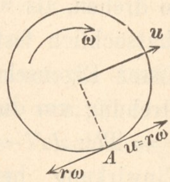
c) Rollbewegung auf schiefer Ebene. Fuhrwerke.

Bewegung ohne Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Hat ein Umdrehungskörper eine Winkelgeschwindigkeit ω rechtsherum um seine geometrische Achse und wird er gleichzeitig rechtwinklig zur Achse mit der Geschwindigkeit $u = r\omega$ nach rechts verschoben, so setzen sich die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte eines Kreises vom Halbmesser r aus den Einzelgeschwindigkeiten $r\omega$ rechtwinklig zum Drehungshalbmesser und $u = r\omega$ zusammen. An dem Punkte A (Fig. 373) ist dann die Gesammtgeschwindigkeit $v = 0$. Bringt man den Körper an dieser Stelle mit einer Ebene in Berührung, welche mit u und der geometrischen Achse des Körpers parallel ist, so wird der Umdrehungskörper sich gegen diese Ebene in der Art bewegen, dass die Berührungsstelle fortwährend wechselt, dass an der Berührungsstelle aber stets die relative Gleitgeschwindigkeit Null ist. Eine solche Bewegung nennt man eine **Rollbewegung.** Andere, ebenfalls aus Drehung und Verschiebung zusammengesetzte Bewegungen, bei denen aber die Bedingung $r\omega = u$ nicht erfüllt ist, erscheinen äusserlich ebenfalls wie Rollbewegungen, sind es aber nicht, sondern sind, weil an der Berührungsstelle die relative Gleitgeschwindigkeit nicht gleich Null, Gleitbewegungen sich drehender Körper auf einer Ebene. Für die Kräfte und damit auch für die Gesetze der Bewegung ist es von massgebender Bedeutung, ob die Gleitgeschwindigkeit an der Berührungsstelle Null ist, oder nicht. Im ersteren Falle kommt nämlich die Reibung im Allgemeinen mit einem Betrage $T \leqq fN$ zur Wirkung, während, wenn u nur im Geringsten von $r\omega$ abweicht, der volle Betrag der Reibung wirksam wird.

Fig. 373.



An dieser Stelle behandeln wir die reine Rollbewegung und werden die Gleitbewegung S. 304 besprechen.

Das Arbeitsvermögen der Rollbewegung ist nach S. 296 $\frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} \omega^2 J$, oder, wenn μ die auf den Halbmesser des Rollkreises r bezogene Masse (wegen $r\omega = u$):

1) $$\tfrac{1}{2} (M + \mu) u^2.$$

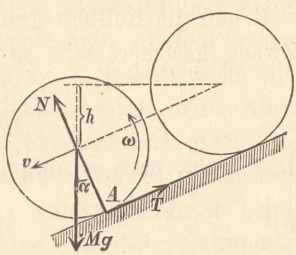
Wird ein Umdrehungskörper (Cylinder, Reif oder Kugel) mit der Geschwindigkeit Null auf eine schiefe Ebene gesetzt und lediglich der Einwirkung der Schwere Mg und des Normalwiderstandes N der Ebene überlassen, so würde er unter Annahme völliger Glätte nicht in Drehung gerathen können, weil Mg und N beide durch den Schwerpunkt gehen; es würde der Körper also eine beschleunigte, rein fortschreitende Gleitbewegung ausführen. In Wirklichkeit setzt sich ein Reibungswiderstand T dem Gleiten entgegen, und wenn dieser in der erforderlichen Grösse zur Wirkung gelangen kann, so wird er das Gleiten verhindern und eine Rollbewegung erzeugen. Unter welchen Bedingungen dies geschieht, bleibt noch zu untersuchen. Daher setzen wir zunächst voraus, dass eine vollkommene Rollbewegung stattfinde, welche entweder durch Reibung erzeugt, oder durch einen um den Rollkreis geschlungenen, von A aus auf der Ebene nach oben hin gerade gestreckten und an ihr befestigten Faden, oder endlich durch eine Verzahnung von Rollkreis und Bahn erzwungen werde. Dann wird durch eines dieser Mittel die für das Rollen erforderliche Umfangskraft T geliefert.

Beginnt die Rollbewegung mit der Geschwindigkeit Null und ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, nachdem dieser um h gesunken, v geworden, so ist die Zunahme an Arbeitsvermögen $\frac{1}{2}(M+\mu)v^2$. Arbeit wird nur von der Schwere im Betrage Mgh verrichtet, denn N und T greifen an der Berührungsstelle A an, deren Geschwindigkeit Null ist. Hiernach muss

$\frac{1}{2}(M+\mu)v^2 = Mgh$ sein, oder

$$2) \qquad v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{\mu}{M}}}.$$

Fig. 374.

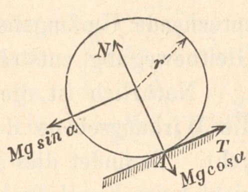


Will man die Bewegung in ihren Einzelheiten kennen lernen, so muss man die Beschleunigungen beider Einzelbewegungen berechnen. Zerlegt man Mg in $Mg \sin \alpha$ und $Mg \cos \alpha$, so muss

$$3) \qquad N = Mg \cos \alpha$$

sein, weil der Schwerpunkt sich geradlinig bewegt, d. h. keine Centripetalbeschleunigung erfährt. Die Beschleunigung p des Schwerpunktes erhält man nach S. 142, indem man T an den Schwerpunkt

Fig. 375.



verschoben denkt, mithin ist $Mp = Mg \sin \alpha - T$. Weil T noch unbekannt, ist eine zweite Gleichung erforderlich. Da in jedem Augenblicke $v = r\omega$, so muss das gleiche Verhältnis auch für die Beschleunigungen gelten, d. h. $r\varepsilon = p$. Weil nun die Umfangsbeschleunigung $r\varepsilon = p$ von T herrührt, so ist nach Gl. 4, S. 277:

$$\mu p = T.$$

Führt man dies in obigen Ausdruck für Mp ein, so ergiebt sich schliesslich

4) $$p = \frac{Mg \sin \alpha}{M + \mu} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \dfrac{\mu}{M}}.$$

d. h. die treibende Seitenkraft der Schwere $Mg \sin \alpha$ ist nicht allein durch die Masse M, sondern durch die Summe $M + \mu$ zu theilen, da sie nicht nur die fortschreitende Masse M, sondern zugleich die Schwungmasse μ zu beschleunigen hat.

Hiermit ist auch die Umfangskraft T bestimmt zu

5) $$T = \mu p = \frac{\mu Mg \sin \alpha}{M + \mu} = \frac{Mg \sin \alpha}{1 + \dfrac{M}{\mu}}.$$

Soll nun die Rollbewegung allein durch die Reibung, ohne sonstigen Zwang gesichert sein, so muss $T \leqq fN = fMg \cos \alpha$ sein, oder

$$\frac{\mu Mg \sin \alpha}{M + \mu} \leqq fMg \cos \alpha.$$

Das giebt, nach α aufgelöst:

6) $$\operatorname{tg} \alpha \leqq f\left(1 + \frac{M}{\mu}\right).$$

Genügt die Neigung der schiefen Ebene dieser Bedingung, so ist Rollbewegung möglich. Bei zu grosser Neigung ist $fMg \cos \alpha$ zu klein, um die der grossen Schwerpunktsbeschleunigung p entsprechende Umfangsbeschleunigung zu erzeugen; es wird dann eine Gleitbewegung entstehen.

Natürlich ist die betrachtete Rollbewegung nur möglich, wenn die Wirkungsebene der Kräfte N und T durch den Schwerpunkt geht. Es findet dies statt beim Cylinder, beim Reif, bei der Kugel; nicht beim Kegel, wohl aber bei einem Doppelkegel und allgemeiner bei jeder Achse, auf der zwei symmetrische Umdrehungskörper als

Räder befestigt sind. Da beim dünnen Reif $\mu = M$, beim Cylinder $\mu = \frac{1}{2} M$, bei der Kugel $\mu = 0{,}4\, M$, so wird

für den Reif:

$$v = 0{,}707 \sqrt{2gh} = \sqrt{gh};\; p = \tfrac{1}{2} g \sin\alpha;\; T = \tfrac{1}{2} Mg \sin\alpha;\; \operatorname{tg}\alpha \leqq 2f;$$

für den Cylinder:

$$v = 0{,}817 \sqrt{2gh};\; p = \tfrac{2}{3} g \sin\alpha;\; T = \tfrac{1}{3} Mg \sin\alpha;\; \operatorname{tg}\alpha \leqq 3f;$$

für die Kugel:

$$v = 0{,}845 \sqrt{2gh};\; p = \tfrac{5}{7} g \sin\alpha;\; T = \tfrac{2}{7} Mg \sin\alpha;\; \operatorname{tg}\alpha \leqq 3{,}5f.$$

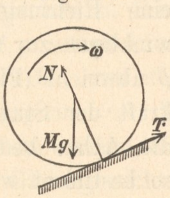
Dagegen würde für reibungsloses Gleiten gelten

$$v = \sqrt{2gh};\; p = g \sin\alpha.$$

Reif, Cylinder und Kugel, auf schiefer Ebene neben einander los gelassen, bewegen sich hiernach mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Die Kugel eilt am meisten, u. zw. sind dabei die Durchmesser ohne Einfluss; nur auf die Form der Körper kommt es an. Hierbei wurde kein Rollwiderstand vorausgesetzt, der natürlich die Ergebnisse ändern muss.

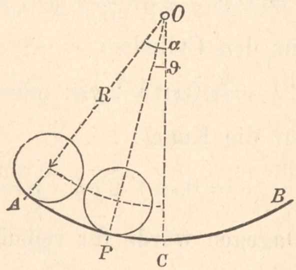
Wird der Körper in eine aufwärts gerichtete Rollbewegung versetzt und der Schwere überlassen, so könnte man auf den ersten Blick vielleicht meinen, der Sinn der Reibung T müsste sich mit der Umkehrung der Bewegung ebenfalls umkehren. Dies wäre jedoch ein Trugschluss, denn an der Berührungsstelle findet ja weder in der Richtung aufwärts, noch abwärts ein Gleiten statt, mag der Körper aufwärts oder abwärts rollen. Dass vielmehr T beim Aufwärtsrollen denselben Sinn behalten muss wie beim Abwärtsrollen, erkennt man aus Folgendem: Beim Aufwärtsrollen wird die Arbeit der Schwere negativ, somit muss die Bewegung des Schwerpunktes verzögert sein, und Gleiches folgt hieraus für die Drehbewegung. Damit aber die einzige Drehkraft T beim Aufwärtsrollen eine Verzögerung der Drehung erzeuge, muss sie (Fig. 376) aufwärts gerichtet sein. Da nun die Kräfte jetzt genau dieselben sind wie beim Abwärtsrollen, so gelten auch für p, T und $\operatorname{tg}\alpha$ dieselben Gleichungen wie beim Abwärtsrollen.

Fig. 376.



Geschieht die Rollbewegung nicht auf einer schiefen Ebene, sondern im unteren Theile einer Cylinderfläche vom Halbmesser $R + r$ mit wagerechten Erzeugenden (Fig. 377), so ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Zwischenlage P nach der auch hier gültigen Gl. 2 (S. 299)

Fig. 377.



$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\mu}{M}}} = \sqrt{\frac{2gR(\cos\vartheta - \cos\alpha)}{1 + \frac{\mu}{M}}},$$

wenn die Bewegung bei A mit der Geschwindigkeit Null begann. Bei einem mathematischen Pendel von der Fadenlänge R würde

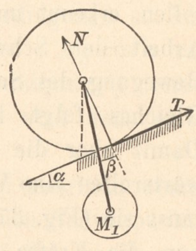
$$v_1 = \sqrt{2gR(\cos\vartheta - \cos\alpha)} \text{ sein.}$$

Die Vertauschung des einfachen Pendels mit einem hin und her rollenden Körper ist also (wegen der Verkleinerung der Beschleunigung des Schwerpunktes, S. 300) gleichbedeutend mit einer Ersetzung der Fallbeschleunigung g durch den kleineren Werth $g : \left(1 + \frac{\mu}{M}\right)$; mithin wird die Dauer einer kleinen einfachen Schwingung sein

$$7) \qquad t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}\left(1 + \frac{\mu}{M}\right)}.$$

Bewegung der Fuhrwerke mit Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Tragen die auf schiefer Ebene rollenden Räder von der Gesammtmasse M ein Fuhrwerk von der Masse M_1, welches nur an der Verschiebung mit der Beschleunigung p Theil nimmt, so denkt man sich zur Berechnung der letzteren die Masse M_1 zunächst an der Achse des rollenden Körpers reibungslos aufgehängt. Die Gelenkstange zur Aufhängung nimmt dann im relativen Ruhezustande gegen die Achse des rollenden Körpers eine Richtung an, welche von der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene um einen Winkel β abweicht (Fig. 378). Nennt man die Spannkraft der Stange, die zugleich den Druck auf die Achse bedeutet, D, so müssen D und β so bestimmt werden, dass M_1 nur an der Verschiebungsbeschleunigung p Theil nimmt. Ersetzt man die Stange durch die Kraft D und zerlegt die an M_1 wirkenden D und $M_1 g$

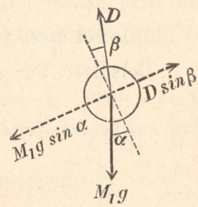
Fig. 378.



parallel zur Ebene und rechtwinklig dazu (Fig. 379), so wird $D \cos \beta = M_1 g \cos \alpha$, ferner $M_1 p = M_1 g \sin \alpha - D \sin \beta$ oder $D \sin \beta = M_1 g \sin \alpha - M_1 p$. Daraus folgt

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \frac{p}{g \cos \alpha}$$

Fig. 379.



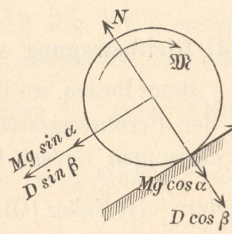
$$8) \quad D = M_1 g \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \frac{p}{g} + \left(\frac{p}{g}\right)^2}.$$

An dem rollenden Körper wirken nun die in Fig. 380 angegebenen Kräfte, wo $\mathfrak{M}$ das gesammte, aus Zapfenreibung und Rollwiderstand herrührende Moment bedeutet. Nach S. 252 ist $\mathfrak{M} = {}^1/_2 Dfd + Ne$, wenn d der Zapfendurchmesser, e der Arm des Rollwiderstandes. Dann gilt für die Beschleunigung p des Schwerpunktes

$$Mp = Mg \sin \alpha + D \sin \beta - T \quad \text{oder}$$

$$9) \quad Mp = Mg \sin \alpha + M_1 g \sin \alpha - M_1 p - T;$$

Fig. 380.



und für die Umfangsbeschleunigung der Drehung nach S. 277

$$\mu p = T - \frac{\mathfrak{M}}{R}, \quad \text{oder}$$

$$T = \mu p + \frac{Dfd}{2R} + \frac{Ne}{R},$$

wenn R der Halbmesser des Rollkreises. Setzt man dies in Gl. 9 ein, so ergiebt sich

$$(M + M_1 + \mu) p = (Mg + M_1 g) \sin \alpha - \frac{Dfd}{2R} - \frac{Ne}{R}.$$

Diese Gleichung ist nach p nicht ohne Weiteres aufzulösen, weil in D nach Gl. 8 die Grösse p ebenfalls noch vorkommt. Für alle wichtigen Fälle aber, in denen ein Fuhrwerk frei läuft, ist α und darnach auch $p : g$ nur klein im Verhältnisse zu Eins, so dass man mit genügender Annäherung $D = M_1 g$ setzen kann. Daher wird der Zapfenreibungswiderstand $M_1 gfd : (2R)$, und weil $N = (M + M_1) g \cos \alpha$, der Rollwiderstand $(M + M_1) g \cos \alpha \cdot e : R$, wobei für schwache Neigungen $\cos \alpha$ mit Eins vertauscht werden darf.

Führt man aber, wie S. 254, wiederum die Gleichgewichts-Neigung α_0 ein, welche so beschaffen, dass wenn $\alpha = \alpha_0$ $p = 0$ ist, so wird die Summe der beiden Widerstände wieder gleich mit

$(M + M_1) g \sin \alpha_0$, und wenn man dann noch, wie früher (S. 253), $\sin \alpha$ mit α vertauscht, so entsteht

10) $$(M + M_1 + \mu) p = (M + M_1) g (\alpha - \alpha_0),$$

worin auf der linken Seite die Beschleunigung p mit der Summe der drei Massen multiplicirt erscheint, welche an der Beschleunigung p Theil nehmen (ebenso wie bei der Fallmaschine, S. 285).

Beispiel: Für einen Eisenbahnwagen auf schiefer Ebene sei $Mg = 2000$, $M_1 g = 8000$, $\mu g = 1000^{\text{kg}}$, $\alpha = 1 : 200$, $\alpha_0 = 1 : 400$. Dann wird, wenn man auf beiden Seiten der Gl. 10 statt der Massen die Gewichte einführt,

$$11\,000\, p = 10\,000\, g \cdot {}^1/_{400} \quad \text{oder}$$

$$p = \frac{g}{440} = 0{,}023 \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}.$$

Ohne Geschwindigkeit losgelassen, wird der Wagen in 10 Sekunden eine Strecke ${}^1/_2\, p t^2 = 1{,}1^{\text{m}}$ zurückgelegt haben, innerhalb einer Minute aber 36 mal so viel, nämlich $39{,}6^{\text{m}}$. Der Wagen läuft auf dem Gefälle 1 : 200 unter Einfluss der Widerstände ganz so, als ob er widerstandslos sich auf einem um α_0 schwächeren Gefälle 1 : 400 bewegte.

d) Gleitbewegung sich drehender Körper auf schiefer Ebene.

Beim Rollen, wo die Geschwindigkeit des Körpers gegen die Ebene an der Berührungsstelle Null ist, tritt der Reibungswiderstand nur in derjenigen Grösse auf, die erforderlich, um das Gleiten zu verhindern. Ist daher (Gl. 6, S. 300) $\operatorname{tg} \alpha < f\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)$, so ist $T < fN$; sind aber die anfänglichen Einzelbewegungen so beschaffen, dass an der Berührungsstelle ein Gleiten stattfindet, so tritt die Reibung in der Grösse $f Mg \cos \alpha$ auf; doch wird nach einer gewissen Zeit die Gleitbewegung in eine Rollbewegung übergehen, wenn die Bedingung für eine solche (Gl. 6, S. 300) erfüllt ist, und in diesem Augenblicke verändert sich dann die Reibung plötzlich. Der Umdrehungskörper habe zu Anfang (Stellung I in Fig. 381) eine Drehung mit der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega_0$, eine Geschwindigkeit des Schwerpunktes c und werde mit diesen Geschwindigkeiten auf die schiefe Ebene gesetzt, so dass an der Berührungsstelle die Gesammt-

Fig. 381.