickelt werden.

Für das Modell der Biomasse-Feuerung wurden zunächst drei Zustandsgrößen definiert. Diese zeigen die im jeweiligen Abschnitt der Biomasse-Feuerung gespeicherte Energie an. Die erste Zustandsgröße ist somit die Masse an trockenem Brennstoff am Brennstoffbett. Der Brennstoff verbrennt und die Energie des Rauchgases wird zum Teil in Form von Wärme im Stahl und Schamott der Feuerung gespeichert. Die gesamte, im Stahl und Schamott gespeicherte Energie wird von der zweiten Zustandsgröße abgebildet. Das restliche Rauchgas gibt wiederum einen Großteil seiner Energie in einem Wärmeübertrager an den Wasserkreis ab, wobei die gespeicherte Wärmeenergie im Wasser des Wärmeübertragers (samt Rücklaufanhebung) durch die dritte und letzte Zustandsgröße beschrieben wird.

Weiters war es notwendig für dieses Modell die 3 Systemmodi *Anfahren*, *Nennbetrieb* und *Abkühlen* festzulegen. Die Dynamik der Zustandsgrößen sowie die Ausgangsgleichungen ändern sich in Abhängigkeit des Zustandsvektors und der Eingangsgrößen. Um dieses Verhalten mathematisch beschreiben zu können, wurde auf ein hybrides Modell zurückgegriffen (siehe Kapitel 2.3). Die Umschaltung der Differentialgleichungen erfolgt in Abhängigkeit der Systemzustände sowie der Eingangsgrößen, wobei jeder Systemmodus die selben Zustandsgrößen hat.

Das Modell des Pufferspeichers basiert auf der Überlegung, dass in einem ideal geschichteten Pufferspeicher zwei Temperaturzonen mit einer sehr kleinen Übergangszone ausgeprägt sind. Diese Übergangszone wird durch die Wärmeleitfähigkeit des Wassers im Laufe der Zeit größer. Die notwendigen Zustandsgrößen zur Beschreibung dieser Eigenschaften können demnach wie folgt festgelegt werden: Temperatur der oberen Wasserschicht, Temperatur der unteren Wasserschicht, Höhe der Übergangszone und Aufweitung der Übergangszone. Zusammen mit einem statischen Modell der Solarkollektoren kann das Prädiktionsmodell der Wärmeversorgungsanlage als nichtlineares, dynamisches Hybridsystem mit einer gemischt-ganzzahligen Eingangsgröße bezeichnet werden. In weiterer Folge galt es für dieses Gesamtsystem eine modellprädiktive Regelung zu entwerfen.

Um das Verständnis für den Entwurfsvorgang zu erleichtern, wurden in Kapitel 2, Abschnitt 2.1 zunächst die Grundlagen von Optimalsteuerungsproblemen diskutiert. Ziel einer Optimalsteuerung ist es, für ein System mit gegebener Systembeschreibung eine, im Sinne eines Gütefunktional optimalen Stellgrößenfolge unter der Einhaltung von Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen zu berechnen. Das zunächst kontinuierliche Optimalsteuerungsproblem (OCP) wird dann durch Anwendung der Methode des direkten Mehrfachschießverfahrens diskretisiert, wodurch man ein nichtlineares mathematisches Programm (NLP) erhält. Diese mathematischen Programme werden dann mittels Gradientenverfahren gelöst. Es wird darauf hingewiesen, dass die Entwicklung dieser Lösungsverfahren für NLPs nicht Teil der vorliegenden Arbeit war. Durch eine zeitlich aufeinanderfolgende Berechnung dieser Stellgrößenverläufe wird aus der Optimalsteuerung eine Regelung (siehe Kapitel 2, Abschnitt 2.2).

Da die im Kapitel 2 beschriebenen Grundlagen nur auf nichtlineare Systembeschreibungen angewendet werden können, das Prädiktionsmodell für die Wärmeversorgungsanlage jedoch eine hybride nichtlineare Systembeschreibung mit gemischt-ganzzahligen Eingangsgrößen hat, wurde das kontinuierliche OCP in Kapitel 3 für diese Klasse von Systemen erweitert. Das hybride Modell wird hierfür zunächst durch Glättung der Zustandstrajektorien in ein kontinuierliches Modell mit einer gemischt-ganzzahligen Eingangsgröße transformiert. Nach Äußerer Konvexifizierung wird dieses gemischt-ganzzahlige Optimalsteuerungsproblem (MIOCP) wiederum mittels direktem Mehrfachschießverfahren diskretisiert. Das Ergebnis dieser Diskretisierung ist ein gemischt-ganzzahliges nichtlineares mathematisches Programm (MINLP), welches nach Relaxierung der ganzzahligen Stellgrößen mit einem Standardverfahren gelöst werden kann. Weiters wurden in Kapitel 3 verschiedene Rundungsstrategien (siehe Abschnitt 3.4) zum Ermitteln einer zulässigen Lösung aus dem relaxierten Ergebnis des MINLPs vorgestellt. Im Kapitel 3, Abschnitt 3.5 wurde das Gütefunktional des MINLP hinsichtlich einer Minimierung der Schaltvorgänge in der gemischt-ganzzahligen Stellgrößenfolge erweitert.

Nach einer ausführlichen Dokumentation vom Entwurf der Prädiktionsmodelle in Kapitel 4 wurde im Kapitel 5 das MIOCP für das Modell der Wärmeversorgungsanlage entwickelt und in Kapitel 6 anhand ausführlicher Simulationsstudien validiert. Im Zuge dieser Simulationsstudien zeigten sich deutlich die Vor-/ als auch die Nachteile dieser neuen Regelungsstrategie gegenüber herkömmlichen Regelungen derartiger Anlagen.

Vorteile zeigten sich vor allem bei den Simulationen von Tagen mit hohem solarem Eintrag, sowie von Tagen mit hohem Wärmebedarf von seiten des Heizkreises. An sonnigen Tagen haben herkömmliche Regelungsstrategien oft das Problem, dass der Pufferspeicher durch vorheriges, unkoordiniertes Beladen durch die Biomasse-Feuerung zu wenig Restvolumen für den gesamten solaren Eintrag hat. Dadurch wird unter Umständen viel Energie nicht genutzt. Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte, modellprädiktive Regelungsstrategie berücksichtigt bei der Ansteuerung der Biomasse-Feuerung den zukünftig erwarteten solaren Eintrag und sorgt dafür, dass der Pufferspeicher zu jedem Zeitpunkt im Prädiktionshorizont über ausreichend Restkapazität verfügt. Diese effizientere Ausnutzung der Pufferspeicherkapazität resultiert in einem reduzierten Brennstoffverbrauch der Biomasse-Feuerung und somit in einer Senkung der Betriebskosten.

Wie bereits erwähnt, zeigt sich ein weiterer Vorteil an Tagen mit hohem Wärmebedarf des Heizkreises. Während die Biomasse-Feuerung bei einer herkömmlichen Systemregelung in Abhängigkeit von der Gesamtkapazität des Pufferspeichers über den Simulationszeitraum sehr oft ein- und ausgeschaltet wird, sorgt die modellprädiktive Regelung in dieser Arbeit dafür, dass die Schaltvorgänge der Biomasse-Feuerung durch eine, im Sinne eines Gütefunktional optimalen, Vorgabe der Leistung minimiert werden. Diese Reduktion der Schaltvorgänge durch eine Modulierung der Leistung hat bei näherer Betrachtung enorme Vorteile. In den Zeiten von Start-/ Stopvorgängen entstehen aufgrund der unvollständigen Verbrennung der Biomasse zum einen sehr hohe Schadstoffemissionen. Zum anderen kommt es vermehrt zu Kondensation aufgrund der reduzierten Temperaturen. Eine verringerte Lebensdauer der Anlage sowie erhöhte Wartungskosten sind die Folge.

Die Simulationsstudien hinsichtlich der Auswirkungen von Abweichungen beim angenommenen zukünftigen solaren Eintrag sowie der erwarteten Lastabnahme in Abschnitt 6.5 haben gezeigt, dass die modellprädiktive Regelung bei einer unzureichenden Vorhersage des zukünftigen Systemverhaltens noch Schwachstellen hat. Diese machen sich hauptsächlich durch zusätzliche Ein-/ Ausschaltvorgänge der Biomasse-Feuerung bemerkbar. Es ist allerdings zu erwähnen, dass die hier simulierten Prädiktionsfehler mit Sicherheit Extremfälle sind, welche bereits durch einfache Beobachtungsstrategien der Zustandsvariablen deutlich reduziert werden können.

7.2 Ausblick

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit werden einige Ideen zur Erweiterung der hier entwickelten modellprädiktiven Regelungsstrategie für Wärmeversorgungsanlagen aufgezeigt. Diese könnten bei einer späteren Implementierung der Regelung an einer realen Anlage unter Umständen eine Verbesserung des Regelverhaltens bewirken.

Alternative zu den Rundungsstrategien

Die in Abschnitt 3.4 diskutierten Rundungsstrategien resultieren in vielen Fällen in einer Abweichung der realen Stelltrajektorien von den optimalen Trajektorien. Diese Abwei-

chungen treten vor allem dann auf, wenn die Biomasse-Feuerung ein- bzw. ausgeschaltet wird. Im schlimmsten Fall führen derartige Rundungsfehler zu Verletzungen der Systembeschränkungen. Komforteinbußen sowie höhere Emissionen der Feuerung können die Folge sein.

Als Alternative zu den Rundungsstrategien bieten sich zum Beispiel Methoden an, bei denen die einzelnen Abtastzeitpunkte der relaxierten Optimalsteuerungen durch ein weiteres Optimierungsproblem variiert werden. Durch diese Anpassung der Abtastzeitpunkte können die Intervalle so gewählt werden, dass aus der ursprünglich relaxierten Optimalsteuerung eine gemischt-ganzzahlige Optimalsteuerung wird.

Berücksichtigung der Berechnungszeit

Bei den Simulationsstudien der vorliegenden Arbeit wird stets vorausgesetzt, dass die Berechnungen der einzelnen Optimalsteuerungen in vernachlässigbar kurzer Zeit durchgeführt werden können. In der praktischen Anwendung einer solchen Regelung kann jedoch vorallem die Berechnung des NLPs eine nicht zu vernachlässigende Zeit in Anspruch nehmen. Zur Reduktion der Berechnungsdauer wurden bereits diverse Maßnahmen ergriffen. Zum Beispiel konnten durch eine Implementierung der Prädiktionsmodelle in C-Code sehr viel kürzere Berechnungszeiten erreicht werden. Weiters kann die Optimierung beschleunigt werden, indem die Anzahl der Iterationen des jeweils verwendeten NLP-Lösungsverfahrens begrenzt wird. Selbstverständlich kann eine solche Begrenzung der Iterationen insbesondere direkt nach dem Start der Regelung zur Folge haben, dass die resultierende Optimalsteuerung nicht optimal ist bzw. eine Abweichung zum Optimum besteht. Allerdings wird diese Abweichung durch die Wahl der Startwerte der jeweils nächsten Iteration (siehe Abschnitt 2.2.2) mit der Zeit entsprechend kleiner.

Ein OCP aus den Simulationsstudien dieser Arbeit hat bei $N = 24$ Diskretisierungsintervallen, mit den Shooting-Nodes, den kontinuierlichen und diskreten Stellgrößen sowie den zusätzlichen Optimierungsparameter für die Minimierung der Schaltvorgänge 240 Optimierungsvariablen. Die Berechnung einer Optimalsteuerung dauerte auf einem Rechner mit 3GHz CPU und 8,00GB installiertem Arbeitsspeicher unter Ausnutzung von 3 Rechenkernen etwa 1 Minute.

Diese Zeit kann mit Sicherheit weiter reduziert werden, indem neben dem Prädiktionsmodell auch der Optimierungsalgorithmus in C-Code implementiert wird. Vor allem bei vielen verschachtelten Funktionen steigt die Ausführungszeit von Matlab-Code signifikant an.

Ist die Berechnungszeit nach Ausreizung aller Möglichkeiten immer noch nicht kurz genug, so wird zu deren Kompensation in [18] ein zeitlich entkoppelter Algorithmus vorgestellt. In einfachen Worten wird hierbei ein Zustand zum Zeitpunkt t gemessen. Ausgehend von diesem Zustand wird der Zustand zum Zeitpunkt $t + \tau$ prädiziert. Diesen prädizierten Zustand verwendet die Optimierung dann als Startwert. Entscheidend ist, dass die Zeit τ größer als die längste vorkommende Berechnungszeit des MIOCPs ist.

Besseres Pufferspeichermodell zur Prädiktion

Um eine Verbesserung der Prädiktion des zukünftigen Systemverhaltens zu erreichen, kann das einfache Prädiktionsmodell des Pufferspeichers aus Kapitel 4 durch das komplexere und genauere Modell aus [15] ersetzt werden. Ob sich die größere Komplexität dieses Modells nach Implementierung in C-Code negativ auf die Simulationszeit auswirkt, wäre dabei anhand einer konkreten Implementierung zu bewerten.

Literaturverzeichnis

- [1] ATKINSON E.K., HAN W., STEWARD D.E.: *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc, 2009.
- [2] BIERMAYR P., EBERL M., ENIGL M., FECHNER H., KRISTÖFEL CH., LEONHARTSBERGER K., MARINGER F., MOIDL ST., STRASSER CH., WEISS W., WÖRGETTER M.: *Innovative Energietechnologien in Österreich: Marktentwicklung 2013*. Technischer Bericht, Bundesministerium für Verkehr, Innovation und Technologie, 2014.
- [3] BOCK H., PLITT K.: *A Multiple Shooting algorithm for direct solution of optimal control problems*. IFAC, 9th World Congress, Seiten 242 – 247, 1984.
- [4] BYRD R.H., GILBERT J.C., NOCEDAL J.: *A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming*. *Mathematical Programming*, 89(1):149–185, 2000.
- [5] BYRD R.H., HRIBAR M.E., NOCEDAL J.: *An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming*. *SIAM Journal on Optimization*, 9(4):877–900, 1999.
- [6] DIETACHMAYR, F. W.: *Modellierung und Regelung von Biomasse-Thermoölkesselanlagen*. Masterarbeit, Technische Universität Graz, 2013.
- [7] DUFFIE, JOHN A. und WILLIAM A. BECKMAN: *Solar Engineering of Thermal Processes*. John Wiley & Sons, 4. Auflage Auflage, 2013.
- [8] FEHLBERG E.: *Klassische Runge-Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme*. *Computing*, 6(1-2):61–71, 1970.
- [9] GÖLLES M.: *Entwicklung mathematischer Modelle einer Biomasserostfeuerungsanlage als Grundlage für modellbasierte Regelungskonzepte*. Dissertationsschrift, Technische Universität Graz, 2008.
- [10] GÖLLES M., BAUER R., BRUNNER T., DOURDOUMAS N., OBERNBERGER I.: *Model Based Control of a Biomass Grate Furnace*. In: *European Conference on Industrial Furnaces and Boilers*, Band 9, Seiten 1–10, 2011.
- [11] GÖLLES M., REITER ST., BRUNNER T., DOURDOUMAS N., OBERNBERGER I.: *Modeling of a Small-Scale Biomass Boiler as a Basis for Model Based Control Strategies*. In: *European Biomass Conference and Exhibition*, Band 20, Seiten 739–745, 2012.

- [12] GÖLLES M., REITER ST., BRUNNER T., DOUROUMAS N., OBERNBERGER I.: *Model based control of a small-scale biomass boiler*. Control Engineering Practice, 1(22):94–102, 2014.
- [13] HARTL R. F., SETHI S.P., VICKSON R. G.: *A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems with State Constraints*. SIAM Review, 37(2):181–218, 1995.
- [14] HECKMANN M., FRIEDL G., SCHWARZ M., ROSSMANN P., HARTMANN H., BAUMGARTNER H., LASSELSBERGER L., THEMESSL A.: *Bestimmung von Jahresnutzungsgrad und Emissionsfaktoren von Biomasse-Kleinf Feuerungen am Prüfstand*. Projektendbericht, Bioenergy2020+, 2010.
- [15] HEMMER J.: *Modellierung und Regelung von Pufferspeichern in Biomasseheizungen*. Masterarbeit, Technische Universität Graz, 2014.
- [16] KIRCHES CH.: *Fast Numerical Methods for Mixed-Integer Nonlinear Model-Predictive Control*. Dissertationsschrift, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 2010.
- [17] KUGI A.: *Optimierung: Vorlesung und Übung*. TU Wien: Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, 2011/2012.
- [18] LARS G., PANNEK J.: *Nonlinear Model Predictive Control: Theory and Algorithms*. Springer, 2011.
- [19] LUNZE J., LAMNABHI-LAGARRIGUE F.: *Handbook of Hybrid Systems Control: Theory, Tools, Applications*. Cambridge, 2009.
- [20] MAGARIL-IL'YAEV G. G.: *The Pontryagin Maximum Principle: Statement and Proof*. Doklady Mathematics, 85(1):14–17, 2012.
- [21] MYNTINNEN I.: *Optimierung autonom schaltender dynamischer Hybridsysteme*. Dissertationsschrift, Technische Universität Ilmenau, 2013.
- [22] PAPAGEORGIOU M., LEIBOLD M., BUSS M.: *Optimierung: Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [23] REITER ST., GÖLLES M., BRUNNER T., DOUROUMAS N., OBERNBERGER I.: *Modellierung einer Biomasse-Kleinf Feuerungsanlage als Grundlage für modellbasierte Regelungsstrategien*. In: *Steirisches Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung*, Band 17, 2011.
- [24] SAGER S.: *Numerical methods for mixed-integer optimal control problems*. Der andere Verlag, 2005.
- [25] SEEGER R., GÖLLES M., BRUNNER T., DOUROUMAS N., OBERNBERGER I.: *Erweiterung eines modellbasierten Regelungskonzepts für Biomassefeuerungsanlagen*. Automatisierungstechnik, 62(12):891–902, 2014.

- [26] UNTERBERGER V.: *Modellierung und Regelung von Biomasse-Rauchrohrdampfkesselanlagen*. Masterarbeit, Technische Universität Graz, 2013.
- [27] *Referenzlastprofile von Ein- und Mehrfamilienhäusern für den Einsatz von KWK-Anlagen*. VDI 4655, Mai 2008.
- [28] ZEMANN C., HEINREICHBERGER O., GÖLLES M., BRUNNER T., DOURDOUMAS N., OBERNBERGER I.: *Application of a Model Based Control Strategy at a Fixed Bed Biomass District Heating Plant*. European Biomass Conference and Exhibition Proceedings, 22:1698–1705, 2014.

Abkürzungsverzeichnis

MPC	Modellprädiktive Regelung (engl.: Model Predictive Control)
NMPC	Nichtlineare Modellprädiktive Regelung
ODE	Gewöhnliche Differentialgleichung (engl.: Ordinary Differential Equation)
NLP	Nichtlineares Mathematisches Programm
OCP	Optimalsteuerungsproblem (engl.: Optimal Control Problem)
MIOCP	Gemischt-Ganzzahliges Optimalsteuerungsproblem
NLP	Nichtlineares Programm
MINLP	Gemischt-Ganzzahliges Nichtlineares Programm
MINMPC	Gemischt-Ganzzahlige Nichtlineare Modellprädiktive Regelung