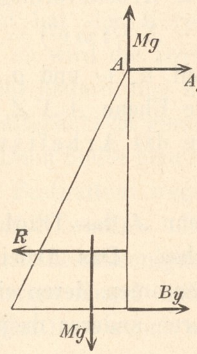
Theilchen eines lothrechten Flächenstreifens haben übereinstimmendes x und dx, liefern daher zu C_z den Beitrag $x\,dx \int_0^w y\,dy, = x\,dx\ {}^1\!/_2\, w^2$, wenn w die Höhe des Streifens; darin ist $w = cx : a$, also wird

$$C_z = \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{a^2}\int_0^a x^3\,dx = \frac{1}{8}\,c^2 a^2 = \frac{1}{4}\,M a c.$$

Fig. 371.



Mithin nach Fig. 365 $u = \frac{C_z}{M y_0} = \frac{{}^1\!/_4\, M a c}{{}^1\!/_3\, M c} = {}^3\!/_4\, a$.

Die entsprechenden Achsenwiderstände werden dann

$$A = {}^1\!/_4\, R = {}^1\!/_{12}\, M c \omega^2 \quad \text{und}$$
$$B = {}^3\!/_4\, R = {}^1\!/_4\, M c w^2.$$

Stellen wir wiederum die Drehachse lothrecht (Fig. 371) und lassen die Schwere wirken, so sind in A und B die wagerechten Widerstände A_y und B_y nöthig, für welche gilt:

$${}^1\!/_4\, a R = A_y\, a - M g\ {}^1\!/_3\, c,$$

mithin $A_y = {}^1\!/_4\, R + {}^1\!/_3\, M g \frac{c}{a}$ und ebenso $B_y = {}^3\!/_4\, R - {}^1\!/_3\, M g \frac{c}{a}$.

Wiederum wird die Befestigung bei B unnöthig, wenn

$${}^3\!/_4\, R = {}^1\!/_4\, M c \omega^2 = {}^1\!/_3\, M g \frac{c}{a}, \quad \text{d. h. für } \omega^2 = \frac{4}{3}\,\frac{g}{a}.$$

7. Gleichzeitige Verschiebung und Drehung eines Körpers.

a) Arbeitsvermögen.

Ein Körper drehe sich um eine Schwerpunktsachse, die zur x-Achse gewählt werden möge, mit der Winkelgeschwindigkeit ω; zugleich werde die Achse mit einer der xz-Ebene parallelen Geschwindigkeit u parallel verschoben, und zwar möge u mit der x-Richtung den Winkel α bilden (Fig. 372). Dann setzt sich die gesammte Geschwindigkeit v eines Punktes der Koordinaten x, y, z im Abstande ϱ von der Achse aus den Einzelgeschwindigkeiten u und $\varrho\omega$ zusammen.

Fig. 372.

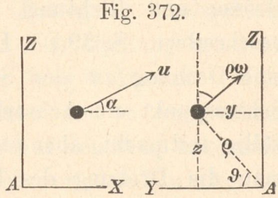


Fig. 372 stellt das Achsenkreuz in zwei Projektionen dar. Bildet ϱ mit der AY den Winkel ϑ, so ist $\varrho\cos\vartheta = y$, $\varrho\sin\vartheta = z$; somit zerlegt sich $\varrho\omega$ in $-z\omega$ und $y\omega$. Die Seitengeschwindigkeiten eines Punktes nach den Achsenrichtungen werden dann

$$v_x = u\cos\alpha; \quad v_y = -z\omega; \quad v_z = y\omega + u\sin\alpha.$$

Daher wird

$$v^2 = u^2 \cos^2 \alpha + z^2 \omega^2 + y^2 \omega^2 + 2 y \omega u \sin \alpha + u^2 \sin^2 \alpha$$
$$= u^2 + \varrho^2 \omega^2 + 2 y \omega u \sin \alpha .$$

Das Arbeitsvermögen des Körpers ergiebt sich dann zu

$$\Sigma(\tfrac{1}{2} m v^2) = \tfrac{1}{2} M u^2 + \tfrac{1}{2} \omega^2 \Sigma m \varrho^2 + 2 \omega u \sin \alpha \Sigma m y ,$$

weil u, ω und α für alle Theile des Körpers dieselben. Da aber die Ebene AXZ den Schwerpunkt enthält, so ist $\Sigma m y = 0$, mithin das Arbeitsvermögen

$$\tfrac{1}{2} M u^2 + \tfrac{1}{2} J \omega^2 ,$$

wenn J das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse. Das Arbeitsvermögen setzt sich hiernach aus zwei Theilen zusammen, deren einer das Arbeitsvermögen wegen der Verschiebung, deren anderer dasjenige wegen der Drehung bedeutet.

b) Bewegung eines freien Körpers.

Wirken an einem freien starren Körper beliebige äussere Kräfte K_1, K_2, K_3 . . ., so füge man im Schwerpunkte S des Körpers je zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K hinzu. Dann lassen sich im Schwerpunkte die den gegebenen gleichgesinnten Kräfte K zu einer Mittelkraft R vereinigen, während jede gegebene Kraft K mit der entgegengesetzt hinzugefügten ein Kräftepaar bildet, deren Achsenstrecken ein Gesammtmoment $\mathfrak{M}$ (S. 112) liefern. Der Schwerpunkt S bewegt sich nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes nur unter Einwirkung der Kraft R mit der Beschleunigung $p_0 = R : M$. (Wäre etwa R unveränderlich nach Grösse und Richtung, so würde der Schwerpunkt eine Parabel beschreiben, S. 59.) Das Achsenmoment $\mathfrak{M}$ bewirkt aber noch eine Drehung um den Schwerpunkt. Denkt man sich nun mit dem Schwerpunkt ein Achsenkreuz verbunden, welches dessen Bewegung völlig mitmacht, aber stets der Anfangslage parallel bleibt, so kann man die Drehung des Körpers auffassen als scheinbare Bewegung gegen dieses, mit der Beschleunigung p_0 sich verschiebende Achsenkreuz. Diese Bewegung kann dann betrachtet werden wie eine Drehung um den festliegenden Schwerpunkt, wenn man an allen Punkten des Körpers die entsprechenden Ergänzungskräfte $[-m p_0]$ anbringt. Weil diese sich gleichmässig über die ganze Masse vertheilen, so liefern sie eine Mittelkraft $-M p_0$, die durch den