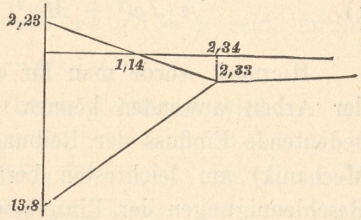
Die Umkehr der Kugel erfolgt übrigens schon während des Gleitens. Nach der Zeit $t = c : (fg) = 2{,}23 : 1{,}962 = 1{,}14$ Sek. und nachdem die Kugel sich um $s' = 2{,}23 \cdot 1{,}14 \cdot 0{,}5 = 1{,}27$ m nach rechts bewegt hat, ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes nach rechts Null geworden, kehrt dann während des Restes der Gleitzeit, d. h. während der Zeit $t'' = 2{,}34 - 1{,}14 = 1{,}20$ Sek. um $s'' = 2{,}33 \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}5 = 1{,}4$ m gleitend nach links zurück. An dem um 0,13 m links von der Ausgangsstelle gelegenen Punkte beginnt erst das Rollen, welches sich dann mit der Geschwindigkeit 2,33 m/s. fortsetzt. Fig. 387 zeigt die Geschwindigkeitsgesetze der Bewegungen.

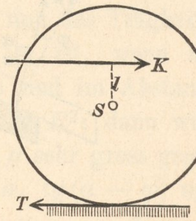
Fig. 387.



Beispiel 2: Wirkt auf eine auf wagerechter Ebene anfänglich ruhende Kugel eine wagerechte Kraft K, die um l oberhalb des Schwerpunktes liegt, nach rechts und soll eine Rollbewegung entstehen, so ist am Auflagerpunkte ein Widerstand T erforderlich, den wir nach links gerichtet annehmen wollen (Fig. 388). Die Beschleunigung des Schwerpunktes p (S. 142) und die Winkelbeschleunigung ε der Drehung (S. 276) werden dann

$$p = \frac{K - T}{M}; \quad \varepsilon = \frac{Kl + Tr}{\mu r^2}.$$

Fig. 388.



Für Rollbewegung muss nun $r\varepsilon = p$ sein, oder

$$K\mu r - T\mu r = KMl + TMr.$$

Hieraus bestimmt sich

$$T = K\frac{\mu r - Ml}{(M + \mu) r}.$$

Für $l = 0$ wird $T = K : \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) = {}^2/_7 K$. Für $l = r$ wird T negativ, nämlich $T = -K\frac{M - \mu}{M + \mu} = -{}^3/_7 K$. Soll aber die Kraft K ohne jede Mitwirkung von T, d. h. auf völlig glatter Ebene eine Rollbewegung erzeugen, soll $T = 0$ sein, so wird $l : r = \mu : M = 0{,}4$, d. h. $l = {}^2/_5 r$. In dieser Höhe darf eine Kugel beliebig heftig gestossen werden, ohne dass sie unten gleitet; sie wird sofort eine Rollbewegung beginnen.

e) Beschleunigte Schraubenbewegung.

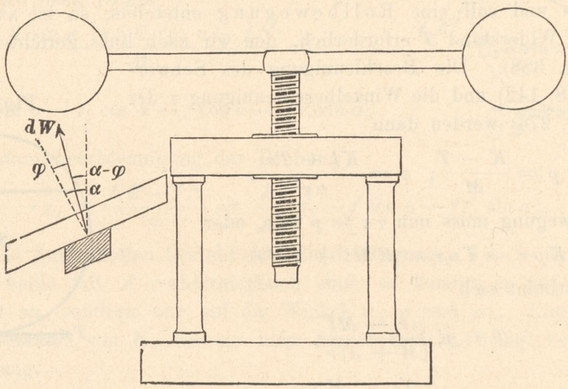
Die Schraubenbewegung besteht aus einer Drehung um die Achse der Schraube und einer gleichzeitigen Verschiebung längs der Achse. Sind die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen ω und u, so ist das Arbeitsvermögen der Schraube $\frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} Mu^2$ (S. 296). Weil aber bei der Schraube vom mittleren Halbmesser r, dem Steigungswinkel α der mittleren Schraubenlinie und der Ganghöhe h $2 r \pi \operatorname{tg} \alpha = h$, so ist auch $r \omega \operatorname{tg} \alpha = u$, also mit $J = \mu r^2$

$$1) \qquad {}^1\!/_2 (J\omega^2 + Mu^2) = {}^1\!/_2 \left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + M \right) u^2.$$

Hiernach würde man für eine ideelle Schraube leicht den Satz der Arbeit anwenden können. Der bei wirklichen Schrauben sehr bedeutende Einfluss der Reibung kann aber (nach A. Ritter, Techn. Mechanik) am leichtesten berücksichtigt werden, wenn man die Beschleunigungen der Einzelbewegungen berechnet.

Die Schraube sei flachgängig und oben mit Schwungkugel-Armen versehen (Fig. 389). Solche Schrauben kommen in Präge-

Fig. 389.



werken und in Hüttenwerken (zum Zerbrechen von Eisenstäben) vor. Die Schrauben werden durch Arbeiter in die Höhe gedreht und sind nicht selbsthemmend, vielmehr gewinnen sie durch ihr Gewicht (z. Th. unter Nachbülfe der Arbeiter) ein gewisses Arbeitsvermögen, welches dann zum Zerbrechen verbraucht wird. Die treibende Kraft sei allein die Schwere Mg. Ein Theilchen der Schraubenmutter leistet beim Abwärtsgleiten einen Widerstand dW, der um $\alpha - \varphi$ von der Achsenrichtung abweicht.

Der Schwerpunkt der Schraube kann sich nur geradlinig bewegen; die Beschleunigung p des Schwerpunktes folgt aus der Gleichung

$$2) \qquad Mp = Mg - \cos(\alpha - \varphi) \int dW.$$

Die wagerechten Seitenkräfte $\sin(\alpha - \varphi)\, dW$ bilden das treibende Kräftepaar für die Drehung; es wird (S. 277, Gl. 4)

$$\mu r \varepsilon = \sin(\alpha - \varphi) \int dW.$$

Weil aber $r\omega \operatorname{tg} \alpha = u$, so muss auch $r \varepsilon \operatorname{tg} \alpha = p$ sein, mithin

3) $$\mu p = \operatorname{tg} \alpha \sin(\alpha - \varphi) \int dW.$$

Entfernt man aus Gl. 2 und 3 die Grösse $\int dW$, so wird

4) $$p = \frac{g}{1 + \frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}}.$$

Ist die Schraube in aufwärts drehende Bewegung versetzt und wird sie dann der Wirkung der Schwere überlassen, so kehrt die Reibung ihren Sinn um, es ist $-\varphi$ mit $+\varphi$ zu vertauschen, und die Verzögerung der aufwärts gerichteten Bewegung wird

5) $$p = \frac{g}{1 + \frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}}.$$

Bei einer Spindel mit Schwungkugeln wird nun das Trägheitsmoment wesentlich von diesen geliefert, und es ist, wenn die Schwungkugeln zusammen die Masse M_1 haben und im Abstande R von der Mitte sich befinden, annähernd $J = M_1 R^2$; dann wird $\mu r^2 = M_1 R^2$ und, weil $R : r$ meist gross, auch μ sehr gross gegen M. Ausserdem sind, wenn auch $\alpha > \varphi$ ist, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$ und $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ immer ziemlich kleine Brüche, so dass $\frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi)}$ gegen die Einheit so gross wird, dass diese dagegen verschwindet. Daher kann man mit grosser Annäherung statt der Gl. 4 und 5 die einfachere Doppelformel

6) $$p = g \frac{M}{\mu} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi) \quad \text{schreiben.}$$

Beginnt die Bewegung mit der Geschwindigkeit Null, so ist, nachdem die Schraube um h gesunken,

7) $$v^2 = 2ph.$$

Das Arbeitsvermögen wird dann $\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + M\right) 2ph$.

Beispiel: Das Gesammtgewicht der Schraube betrage 300 kg, wovon auf die Schwungkugeln 200 kg kommen mögen. Ausserdem sei $\operatorname{tg} \varphi = f = 0{,}1$; $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}2$;

$R = 20\,r$. Dann ist $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = 0{,}098$, $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 0{,}306$ Ferner ist mit genügender Genauigkeit $\mu r^2 = {}^2/_3\, M R^2$, daher $\mu = {}^2/_3 \cdot 400\, M = {}^{800}/_3\, M$, so dass dagegen M in Gl. 1 zu vernachlässigen ist. Dann kann auch das Arbeitsvermögen einfacher geschrieben werden $\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\, \frac{u^2}{2} = \frac{20\,000\, M}{3}\, \frac{u^2}{2}$. Die Beschleunigung der Abwärtsbewegung wird nach Gl. 6

$$p = g\, \frac{3}{800}\, 0{,}2 \cdot 0{,}098 = 0{,}000\,074\, g = 0{,}000\,72\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s.}^2}\,.$$

Nennt man p_0 die Beschleunigung einer reibungslosen Schraube von den gleichen Verhältnissen, so ist nach Gl. 6 (für $\varphi = 0$)

$$p_0 = g\, \frac{M}{\mu}\, \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{daher} \quad p = p_0\, \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}\,.$$

Da nun nach Gl. 7 v^2 mit p verhältnisgleich, so ist auch, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_0$ das Arbeitsvermögen der wirklichen bezw. der reibungslosen Schraube, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0\, \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$. Will man daher das Arbeitsvermögen der sinkenden Schraube verwerthen, so ist $\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$ der Wirkungsgrad der sinkenden Schraube. Es muss zugleich $\mathfrak{A}_0 = M g h$ sein, da bei der reibungslos sinkenden Schraube nur die Schwerkraft Arbeit verrichtet. Um aber von der Höhe h sinken zu können, musste die Schraube um diese Grösse gehoben werden, und weil der Wirkungsgrad der Schraube beim Heben nach S. 259 $\eta_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$, so war zum Heben die Arbeit $\mathfrak{A}_1 = M g h\, \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$ erforderlich. Betrachtet man nun Auf- und Abwärtsbewegung im Zusammenhange, so ist der Gesammt-Wirkungsgrad

$$\eta_2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}_2} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = 0{,}32\,.$$

Annähernd kann man auch bei der Kleinheit der Winkel α und φ $\operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi) = \operatorname{tg}\alpha \mp f$ schreiben, dann wird

$$\eta_2 = \frac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}2 + 0{,}1} = \frac{1}{3} = 0{,}33\,.$$

Derartige Vernachlässigungen sind zulässig, weil ja φ und f doch in jedem Falle nur unsicher bekannt sind. Um die Schraube von 300 kg Gewicht um $h = 0{,}1$ m zu heben, waren $30 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$ = annähernd 45 mkg Arbeit aufzuwenden. Nach dem Hinabsinken um 0,1 m beträgt das Arbeitsvermögen noch $30 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$ = annähernd 15 mkg.