$(M + M_1) g \sin \alpha_0$, und wenn man dann noch, wie früher (S. 253), $\sin \alpha$ mit α vertauscht, so entsteht

$$10) \qquad (M + M_1 + \mu) p = (M + M_1) g (\alpha - \alpha_0),$$

worin auf der linken Seite die Beschleunigung p mit der Summe der drei Massen multiplicirt erscheint, welche an der Beschleunigung p Theil nehmen (ebenso wie bei der Fallmaschine, S. 285).

Beispiel: Für einen Eisenbahnwagen auf schiefer Ebene sei $Mg = 2000$, $M_1 g = 8000$, $\mu g = 1000^{\mathrm{kg}}$, $\alpha = 1 : 200$, $\alpha_0 = 1 : 400$. Dann wird, wenn man auf beiden Seiten der Gl. 10 statt der Massen die Gewichte einführt,

$$11\,000\, p = 10\,000\, g \cdot {}^1\!/_{400} \quad \text{oder}$$

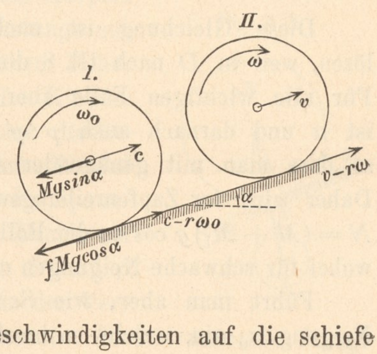
$$p = \frac{g}{440} = 0{,}023 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s.}^2}.$$

Ohne Geschwindigkeit losgelassen, wird der Wagen in 10 Sekunden eine Strecke $^1\!/_2\, p t^2 = 1{,}1^{\mathrm{m}}$ zurückgelegt haben, innerhalb einer Minute aber 36 mal so viel, nämlich $39{,}6^{\mathrm{m}}$. Der Wagen läuft auf dem Gefälle 1 : 200 unter Einfluss der Widerstände ganz so, als ob er widerstandslos sich auf einem um α_0 schwächeren Gefälle 1 : 400 bewegte.

d) Gleitbewegung sich drehender Körper auf schiefer Ebene.

Beim Rollen, wo die Geschwindigkeit des Körpers gegen die Ebene an der Berührungsstelle Null ist, tritt der Reibungswiderstand nur in derjenigen Grösse auf, die erforderlich, um das Gleiten zu verhindern. Ist daher (Gl. 6, S. 300) $\operatorname{tg} \alpha < f\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)$, so ist $T < fN$; sind aber die anfänglichen Einzelbewegungen so beschaffen, dass an der Berührungsstelle ein Gleiten stattfindet, so tritt die Reibung in der Grösse $f Mg \cos \alpha$ auf; doch wird nach einer gewissen Zeit die Gleitbewegung in eine Rollbewegung übergehen, wenn die Bedingung für eine solche (Gl. 6, S. 300) erfüllt ist, und in diesem Augenblicke verändert sich dann die Reibung plötzlich. Der Umdrehungskörper habe zu Anfang (Stellung I in Fig. 381) eine Drehung mit der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega_0$, eine Geschwindigkeit des Schwerpunktes c und werde mit diesen Geschwindigkeiten auf die schiefe Ebene gesetzt, so dass an der Berührungsstelle die Gesammt-

Fig. 381.



geschwindigkeit $c - r\omega_0$ entsteht. Es sei $c > r\omega_0$, dann wirkt in Fig. 381 der Reibungswiderstand $fMg \cos \alpha$ abwärts, die Seitenkraft der Schwere $Mg \sin \alpha$ ebenfalls abwärts. Der Schwerpunkt erfährt dadurch eine abwärts gerichtete Beschleunigung

$$1) \qquad p = g(f \cos \alpha + \sin \alpha).$$

Die Drehung erfährt nach S. 277 und unter Vernachlässigung des Rollwiderstandes eine Umfangsbeschleunigung

$$2) \qquad r\varepsilon = f\frac{M}{\mu} g \cos \alpha.$$

In t Sekunden entstehen die Geschwindigkeits-Änderungen

$$c - v = pt \quad \text{und} \quad r(\omega - \omega_0) = r\varepsilon t$$

mit dem Verhältnisse

$$3) \qquad \frac{c - v}{r\omega - r\omega_0} = \frac{p}{r\varepsilon}.$$

Soll nun v diejenige Geschwindigkeit des Schwerpunktes sein, bei der die Rollbewegung beginnt (Stellung II, Fig. 381), so muss $r\omega = v$ eingesetzt werden. Hiermit liefert die letzte Gleichung, nach v aufgelöst: $v = \frac{cr\varepsilon + pr\omega_0}{p + r\varepsilon}$; die Zeit t_1, nach welcher das Rollen beginnt, ist dann $t_1 = \frac{c - v}{p}$, oder nach Einsetzen von v

$$4) \qquad t_1 = \frac{c - r\omega_0}{p + r\varepsilon}.$$

Nach dieser Zeit t_1 ist die Geschwindigkeit an der Berührungsstelle Null, und die Reibung wechselt ihren Sinn. Ist nun die Bedingung Gl. 6, S. 300 erfüllt, so wird eine Rollbewegung eintreten. Andernfalls wird die Gleichheit der beiden Geschwindigkeiten v und $r\omega$ nur einen Augenblick währen, aber sogleich wieder aufhören, weil die Reibung nicht hinreicht, sie zu erhalten. — Für $r\omega_0 > c$ wechselt die Reibung ihren Sinn, es wird

$$p = g(\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad r\varepsilon = -f\frac{M}{\mu} g \cos \alpha \quad \text{und}$$

$$t_1 = \frac{r\omega_0 - c}{r\varepsilon - p}, \quad \text{wie man leicht findet.}$$

Beispiel 1: Eine Kugel von 0,1 m Halbmesser werde nach Fig. 381 mit 8 m sekundlicher Geschwindigkeit des Schwerpunktes und 2 m Umfangsgeschwindigkeit der Drehbewegung auf eine mit $\alpha = 1/10$ ansteigende Bahn geworfen. Die anfängliche Gleitgeschwindigkeit ist daher $6\,\frac{\text{m}}{\text{s.}}$. Die Reibungsziffer betrage $f = 0{,}2$.

In diesem Falle ist $\cos\alpha$ annähernd $= 1$ zu setzen, $\sin\alpha = 0{,}1$, $M = 2{,}5\,\mu$ (S. 273), mithin $p = g\,(0{,}2 + 0{,}1) = 0{,}3\,g$; $r\varepsilon = g \cdot 2{,}5\;0{,}2 = 0{,}5\,g$. Die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, ist $v = 5{,}75\,\frac{\text{m}}{\text{s.}}$; die entsprechende Zeit

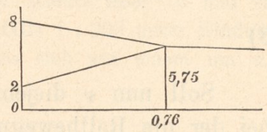
$$t_1 = \frac{8-2}{0{,}8\,g} = 0{,}76\ \text{s.}\,.$$

In diesem Augenblicke vermindert sich die Reibung nach Gl. 5, S. 300 auf

$$T = \frac{Mg \cdot 0{,}1}{3{,}5} = {}^1/_{35}\,Mg\,,$$

während sie vorher ${}^1/_5\,Mg$ betrug. Die Verzögerung der Rollbewegung wird nun (Gl. 4, S. 300) $p = {}^5/_7\,g \sin\alpha = 0{,}0714\,g = 0{,}7$. Die Geschwindigkeit wird Null nach weiterem Verlaufe von $5{,}75 : 0{,}7 = 8{,}2$ s., während dessen (nach Gl. 3, S. 12) $5{,}75 \cdot 4{,}1 = 23{,}6$ m zurückgelegt werden. Von dieser Stelle an rollt die Kugel mit der Beschleunigung $p = 0{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$ rückwärts, soweit die Bahn reicht. Die Geschwindigkeitsgesetze sind in Figur 382 dargestellt. Die obere Linie bezieht sich auf den Schwerpunkt, die untere auf die Umfangsgeschwindigkeit der Drehung; beide treffen sich beim Beginne des Rollens.

Fig. 382.



1 a. Hat die Bahn keine nennenswerthe Neigung, ist also $\alpha = 0$, so wird die Verzögerung des Schwerpunktes $p = 0{,}2\,g$; die Umfangsbeschleunigung der Drehung $r\varepsilon = 0{,}5\,g$. Die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, wird dann $v = 6{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s.}}$, die entsprechende Zeit $t_1 = 0{,}974$ s.. Mit der Geschwindigkeit v setzt die Kugel die Rollbewegung gleichmässig fort, wenn kein Rollwiderstand sie verzögert.

Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Während des Gleitens wird nach S. 248

$$5)\qquad r\varepsilon = \left(f - \frac{e}{r}\right)\frac{M}{\mu}\,g\cos\alpha$$

zu setzen sein, während des Rollens

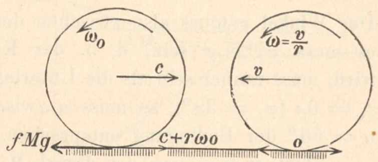
$$6)\qquad p = g\,\frac{\sin\alpha - {}^e/_r\cos\alpha}{1 + \dfrac{\mu}{M}}\,.$$

Letzteres giebt für $\alpha = 0$, $e = 0{,}5$ mm, $r = 100$ mm eine Verzögerung $= \frac{g}{700} = 0{,}014\,\frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$.

1 b. Ein Umdrehungskörper, z. B. eine Kugel, kann auch auf wagerechter Bahn so fortgeworfen, fortgeschnellt, werden, dass sie nach einer gewissen Zeit zurückrollt (Billardkugel). Giebt man ihr eine grosse Drehungsgeschwindigkeit ω_0 links herum und wirft sie mit nicht zu grosser Geschwindigkeit c nach

rechts fort (Fig. 383), so erfährt sie unter Vernachlässigung des Rollwiderstandes eine Verzögerung des Schwerpunktes $p = fg$, eine Umfangsverzögerung $r\varepsilon = fgM : \mu$; also $\mu r \varepsilon = Mp$. Ist v die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, so muss diese negativ, d. h. nach links gerichtet sein, denn während des Rollens auf wagerechter Bahn kann eine Änderung des Sinnes der Geschwindigkeit nicht mehr vorkommen. Ist t_1 die Zeit, nach der das Zurückrollen beginnt, so wird

Fig. 383.



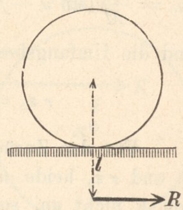
$$c + v = pt_1, \quad r\omega_0 - v = r\varepsilon t_1,$$

$$\text{mithin} \quad v = \frac{p\,r\,\omega_0 - c\,r\,\varepsilon}{p + r\,\varepsilon} \quad \text{und} \quad t_1 = \frac{c + r\,\omega_0}{p + r\,\varepsilon}.$$

Soll nun die Kugel rückläufig, also $v > 0$ sein, so muss $p\,r\,\omega_0 > c\,r\,\varepsilon$ oder $\mu\,r\,\omega_0 > Mc$, also bei einer Kugel mit $\mu = 0{,}4\,M$ $\;r\,\omega_0 > {}^5\!/_2\,c$, sein. Es lässt sich sogar erreichen, dass $v > c$ wird, d. h. dass die Kugel schneller zurückrollt, als sie fortgeworfen wurde. Dazu muss

$r\,\omega_0 > c\left(1 + 2\dfrac{r\,\varepsilon}{p}\right)$, bei einer Kugel $r\,\omega_0 > 6\,c$, sein.

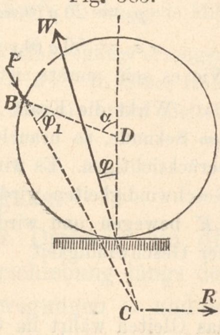
Fig. 384.



1 c. Sollen der ursprünglich ruhenden Kugel durch eine grosse, nur sehr kurze Zeit t_0 wirkende Kraft P solche Geschwindigkeiten $r\,\omega_0$ und c ertheilt werden, dass ein Zurückrollen eintritt, dass also $\mu\,r\,\omega_0 > Mc$ wird, so sind dazu Beschleunigungen $r\,\varepsilon_0$ und p_0 erforderlich, die in der Zeit t_0 die Geschwindigkeiten $r\,\omega_0$ und c hervorbringen; es muss also auch $\mu\,r\,\varepsilon_0 > Mp_0$ sein.

Auf die Kugel wirke die Schwere Mg, der um den Reibungswinkel φ von der Normalen abweichende Gesammtwiderstand W der Bahn und die gesuchte Kraft P. Die Mittelkraft R dieser drei muss wagerecht gerichtet sein, da die Beschleunigung p_0 des Schwerpunktes wagerecht sein soll (Fig. 384), u. zw. muss die Lage von R sich unterhalb des Schwerpunktes befinden (etwa um l), dann wird $\mu\,r\,\varepsilon_0 = R\,l : r$ und $M\,p_0 = R$, wobei $l > r$ sein muss, damit $\mu\,r\,\varepsilon_0 > Mp_0$ werde. Gegenüber der grossen Kraft P möge das Gewicht der Kugel vernachlässigt werden.

Fig. 385.



Der Punkt B (Fig. 385), an welchem der Druck P auf die Kugel ausgeübt werden soll, möge durch den Mittelpunktswinkel α bestimmt sein. Übt man die Kraft P aus, indem man mit elnem lederbeschlagenen Stabe bei B in der Richtung BC gegen die Kugel stösst, oder indem man mit der Hand an der Kugel (bei B sie berührend) abwärts schlägt, so wird der Stab bezw. die Hand an der Kugel gleiten und die

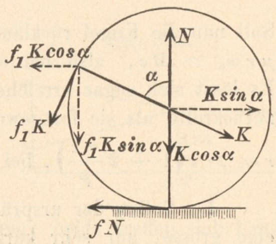
Richtung des Druckes P von der Normalen DB um den Reibungswinkel φ_1, der für Kugel und stossenden Körper gilt, abweichen. Soll nun der Schnittpunkt von W und P unterhalb der Kugel liegen, so muss $\alpha - \varphi_1 > \varphi$ und zugleich $\varphi_1 > {}^1/_2\, \alpha$ sein, woraus folgt

$$\alpha > \varphi + \varphi_1 \quad \text{und} \quad \alpha < 2\,\varphi_1 .$$

Der Winkel α muss also zwischen den Grenzen $\varphi + \varphi_1$ und $2\,\varphi_1$ liegen, und es muss $\varphi_1 > \varphi$ sein, d. h. der Körper, mit dem der Druck P ausgeübt wird, muss rauher sein als die Unterlage der Kugel. Ist z. B. $f = 0{,}2$ ($\varphi = 11^0$), $f_1 = 0{,}8$ ($\varphi_1 = 39^0$), so muss α zwischen 50 und 78° liegen; es würde daher $\alpha = 60^0$ der Bedingung entsprechen.

Zerlegt man nuu den Druck P in einen Normaldruck K und die Reibung $f_1 K$, W in N und fN, zerlegt ferner K und f_1K nach wagerechter und lothrechter Richtung, so wird (Fig. 386), da in lothrechtem Sinne keine Verschiebung erfolgt, $N = K(\cos\alpha + f_1 \sin\alpha)$. Dann ergiebt sich als Beschleunigung des Schwerpunktes nach rechts

Fig. 386.



$$p_0 = \frac{K\sin\alpha - f_1 K\cos\alpha - fN}{M} \quad \text{oder}$$

$$p_0 = \frac{K}{M}(\sin\alpha - f_1\cos\alpha - f\cos\alpha - ff_1\sin\alpha)$$

und die Umfangsbeschleunigung der Drehung

$$r\,\varepsilon_0 = \frac{f_1K - fN}{\mu} = \frac{K}{\mu}(f_1 - f\cos\alpha - ff_1\sin\alpha).$$

Für das Zurückrollen besteht nun die Bedingung $\mu\, r\,\varepsilon_0 > p_0 M$; da nun p_0 und $r\,\varepsilon_0$ beide mit K verhältnisgleich sind, so kommt es auf die Grösse von K nicht an, sondern nur auf die Winkel α, φ und φ_1. Eine Veränderlichkeit der Grösse von K, wie sie beim Stosse besteht, bringt keine wesentliche Änderung.

Es sei $\alpha = 60^0$, $f = 0{,}2$, $f_1 = 0{,}8$ und beispielsweise $K = 20\,Mg$, dann wird

$$p_0 = 20\,g\,(0{,}866 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}866) = 44{,}5;$$

$$r\,\varepsilon_0 = 50\,g\,(0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}866) = 275.$$

Wie es sein musste, ist $r\,\varepsilon_0 > 6\,p_0$.

Wirkt die Kraft $K = 20\,Mg$ nebst der entsprechenden Reibung f_1K nur ${}^1/_{20}$ Sekunde, so braucht man die Verschiebung ihres Angriffspunktes nicht zu berücksichtigen. Es wird dann $c = 44{,}5 \cdot {}^1/_{20} = 2{,}23$, $r\,\omega_0 = 13{,}75$. Mit diesen Geschwindigkeiten wird sich die Kugel nach dem Aufhören der Kräfte K und f_1K bewegen und wird, da nun $p = 0{,}2\,g$ und $r\,\varepsilon = 0{,}5\,g$, zurückrollen mit der Geschwindigkeit

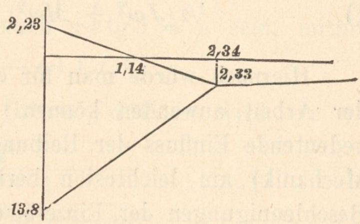
$$v = \frac{0{,}2 \cdot 13{,}75 - 2{,}23 \cdot 0{,}5}{0{,}2 + 0{,}5} = 2{,}33;$$

das Gleiten währt im Ganzen

$$t_1 = \frac{c + r\,\omega_0}{p + r\,\varepsilon} = 2{,}34 \text{ Sek.}$$

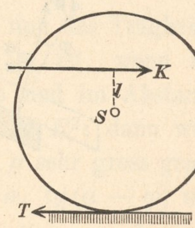
Die Umkehr der Kugel erfolgt übrigens schon während des Gleitens. Nach der Zeit $t = c : (fg) = 2{,}23 : 1{,}962 = 1{,}14$ Sek. und nachdem die Kugel sich um $s' = 2{,}23 \cdot 1{,}14 \cdot 0{,}5 = 1{,}27$ m nach rechts bewegt hat, ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes nach rechts Null geworden, kehrt dann während des Restes der Gleitzeit, d. h. während der Zeit $t'' = 2{,}34 - 1{,}14 = 1{,}20$ Sek. um $s'' = 2{,}33 \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}5 = 1{,}4$ m gleitend nach links zurück. An dem um 0,13 m links von der Ausgangsstelle gelegenen Punkte beginnt erst das Rollen, welches sich dann mit der Geschwindigkeit 2,33 m/s. fortsetzt. Fig. 387 zeigt die Geschwindigkeitsgesetze der Bewegungen.

Fig. 387.



Beispiel 2: Wirkt auf eine auf wagerechter Ebene anfänglich ruhende Kugel eine wagerechte Kraft K, die um l oberhalb des Schwerpunktes liegt, nach rechts und soll eine R o l l b e w e g u n g entstehen, so ist am Auflagerpunkte ein Widerstand T erforderlich, den wir nach links gerichtet annehmen wollen (Fig. 388). Die Beschleunigung des Schwerpunktes p (S. 142) und die Winkelbeschleunigung ε der Drehung (S. 276) werden dann

Fig. 388.



$$p = \frac{K - T}{M}; \quad \varepsilon = \frac{Kl + Tr}{\mu r^2}.$$

Für Rollbewegung muss nun $r\varepsilon = p$ sein, oder

$$K\mu r - T\mu r = KMl + TMr.$$

Hieraus bestimmt sich

$$T = K\frac{\mu r - Ml}{(M + \mu) r}.$$

Für $l = 0$ wird $T = K : \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) = {}^2/_7\, K$. Für $l = r$ wird T negativ, nämlich $T = -K\frac{M - \mu}{M + \mu} = -{}^3/_7\, K$. Soll aber die Kraft K ohne jede Mitwirkung von T, d. h. auf völlig glatter Ebene eine Rollbewegung erzeugen, soll $T = 0$ sein, so wird $l : r = \mu : M = 0{,}4$, d. h. $l = {}^2/_5\, r$. In dieser Höhe darf eine Kugel beliebig heftig gestossen werden, ohne dass sie unten gleitet; sie wird sofort eine Rollbewegung beginnen.

e) Beschleunigte Schraubenbewegung.

Die Schraubenbewegung besteht aus einer Drehung um die Achse der Schraube und einer gleichzeitigen Verschiebung längs der Achse. Sind die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen ω und u, so ist das A r b e i t s v e r m ö g e n der Schraube $^1/_2\, J\omega^2 + {}^1/_2\, Mu^2$ (S. 296). Weil aber bei der Schraube vom mittleren Halbmesser r,