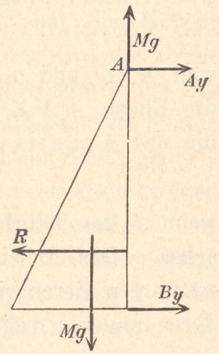
Theilchen eines lothrechten Flächenstreifens haben übereinstimmendes x und dx, liefern daher zu C_z den Beitrag $x\,dx \int_0^w y\,dy, = x\,dx\ {}^1\!/\!_2\, w^2$, wenn w die Höhe des Streifens; darin ist $w = c\,x : a$, also wird

Fig. 371.



$$C_z = \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{a^2}\int_0^a x^3\,dx = \frac{1}{8}\,c^2 a^2 = \frac{1}{4}\,M a c.$$

Mithin nach Fig. 365 $u = \dfrac{C_z}{M y_0} = \dfrac{{}^1\!/\!_4\, M a c}{{}^1\!/\!_3\, M c} = {}^3\!/\!_4\, a$.

Die entsprechenden Achsenwiderstände werden dann

$$A = {}^1\!/\!_4\, R = {}^1\!/\!_{12}\, M c\,\omega^2 \quad \text{und}$$
$$B = {}^3\!/\!_4\, R = {}^1\!/\!_4\, M c\,w^2.$$

Stellen wir wiederum die Drehachse lothrecht (Fig. 371) und lassen die Schwere wirken, so sind in A und B die wagerechten Widerstände A_y und B_y nöthig, für welche gilt:

$${}^1\!/\!_4\, a R = A_y\, a - M g\ {}^1\!/\!_3\, c,$$

mithin $A_y = {}^1\!/\!_4\, R + {}^1\!/\!_3\, M g\,\dfrac{c}{a}$ und ebenso $B_y = {}^3\!/\!_4\, R - {}^1\!/\!_3\, M g\,\dfrac{c}{a}$.

Wiederum wird die Befestigung bei B unnöthig, wenn

$${}^3\!/\!_4\, R = {}^1\!/\!_4\, M c\,\omega^2 = {}^1\!/\!_3\, M g\,\frac{c}{a}, \quad \text{d. h. für } \omega^2 = \frac{4}{3}\,\frac{g}{a}.$$

7. Gleichzeitige Verschiebung und Drehung eines Körpers.

a) Arbeitsvermögen.

Ein Körper drehe sich um eine Schwerpunktsachse, die zur x-Achse gewählt werden möge, mit der Winkelgeschwindigkeit ω; zugleich werde die Achse mit einer der xz-Ebene parallelen Geschwindigkeit u parallel verschoben, und zwar möge u mit der x-Richtung den Winkel α bilden (Fig. 372). Dann setzt sich die gesammte Geschwindigkeit v eines Punktes der Koordinaten x, y, z im Abstande ϱ von der Achse aus den Einzelgeschwindigkeiten u und $\varrho\,\omega$ zusammen.

Fig. 372.

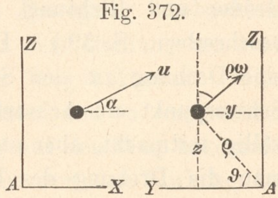


Fig. 372 stellt das Achsenkreuz in zwei Projektionen dar. Bildet ϱ mit der AY den Winkel ϑ, so ist $\varrho\cos\vartheta = y$, $\varrho\sin\vartheta = z$; somit zerlegt sich $\varrho\,\omega$ in $-z\,\omega$ und $y\,\omega$. Die Seitengeschwindigkeiten eines Punktes nach den Achsenrichtungen werden dann

$$v_x = u\cos\alpha;\quad v_y = -z\,\omega;\quad v_z = y\,\omega + u\sin\alpha.$$

Daher wird

$$v^2 = u^2 \cos^2 \alpha + z^2 \omega^2 + y^2 \omega^2 + 2 y \omega u \sin \alpha + u^2 \sin^2 \alpha$$
$$= u^2 + \varrho^2 \omega^2 + 2 y \omega u \sin \alpha.$$

Das Arbeitsvermögen des Körpers ergiebt sich dann zu

$$\Sigma(\tfrac{1}{2} m v^2) = \tfrac{1}{2} M u^2 + \tfrac{1}{2} \omega^2 \Sigma m \varrho^2 + 2 \omega u \sin \alpha \Sigma m y,$$

weil u, ω und α für alle Theile des Körpers dieselben. Da aber die Ebene AXZ den Schwerpunkt enthält, so ist $\Sigma m y = 0$, mithin das Arbeitsvermögen

$$\tfrac{1}{2} M u^2 + \tfrac{1}{2} J \omega^2,$$

wenn J das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse. Das Arbeitsvermögen setzt sich hiernach aus zwei Theilen zusammen, deren einer das Arbeitsvermögen wegen der Verschiebung, deren anderer dasjenige wegen der Drehung bedeutet.

b) Bewegung eines freien Körpers.

Wirken an einem freien starren Körper beliebige äussere Kräfte K_1, K_2, K_3 . . ., so füge man im Schwerpunkte S des Körpers je zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K hinzu. Dann lassen sich im Schwerpunkte die den gegebenen gleichgesinnten Kräfte K zu einer Mittelkraft R vereinigen, während jede gegebene Kraft K mit der entgegengesetzt hinzugefügten ein Kräftepaar bildet, deren Achsenstrecken ein Gesammtmoment $\mathfrak{M}$ (S. 112) liefern. Der Schwerpunkt S bewegt sich nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes nur unter Einwirkung der Kraft R mit der Beschleunigung $p_0 = R : M$. (Wäre etwa R unveränderlich nach Grösse und Richtung, so würde der Schwerpunkt eine Parabel beschreiben, S. 59.) Das Achsenmoment $\mathfrak{M}$ bewirkt aber noch eine Drehung um den Schwerpunkt. Denkt man sich nun mit dem Schwerpunkt ein Achsenkreuz verbunden, welches dessen Bewegung völlig mitmacht, aber stets der Anfangslage parallel bleibt, so kann man die Drehung des Körpers auffassen als scheinbare Bewegung gegen dieses, mit der Beschleunigung p_0 sich verschiebende Achsenkreuz. Diese Bewegung kann dann betrachtet werden wie eine Drehung um den festliegenden Schwerpunkt, wenn man an allen Punkten des Körpers die entsprechenden Ergänzungskräfte $[- m p_0]$ anbringt. Weil diese sich gleichmässig über die ganze Masse vertheilen, so liefern sie eine Mittelkraft $- M p_0$, die durch den

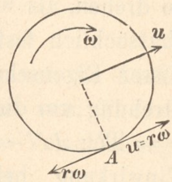
Schwerpunkt geht, daher auf die Drehung um ihn keinen Einfluss haben kann. Die Drehung geschieht also gerade so, als ruhte der Schwerpunkt.

Ist nun die durch den Schwerpunkt gelegte Achsenstrecke des Gesammt-Kräftepaars $\mathfrak{M}$ eine freie Achse und hat der Körper anfänglich keine Drehung um eine andere Achse, so wird die Drehachse ihre Richtung im Raume und im Körper nicht ändern, und der Körper wird sich um diese Achse des Gesammt-Kräftepaars $\mathfrak{M}$ gerade so drehen, als wäre sie eine festgehaltene Achse. Denn hielte man sie thatsächlich fest, so würden die Widerstände des Festhaltens wegen dieser Eigenschaft der freien Achse (S. 289) zu Null werden. Die Drehung um diese Achse erfolgt dann mit der Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \mathfrak{M} : J$. — Dies trifft zu für eine gleichartige Kugel unter Einwirkung beliebiger aber gleichbleibender Kräfte, wenn sie zu Anfang keine Drehbewegung um eine andere Achse als die Achse des Gesammtmomentes $\mathfrak{M}$ hatte. Der Schwerpunkt beschreibt eine Parabel; die Achse $\mathfrak{M}$ verschiebt sich mit dem Schwerpunkte und bildet, weil jeder Durchmesser eine freie Achse, fortwährend die Drehachse für den Körper. — Ist aber die Achse $\mathfrak{M}$ durch den Schwerpunkt keine freie Achse, oder ist zu Anfang schon eine Drehung um eine andere Achse vorhanden, so ändert die Achse, um welche die Drehung geschieht, fortwährend ihre Richtung im Körper und im Raume; es entsteht neben der Bewegung des Schwerpunktes, die hierdurch nicht berührt wird, im Allgemeinen eine unregelmässig wirbelnde Bewegung um den Schwerpunkt, die so verwickelt ist, dass sie an dieser Stelle nicht weiter behandelt werden kann; man kann solche Bewegung beobachten, wenn man einen Stab so fortwirft, dass er eine Drehung um eine schief zu ihm liegende Achse mit auf den Weg bekommt. Wird ein Stab (Speer oder Ger) in der Mitte erfasst und in wagerechter Lage so fortgeworfen, dass er keine Drehung auf den Weg bekommt, so beschreibt sein Schwerpunkt — abgesehen von der Wirkung des Luftwiderstandes — eine Wurfparabel; die Stange erfährt, weil $\mathfrak{M} = 0$, keine Drehung, sondern bleibt immer ihrer Anfangslage parallel, stellt sich aber nicht etwa tangential zur Wurflinie. Anders ist es mit einem gespitzten und gefiederten Pfeile; dieser wird durch den Luftwiderstand stets so gedreht, dass seine Längenrichtung ziemlich tangential zur Wurflinie sich stellt.

c) Rollbewegung auf schiefer Ebene. Fuhrwerke.

Bewegung ohne Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Hat ein Umdrehungskörper eine Winkelgeschwindigkeit ω rechtsherum um seine geometrische Achse und wird er gleichzeitig rechtwinklig zur Achse mit der Geschwindigkeit $u = r\omega$ nach rechts verschoben, so setzen sich die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte eines Kreises vom Halbmesser r aus den Einzelgeschwindigkeiten $r\omega$ rechtwinklig zum Drehungshalbmesser und $u = r\omega$ zusammen. An dem Punkte A (Fig. 373) ist dann die Gesammtgeschwindigkeit $v = 0$. Bringt man den Körper an dieser Stelle mit einer Ebene in Berührung, welche mit u und der geometrischen Achse des Körpers parallel ist, so wird der Umdrehungskörper sich gegen diese Ebene in der Art bewegen, dass die Berührungsstelle fortwährend wechselt, dass an der Berührungsstelle aber stets die relative Gleitgeschwindigkeit Null ist. Eine solche Bewegung nennt man eine **Rollbewegung.** Andere, ebenfalls aus Drehung und Verschiebung zusammengesetzte Bewegungen, bei denen aber die Bedingung $r\omega = u$ nicht erfüllt ist, erscheinen äusserlich ebenfalls wie Rollbewegungen, sind es aber nicht, sondern sind, weil an der Berührungsstelle die relative Gleitgeschwindigkeit nicht gleich Null, Gleitbewegungen sich drehender Körper auf einer Ebene. Für die Kräfte und damit auch für die Gesetze der Bewegung ist es von massgebender Bedeutung, ob die Gleitgeschwindigkeit an der Berührungsstelle Null ist, oder nicht. Im ersteren Falle kommt nämlich die Reibung im Allgemeinen mit einem Betrage $T \leq fN$ zur Wirkung, während, wenn u nur im Geringsten von $r\omega$ abweicht, der volle Betrag der Reibung wirksam wird.

Fig. 373.



An dieser Stelle behandeln wir die reine Rollbewegung und werden die Gleitbewegung S. 304 besprechen.

Das Arbeitsvermögen der Rollbewegung ist nach S. 296 $\frac{1}{2} Mu^2 + \frac{1}{2}\omega^2 J$, oder, wenn μ die auf den Halbmesser des Rollkreises r bezogene Masse (wegen $r\omega = u$):

1) $$\tfrac{1}{2}(M + \mu) u^2.$$

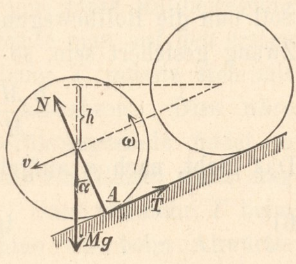
Wird ein Umdrehungskörper (Cylinder, Reif oder Kugel) mit der Geschwindigkeit Null auf eine schiefe Ebene gesetzt und lediglich der Einwirkung der Schwere Mg und des Normalwiderstandes N der Ebene überlassen, so würde er unter Annahme völliger Glätte nicht in Drehung gerathen können, weil Mg und N beide durch den Schwerpunkt gehen; es würde der Körper also eine beschleunigte, rein fortschreitende Gleitbewegung ausführen. In Wirklichkeit setzt sich ein Reibungswiderstand T dem Gleiten entgegen, und wenn dieser in der erforderlichen Grösse zur Wirkung gelangen kann, so wird er das Gleiten verhindern und eine Rollbewegung erzeugen. Unter welchen Bedingungen dies geschieht, bleibt noch zu untersuchen. Daher setzen wir zunächst voraus, dass eine vollkommene Rollbewegung stattfinde, welche entweder durch Reibung erzeugt, oder durch einen um den Rollkreis geschlungenen, von A aus auf der Ebene nach oben hin gerade gestreckten und an ihr befestigten Faden, oder endlich durch eine Verzahnung von Rollkreis und Bahn erzwungen werde. Dann wird durch eines dieser Mittel die für das Rollen erforderliche Umfangskraft T geliefert.

Beginnt die Rollbewegung mit der Geschwindigkeit Null und ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, nachdem dieser um h gesunken, v geworden, so ist die Zunahme an Arbeitsvermögen $\frac{1}{2}(M+\mu)v^2$. Arbeit wird nur von der Schwere im Betrage Mgh verrichtet, denn N und T greifen an der Berührungsstelle A an, deren Geschwindigkeit Null ist. Hiernach muss

$$\tfrac{1}{2}(M+\mu)v^2 = Mgh \text{ sein, oder}$$

$$2) \qquad v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{\mu}{M}}}.$$

Fig. 374.

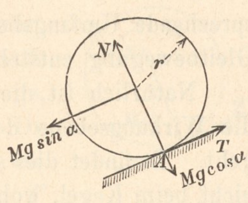


Will man die Bewegung in ihren Einzelheiten kennen lernen, so muss man die Beschleunigungen beider Einzelbewegungen berechnen. Zerlegt man Mg in $Mg\sin\alpha$ und $Mg\cos\alpha$, so muss

$$3) \qquad N = Mg\cos\alpha$$

sein, weil der Schwerpunkt sich geradlinig bewegt, d. h. keine Centripetalbeschleunigung erfährt. Die Beschleunigung p des Schwerpunktes erhält man nach S. 142, indem man T an den Schwerpunkt

Fig. 375.



verschoben denkt, mithin ist $Mp = Mg \sin \alpha - T$. Weil T noch unbekannt, ist eine zweite Gleichung erforderlich. Da in jedem Augenblicke $v = r\omega$, so muss das gleiche Verhältnis auch für die Beschleunigungen gelten, d. h. $r\varepsilon = p$. Weil nun die Umfangsbeschleunigung $r\varepsilon = p$ von T herrührt, so ist nach Gl. 4, S. 277:

$$\mu p = T.$$

Führt man dies in obigen Ausdruck für Mp ein, so ergiebt sich schliesslich

4) $$p = \frac{Mg \sin \alpha}{M + \mu} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{\mu}{M}}.$$

d. h. die treibende Seitenkraft der Schwere $Mg \sin \alpha$ ist nicht allein durch die Masse M, sondern durch die Summe $M + \mu$ zu theilen, da sie nicht nur die fortschreitende Masse M, sondern zugleich die Schwungmasse μ zu beschleunigen hat.

Hiermit ist auch die Umfangskraft T bestimmt zu

5) $$T = \mu p = \frac{\mu Mg \sin \alpha}{M + \mu} = \frac{Mg \sin \alpha}{1 + \frac{M}{\mu}}.$$

Soll nun die Rollbewegung allein durch die Reibung, ohne sonstigen Zwang gesichert sein, so muss $T \leqq fN = fMg \cos \alpha$ sein, oder

$$\frac{\mu Mg \sin \alpha}{M + \mu} \leqq fMg \cos \alpha.$$

Das giebt, nach α aufgelöst:

6) $$\operatorname{tg} \alpha \leqq f\left(1 + \frac{M}{\mu}\right).$$

Genügt die Neigung der schiefen Ebene dieser Bedingung, so ist Rollbewegung möglich. Bei zu grosser Neigung ist $fMg \cos \alpha$ zu klein, um die der grossen Schwerpunktsbeschleunigung p entsprechende Umfangsbeschleunigung zu erzeugen; es wird dann eine Gleitbewegung entstehen.

Natürlich ist die betrachtete Rollbewegung nur möglich, wenn die Wirkungsebene der Kräfte N und T durch den Schwerpunkt geht. Es findet dies statt beim Cylinder, beim Reif, bei der Kugel; nicht beim Kegel, wohl aber bei einem Doppelkegel und allgemeiner bei jeder Achse, auf der zwei symmetrische Umdrehungskörper als

Räder befestigt sind. Da beim dünnen Reif $\mu = M$, beim Cylinder $\mu = \frac{1}{2} M$, bei der Kugel $\mu = 0{,}4\, M$, so wird

für den Reif:

$$v = 0{,}707 \sqrt{2gh} = \sqrt{gh};\ p = \tfrac{1}{2} g \sin\alpha;\ T = \tfrac{1}{2} Mg \sin\alpha;\ \operatorname{tg}\alpha \leqq 2f;$$

für den Cylinder:

$$v = 0{,}817 \sqrt{2gh};\quad p = \tfrac{2}{3} g \sin\alpha;\quad T = \tfrac{1}{3} Mg \sin\alpha;\quad \operatorname{tg}\alpha \leqq 3f;$$

für die Kugel:

$$v = 0{,}845 \sqrt{2gh};\quad p = \tfrac{5}{7} g \sin\alpha;\quad T = \tfrac{2}{7} Mg \sin\alpha;\quad \operatorname{tg}\alpha \leqq 3{,}5 f.$$

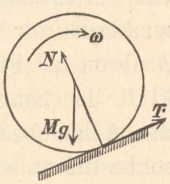
Dagegen würde für reibungsloses Gleiten gelten

$$v = \sqrt{2gh};\quad p = g \sin\alpha.$$

Reif, Cylinder und Kugel, auf schiefer Ebene neben einander los gelassen, bewegen sich hiernach mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Die Kugel eilt am meisten, u. zw. sind dabei die Durchmesser ohne Einfluss; nur auf die Form der Körper kommt es an. Hierbei wurde kein Rollwiderstand vorausgesetzt, der natürlich die Ergebnisse ändern muss.

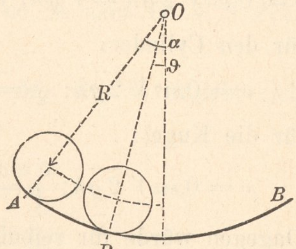
Wird der Körper in eine aufwärts gerichtete Rollbewegung versetzt und der Schwere überlassen, so könnte man auf den ersten Blick vielleicht meinen, der Sinn der Reibung T müsste sich mit der Umkehrung der Bewegung ebenfalls umkehren. Dies wäre jedoch ein Trugschluss, denn an der Berührungsstelle findet ja weder in der Richtung aufwärts, noch abwärts ein Gleiten statt, mag der Körper aufwärts oder abwärts rollen. Dass vielmehr T beim Aufwärtsrollen denselben Sinn behalten muss wie beim Abwärtsrollen, erkennt man aus Folgendem: Beim Aufwärtsrollen wird die Arbeit der Schwere negativ, somit muss die Bewegung des Schwerpunktes verzögert sein, und Gleiches folgt hieraus für die Drehbewegung. Damit aber die einzige Drehkraft T beim Aufwärtsrollen eine Verzögerung der Drehung erzeuge, muss sie (Fig. 376) aufwärts gerichtet sein. Da nun die Kräfte jetzt genau dieselben sind wie beim Abwärtsrollen, so gelten auch für p, T und $\operatorname{tg}\alpha$ dieselben Gleichungen wie beim Abwärtsrollen.

Fig. 376.



Geschieht die Rollbewegung nicht auf einer schiefen Ebene, sondern im unteren Theile einer Cylinderfläche vom Halbmesser $R + r$ mit wagerechten Erzeugenden (Fig. 377), so ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Zwischenlage P nach der auch hier gültigen Gl. 2 (S. 299)

Fig. 377.



$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\mu}{M}}} = \sqrt{\frac{2gR(\cos\vartheta - \cos\alpha)}{1 + \frac{\mu}{M}}},$$

wenn die Bewegung bei A mit der Geschwindigkeit Null begann. Bei einem mathematischen Pendel von der Fadenlänge R würde

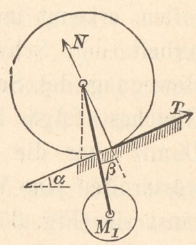
$$v_1 = \sqrt{2gR(\cos\vartheta - \cos\alpha)} \text{ sein.}$$

Die Vertauschung des einfachen Pendels mit einem hin und her rollenden Körper ist also (wegen der Verkleinerung der Beschleunigung des Schwerpunktes, S. 300) gleichbedeutend mit einer Ersetzung der Fallbeschleunigung g durch den kleineren Werth $g : \left(1 + \frac{\mu}{M}\right)$; mithin wird die Dauer einer kleinen einfachen Schwingung sein

$$7) \qquad t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}\left(1 + \frac{\mu}{M}\right)}.$$

Bewegung der Fuhrwerke mit Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Tragen die auf schiefer Ebene rollenden Räder von der Gesammtmasse M ein Fuhrwerk von der Masse M_1, welches nur an der Verschiebung mit der Beschleunigung p Theil nimmt, so denkt man sich zur Berechnung der letzteren die Masse M_1 zunächst an der Achse des rollenden Körpers reibungslos aufgehängt. Die Gelenkstange zur Aufhängung nimmt dann im relativen Ruhezustande gegen die Achse des rollenden Körpers eine Richtung an, welche von der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene um einen Winkel β abweicht (Fig. 378). Nennt man die Spannkraft der Stange, die zugleich den Druck auf die Achse bedeutet, D, so müssen D und β so bestimmt werden, dass M_1 nur an der Verschiebungsbeschleunigung p Theil nimmt. Ersetzt man die Stange durch die Kraft D und zerlegt die an M_1 wirkenden D und $M_1 g$

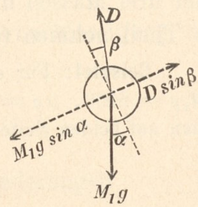
Fig. 378.



parallel zur Ebene und rechtwinklig dazu (Fig. 379), so wird $D \cos\beta = M_1 g \cos\alpha$, ferner $M_1 p = M_1 g \sin\alpha - D \sin\beta$ oder $D \sin\beta = M_1 g \sin\alpha - M_1 p$. Daraus folgt

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - \frac{p}{g\cos\alpha}$$

Fig. 379.

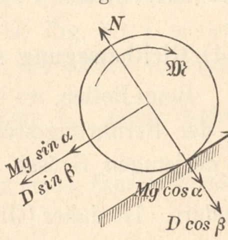


$$8)\quad D = M_1 g \sqrt{1 - 2\sin\alpha\frac{p}{g} + \left(\frac{p}{g}\right)^2}.$$

An dem rollenden Körper wirken nun die in Fig. 380 angegebenen Kräfte, wo $\mathfrak{M}$ das gesammte, aus Zapfenreibung und Rollwiderstand herrührende Moment bedeutet. Nach S. 252 ist $\mathfrak{M} = {}^1/_2 Dfd + Ne$, wenn d der Zapfendurchmesser, e der Arm des Rollwiderstandes. Dann gilt für die Beschleunigung p des Schwerpunktes

$$Mp = Mg\sin\alpha + D\sin\beta - T \text{ oder}$$

Fig. 380.



$$9)\ Mp = Mg\sin\alpha + M_1 g\sin\alpha - M_1 p - T;$$

und für die Umfangsbeschleunigung der Drehung nach S. 277

$$\mu p = T - \frac{\mathfrak{M}}{R}, \text{ oder}$$

$$T = \mu p + \frac{Dfd}{2R} + \frac{Ne}{R},$$

wenn R der Halbmesser des Rollkreises. Setzt man dies in Gl. 9 ein, so ergiebt sich

$$(M + M_1 + \mu)p = (Mg + M_1 g)\sin\alpha - \frac{Dfd}{2R} - \frac{Ne}{R}.$$

Diese Gleichung ist nach p nicht ohne Weiteres aufzulösen, weil in D nach Gl. 8 die Grösse p ebenfalls noch vorkommt. Für alle wichtigen Fälle aber, in denen ein Fuhrwerk frei läuft, ist α und darnach auch $p:g$ nur klein im Verhältnisse zu Eins, so dass man mit genügender Annäherung $D = M_1 g$ setzen kann. Daher wird der Zapfenreibungswiderstand $M_1 gfd:(2R)$, und weil $N = (M + M_1)g\cos\alpha$, der Rollwiderstand $(M + M_1)g\cos\alpha\cdot e:R$, wobei für schwache Neigungen $\cos\alpha$ mit Eins vertauscht werden darf.

Führt man aber, wie S. 254, wiederum die Gleichgewichts-Neigung α_0 ein, welche so beschaffen, dass wenn $\alpha = \alpha_0$ $p = 0$ ist, so wird die Summe der beiden Widerstände wieder gleich mit

$(M + M_1) g \sin \alpha_0$, und wenn man dann noch, wie früher (S. 253), $\sin \alpha$ mit α vertauscht, so entsteht

10) $$(M + M_1 + \mu) p = (M + M_1) g (\alpha - \alpha_0),$$

worin auf der linken Seite die Beschleunigung p mit der Summe der drei Massen multiplicirt erscheint, welche an der Beschleunigung p Theil nehmen (ebenso wie bei der Fallmaschine, S. 285).

Beispiel: Für einen Eisenbahnwagen auf schiefer Ebene sei $Mg = 2000$, $M_1 g = 8000$, $\mu g = 1000^{\mathrm{kg}}$, $\alpha = 1 : 200$, $\alpha_0 = 1 : 400$. Dann wird, wenn man auf beiden Seiten der Gl. 10 statt der Massen die Gewichte einführt,

$$11\,000 p = 10\,000 g \cdot {}^1/_{400} \quad \text{oder}$$

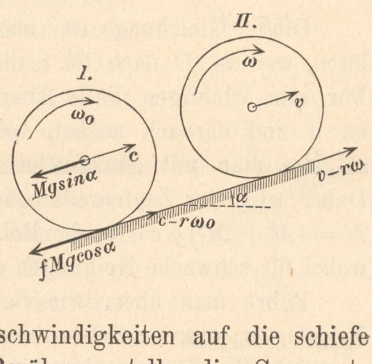
$$p = \frac{g}{440} = 0{,}023 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s.}^2}.$$

Ohne Geschwindigkeit losgelassen, wird der Wagen in 10 Sekunden eine Strecke ${}^1/_2 pt^2 = 1{,}1^{\mathrm{m}}$ zurückgelegt haben, innerhalb einer Minute aber 36 mal so viel, nämlich $39{,}6^{\mathrm{m}}$. Der Wagen läuft auf dem Gefälle 1 : 200 unter Einfluss der Widerstände ganz so, als ob er widerstandslos sich auf einem um α_0 schwächeren Gefälle 1 : 400 bewegte.

d) Gleitbewegung sich drehender Körper auf schiefer Ebene.

Beim Rollen, wo die Geschwindigkeit des Körpers gegen die Ebene an der Berührungsstelle Null ist, tritt der Reibungswiderstand nur in derjenigen Grösse auf, die erforderlich, um das Gleiten zu verhindern. Ist daher (Gl. 6, S. 300) $\operatorname{tg} \alpha < f\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)$, so ist $T < fN$; sind aber die anfänglichen Einzelbewegungen so beschaffen, dass an der Berührungsstelle ein Gleiten stattfindet, so tritt die Reibung in der Grösse $fMg \cos \alpha$ auf; doch wird nach einer gewissen Zeit die Gleitbewegung in eine Rollbewegung übergehen, wenn die Bedingung für eine solche (Gl. 6, S. 300) erfüllt ist, und in diesem Augenblicke verändert sich dann die Reibung plötzlich. Der Umdrehungskörper habe zu Anfang (Stellung I in Fig. 381) eine Drehung mit der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega_0$, eine Geschwindigkeit des Schwerpunktes c und werde mit diesen Geschwindigkeiten auf die schiefe Ebene gesetzt, so dass an der Berührungsstelle die Gesammt-

Fig. 381.



geschwindigkeit $c - r\omega_0$ entsteht. Es sei $c > r\omega_0$, dann wirkt in Fig. 381 der Reibungswiderstand $fMg \cos \alpha$ abwärts, die Seitenkraft der Schwere $Mg \sin \alpha$ ebenfalls abwärts. Der Schwerpunkt erfährt dadurch eine abwärts gerichtete Beschleunigung

$$p = g(f \cos \alpha + \sin \alpha). \tag{1}$$

Die Drehung erfährt nach S. 277 und unter Vernachlässigung des Rollwiderstandes eine Umfangsbeschleunigung

$$r\varepsilon = f\frac{M}{\mu} g \cos \alpha. \tag{2}$$

In t Sekunden entstehen die Geschwindigkeits-Änderungen

$$c - v = pt \quad \text{und} \quad r(\omega - \omega_0) = r\varepsilon t$$

mit dem Verhältnisse

$$\frac{c - v}{r\omega - r\omega_0} = \frac{p}{r\varepsilon}. \tag{3}$$

Soll nun v diejenige Geschwindigkeit des Schwerpunktes sein, bei der die Rollbewegung beginnt (Stellung II, Fig. 381), so muss $r\omega = v$ eingesetzt werden. Hiermit liefert die letzte Gleichung, nach v aufgelöst: $v = \frac{cr\varepsilon + pr\omega_0}{p + r\varepsilon}$; die Zeit t_1, nach welcher das Rollen beginnt, ist dann $t_1 = \frac{c - v}{p}$, oder nach Einsetzen von v

$$t_1 = \frac{c - r\omega_0}{p + r\varepsilon}. \tag{4}$$

Nach dieser Zeit t_1 ist die Geschwindigkeit an der Berührungsstelle Null, und die Reibung wechselt ihren Sinn. Ist nun die Bedingung Gl. 6, S. 300 erfüllt, so wird eine Rollbewegung eintreten. Andernfalls wird die Gleichheit der beiden Geschwindigkeiten v und $r\omega$ nur einen Augenblick währen, aber sogleich wieder aufhören, weil die Reibung nicht hinreicht, sie zu erhalten. — Für $r\omega_0 > c$ wechselt die Reibung ihren Sinn, es wird

$$p = g(\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad r\varepsilon = -f\frac{M}{\mu} g \cos \alpha \quad \text{und}$$

$$t_1 = \frac{r\omega_0 - c}{r\varepsilon - p}, \quad \text{wie man leicht findet.}$$

Beispiel 1: Eine Kugel von 0,1 m Halbmesser werde nach Fig. 381 mit 8 m sekundlicher Geschwindigkeit des Schwerpunktes und 2 m Umfangsgeschwindigkeit der Drehbewegung auf eine mit $\alpha = 1/10$ ansteigende Bahn geworfen. Die anfängliche Gleitgeschwindigkeit ist daher $6 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$. Die Reibungsziffer betrage $f = 0{,}2$.

In diesem Falle ist $\cos \alpha$ annähernd $= 1$ zu setzen, $\sin \alpha = 0{,}1$, $M = 2{,}5\,\mu$ (S. 273), mithin $p = g\,(0{,}2 + 0{,}1) = 0{,}3\,g$; $r\varepsilon = g \cdot 2{,}5\; 0{,}2 = 0{,}5\,g$. Die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, ist $v = 5{,}75 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$; die entsprechende Zeit

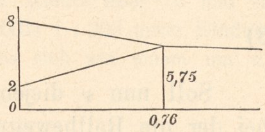
$$t_1 = \frac{8 - 2}{0{,}8\,g} = 0{,}76\ ^{\text{s.}}.$$

In diesem Augenblicke vermindert sich die Reibung nach Gl. 5, S. 300 auf

$$T = \frac{Mg \cdot 0{,}1}{3{,}5} = {}^1\!/_{35}\, Mg\,,$$

während sie vorher ${}^1\!/_5\, Mg$ betrug. Die Verzögerung der Rollbewegung wird nun (Gl. 4, S. 300) $p = {}^5\!/_7\, g \sin \alpha = 0{,}0714\, g = 0{,}7$. Die Geschwindigkeit wird Null nach weiterem Verlaufe von $5{,}75 : 0{,}7 = 8{,}2\ ^{\text{s.}}$, während dessen (nach Gl. 3, S. 12) $5{,}75 \cdot 4{,}1 = 23{,}6\ ^{\text{m}}$ zurückgelegt werden. Von dieser Stelle an rollt die Kugel mit der Beschleunigung $p = 0{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$ rückwärts, soweit die Bahn reicht. Die Geschwindigkeitsgesetze sind in Figur 382 dargestellt. Die obere Linie bezieht sich auf den Schwerpunkt, die untere auf die Umfangsgeschwindigkeit der Drehung; beide treffen sich beim Beginne des Rollens.

Fig. 382.



1 a. Hat die Bahn keine nennenswerthe Neigung, ist also $\alpha = 0$, so wird die Verzögerung des Schwerpunktes $p = 0{,}2\,g$; die Umfangsbeschleunigung der Drehung $r\varepsilon = 0{,}5\,g$. Die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, wird dann $v = 6{,}3 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$, die entsprechende Zeit $t_1 = 0{,}974\ ^{\text{s.}}$. Mit der Geschwindigkeit v setzt die Kugel die Rollbewegung gleichmässig fort, wenn kein Rollwiderstand sie verzögert.

B e r ü c k s i c h t i g u n g d e s R o l l w i d e r s t a n d e s. Während des Gleitens wird nach S. 248

$$r\varepsilon = \left(f - \frac{e}{r}\right) \frac{M}{\mu}\, g \cos \alpha \tag{5}$$

zu setzen sein, während des Rollens

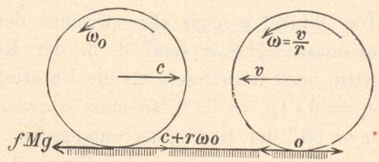
$$p = g\, \frac{\sin \alpha - {}^e\!/_r \cos \alpha}{1 + \frac{\mu}{M}}\,. \tag{6}$$

Letzteres giebt für $\alpha = 0$, $e = 0{,}5\ ^{\text{mm}}$, $r = 100\ ^{\text{mm}}$ eine Verzögerung $= \frac{g}{700} = 0{,}014 \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$.

1 b. Ein Umdrehungskörper, z. B. eine Kugel, kann auch auf wagerechter Bahn so fortgeworfen, fortgeschnellt, werden, dass sie nach einer gewissen Zeit zurückrollt (Billardkugel). Giebt man ihr eine grosse Drehungsgeschwindigkeit ω_0 links herum und wirft sie mit nicht zu grosser Geschwindigkeit c nach

rechts fort (Fig. 383), so erfährt sie unter Vernachlässigung des Rollwiderstandes eine Verzögerung des Schwerpunktes $p = fg$, eine Umfangsverzögerung $r\varepsilon = fgM : \mu$; also $\mu r \varepsilon = Mp$. Ist v die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, so muss diese negativ, d. h. nach links gerichtet sein, denn während des Rollens auf wagerechter Bahn kann eine Änderung des Sinnes der Geschwindigkeit nicht mehr vorkommen. Ist t_1 die Zeit, nach der das Zurückrollen beginnt, so wird

Fig. 383.



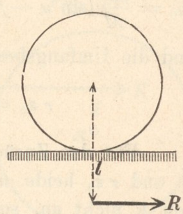
$$c + v = pt_1, \quad r\omega_0 - v = r\varepsilon t_1,$$

$$\text{mithin} \quad v = \frac{p\, r\, \omega_0 - c\, r\, \varepsilon}{p + r\, \varepsilon} \quad \text{und} \quad t_1 = \frac{c + r\,\omega_0}{p + r\,\varepsilon}.$$

Soll nun die Kugel rückläufig, also $v > 0$ sein, so muss $p\, r\, \omega_0 > c\, r\, \varepsilon$ oder $\mu\, r\, \omega_0 > Mc$, also bei einer Kugel mit $\mu = 0{,}4\, M$ $\; r\,\omega_0 > {}^5\!/_2\, c$, sein. Es lässt sich sogar erreichen, dass $v > c$ wird, d. h. dass die Kugel schneller zurückrollt, als sie fortgeworfen wurde. Dazu muss

$r\,\omega_0 > c\left(1 + 2\,\frac{r\,\varepsilon}{p}\right)$, bei einer Kugel $r\,\omega_0 > 6\,c$, sein.

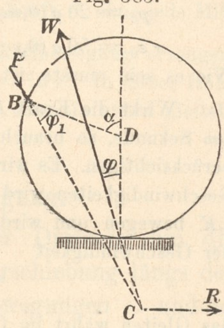
Fig. 384.



1c. Sollen der ursprünglich ruhenden Kugel durch eine grosse, nur sehr kurze Zeit t_0 wirkende Kraft P solche Geschwindigkeiten $r\,\omega_0$ und c ertheilt werden, dass ein Zurückrollen eintritt, dass also $\mu\, r\,\omega_0 > Mc$ wird, so sind dazu Beschleunigungen $r\,\varepsilon_0$ und p_0 erforderlich, die in der Zeit t_0 die Geschwindigkeiten $r\,\omega_0$ und c hervorbringen; es muss also auch $\mu\, r\,\varepsilon_0 > Mp_0$ sein.

Auf die Kugel wirke die Schwere Mg, der um den Reibungswinkel φ von der Normalen abweichende Gesammtwiderstand W der Bahn und die gesuchte Kraft P. Die Mittelkraft R dieser drei muss wagerecht gerichtet sein, da die Beschleunigung p_0 des Schwerpunktes wagerecht sein soll (Fig. 384), u. zw. muss die Lage von R sich unterhalb des Schwerpunktes befinden (etwa um l), dann wird $\mu\, r\,\varepsilon_0 = R\, l : r$ und $M\, p_0 = R$, wobei $l > r$ sein muss, damit $\mu\, r\,\varepsilon_0 > M p_0$ werde. Gegenüber der grossen Kraft P möge das Gewicht der Kugel vernachlässigt werden.

Fig. 385.



Der Punkt B (Fig. 385), an welchem der Druck P auf die Kugel ausgeübt werden soll, möge durch den Mittelpunktswinkel α bestimmt sein. Übt man die Kraft P aus, indem man mit elnem lederbeschlagenen Stabe bei B in der Richtung BC gegen die Kugel stösst, oder indem man mit der Hand an der Kugel (bei B sie berührend) abwärts schlägt, so wird der Stab bezw. die Hand an der Kugel gleiten und die

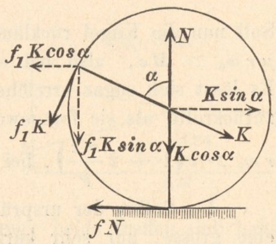
Richtung des Druckes P von der Normalen DB um den Reibungswinkel φ_1, der für Kugel und stossenden Körper gilt, abweichen. Soll nun der Schnittpunkt von W und P unterhalb der Kugel liegen, so muss $\alpha - \varphi_1 > \varphi$ und zugleich $\varphi_1 > {}^1/_2\, \alpha$ sein, woraus folgt

$$\alpha > \varphi + \varphi_1 \quad \text{und} \quad \alpha < 2\,\varphi_1.$$

Der Winkel α muss also zwischen den Grenzen $\varphi + \varphi_1$ und $2\,\varphi_1$ liegen, und es muss $\varphi_1 > \varphi$ sein, d. h. der Körper, mit dem der Druck P ausgeübt wird, muss rauher sein als die Unterlage der Kugel. Ist z. B. $f = 0{,}2$ ($\varphi = 11^0$), $f_1 = 0{,}8$ ($\varphi_1 = 39^0$), so muss α zwischen 50 und 78° liegen; es würde daher $\alpha = 60^0$ der Bedingung entsprechen.

Zerlegt man nuu den Druck P in einen Normaldruck K und die Reibung $f_1 K$, W in N und fN, zerlegt ferner K und $f_1 K$ nach wagerechter und lothrechter Richtung, so wird (Fig. 386), da in lothrechtem Sinne keine Verschiebung erfolgt, $N = K(\cos\alpha + f_1 \sin\alpha)$. Dann ergiebt sich als Beschleunigung des Schwerpunktes nach rechts

Fig. 386.



$$p_0 = \frac{K\sin\alpha - f_1 K\cos\alpha - fN}{M} \quad \text{oder}$$

$$p_0 = \frac{K}{M}(\sin\alpha - f_1\cos\alpha - f\cos\alpha - ff_1\sin\alpha)$$

und die Umfangsbeschleunigung der Drehung

$$r\,\varepsilon_0 = \frac{f_1 K - fN}{\mu} = \frac{K}{\mu}(f_1 - f\cos\alpha - ff_1\sin\alpha).$$

Für das Zurückrollen besteht nun die Bedingung $\mu\, r\,\varepsilon_0 > p_0 M$; da nun p_0 und $r\,\varepsilon_0$ beide mit K verhältnisgleich sind, so kommt es auf die Grösse von K nicht an, sondern nur auf die Winkel α, φ und φ_1. Eine Veränderlichkeit der Grösse von K, wie sie beim Stosse besteht, bringt keine wesentliche Änderung.

Es sei $\alpha = 60^0$, $f = 0{,}2$, $f_1 = 0{,}8$ und beispielsweise $K = 20\,Mg$, dann wird

$$p_0 = 20\,g\,(0{,}866 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}866) = 44{,}5;$$

$$r\,\varepsilon_0 = 50\,g\,(0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}866) = 275.$$

Wie es sein musste, ist $r\,\varepsilon_0 > 6\,p_0$.

Wirkt die Kraft $K = 20\,Mg$ nebst der entsprechenden Reibung $f_1 K$ nur ${}^1/_{20}$ Sekunde, so braucht man die Verschiebung ihres Angriffspunktes nicht zu berücksichtigen. Es wird dann $c = 44{,}5 \cdot {}^1/_{20} = 2{,}23$, $r\,\omega_0 = 13{,}75$. Mit diesen Geschwindigkeiten wird sich die Kugel nach dem Aufhören der Kräfte K und $f_1 K$ bewegen und wird, da nun $p = 0{,}2\,g$ und $r\,\varepsilon = 0{,}5\,g$, zurückrollen mit der Geschwindigkeit

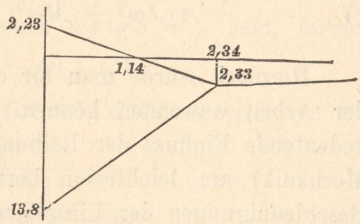
$$v = \frac{0{,}2 \cdot 13{,}75 - 2{,}23 \cdot 0{,}5}{0{,}2 + 0{,}5} = 2{,}33;$$

das Gleiten währt im Ganzen

$$t_1 = \frac{c + r\,\omega_0}{p + r\,\varepsilon} = 2{,}34 \text{ Sek.}$$

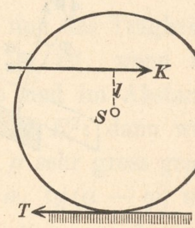
Die Umkehr der Kugel erfolgt übrigens schon während des Gleitens. Nach der Zeit $t = c : (fg) = 2{,}23 : 1{,}962 = 1{,}14$ Sek. und nachdem die Kugel sich um $s' = 2{,}23 \cdot 1{,}14 \cdot 0{,}5 = 1{,}27$ m nach rechts bewegt hat, ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes nach rechts Null geworden, kehrt dann während des Restes der Gleitzeit, d. h. während der Zeit $t'' = 2{,}34 - 1{,}14 = 1{,}20$ Sek. um $s'' = 2{,}33 \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}5 = 1{,}4$ m gleitend nach links zurück. An dem um $0{,}13$ m links von der Ausgangsstelle gelegenen Punkte beginnt erst das Rollen, welches sich dann mit der Geschwindigkeit $2{,}33$ m/s. fortsetzt. Fig. 387 zeigt die Geschwindigkeitsgesetze der Bewegungen.

Fig. 387.



Beispiel 2: Wirkt auf eine auf wagerechter Ebene anfänglich ruhende Kugel eine wagerechte Kraft K, die um l oberhalb des Schwerpunktes liegt, nach rechts und soll eine Rollbewegung entstehen, so ist am Auflagerpunkte ein Widerstand T erforderlich, den wir nach links gerichtet annehmen wollen (Fig. 388). Die Beschleunigung des Schwerpunktes p (S. 142) und die Winkelbeschleunigung ε der Drehung (S. 276) werden dann

Fig. 388.



$$p = \frac{K - T}{M}; \quad \varepsilon = \frac{Kl + Tr}{\mu r^2}.$$

Für Rollbewegung muss nun $r\varepsilon = p$ sein, oder

$$K\mu r - T\mu r = KMl + TMr.$$

Hieraus bestimmt sich

$$T = K\frac{\mu r - Ml}{(M + \mu) r}.$$

Für $l = 0$ wird $T = K : \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) = {}^2/_7\, K$. Für $l = r$ wird T negativ, nämlich $T = -K\frac{M - \mu}{M + \mu} = -{}^3/_7\, K$. Soll aber die Kraft K ohne jede Mitwirkung von T, d. h. auf völlig glatter Ebene eine Rollbewegung erzeugen, soll $T = 0$ sein, so wird $l : r = \mu : M = 0{,}4$, d. h. $l = {}^2/_5\, r$. In dieser Höhe darf eine Kugel beliebig heftig gestossen werden, ohne dass sie unten gleitet; sie wird sofort eine Rollbewegung beginnen.

e) Beschleunigte Schraubenbewegung.

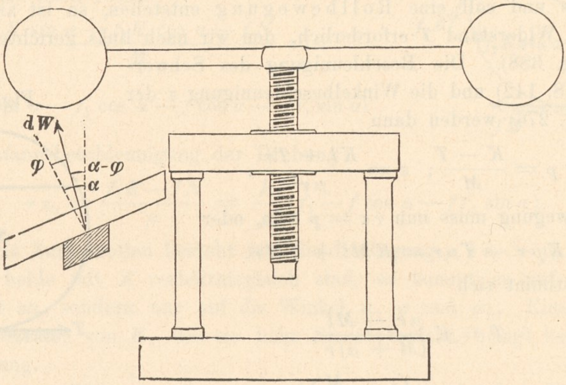
Die Schraubenbewegung besteht aus einer Drehung um die Achse der Schraube und einer gleichzeitigen Verschiebung längs der Achse. Sind die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen ω und u, so ist das Arbeitsvermögen der Schraube $^1/_2\, J\omega^2 + {}^1/_2\, Mu^2$ (S. 296). Weil aber bei der Schraube vom mittleren Halbmesser r, dem Steigungswinkel a der mittleren Schraubenlinie und der Ganghöhe h $2r\pi \operatorname{tg} a = h$, so ist auch $r\omega \operatorname{tg} a = u$, also mit $J = \mu r^2$

$$1) \qquad {}^1\!/_2\,(J\omega^2 + Mu^2) = {}^1\!/_2\left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2 a} + M\right)u^2.$$

Hiernach würde man für eine ideelle Schraube leicht den Satz der Arbeit anwenden können. Der bei wirklichen Schrauben sehr bedeutende Einfluss der Reibung kann aber (nach A. Ritter, Techn. Mechanik) am leichtesten berücksichtigt werden, wenn man die Beschleunigungen der Einzelbewegungen berechnet.

Die Schraube sei flachgängig und oben mit Schwungkugel-Armen versehen (Fig. 389). Solche Schrauben kommen in Präge-

Fig. 389.



werken und in Hüttenwerken (zum Zerbrechen von Eisenstäben) vor. Die Schrauben werden durch Arbeiter in die Höhe gedreht und sind nicht selbsthemmend, vielmehr gewinnen sie durch ihr Gewicht (z. Th. unter Nachhülfe der Arbeiter) ein gewisses Arbeitsvermögen, welches dann zum Zerbrechen verbraucht wird. Die treibende Kraft sei allein die Schwere Mg. Ein Theilchen der Schraubenmutter leistet beim Abwärtsgleiten einen Widerstand dW, der um $a - \varphi$ von der Achsenrichtung abweicht.

Der Schwerpunkt der Schraube kann sich nur geradlinig bewegen; die Beschleunigung p des Schwerpunktes folgt aus der Gleichung

$$2) \qquad Mp = Mg - \cos(a - \varphi) \int dW.$$

Die wagerechten Seitenkräfte $\sin(\alpha - \varphi)\, dW$ bilden das treibende Kräftepaar für die Drehung; es wird (S. 277, Gl. 4)

$$\mu r \varepsilon = \sin(\alpha - \varphi) \int dW.$$

Weil aber $r\omega \operatorname{tg} \alpha = u$, so muss auch $r\varepsilon \operatorname{tg} \alpha = p$ sein, mithin

3) $$\mu p = \operatorname{tg} \alpha \sin(\alpha - \varphi) \int dW.$$

Entfernt man aus Gl. 2 und 3 die Grösse $\int dW$, so wird

4) $$p = \frac{g}{1 + \dfrac{\mu}{M} \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}}.$$

Ist die Schraube in a u f w ä r t s drehende Bewegung versetzt und wird sie dann der Wirkung der Schwere überlassen, so kehrt die Reibung ihren Sinn um, es ist $-\varphi$ mit $+\varphi$ zu vertauschen, und die Verzögerung der aufwärts gerichteten Bewegung wird

5) $$p = \frac{g}{1 + \dfrac{\mu}{M} \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}}.$$

Bei einer Spindel mit Schwungkugeln wird nun das Trägheitsmoment wesentlich von diesen geliefert, und es ist, wenn die Schwungkugeln zusammen die Masse M_1 haben und im Abstande R von der Mitte sich befinden, annähernd $J = M_1 R^2$; dann wird $\mu r^2 = M_1 R^2$ und, weil $R : r$ meist gross, auch μ sehr gross gegen M. Ausserdem sind, wenn auch $\alpha > \varphi$ ist, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$ und $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ immer ziemlich kleine Brüche, so dass $\dfrac{\mu}{M} \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi)}$ gegen die Einheit so gross wird, dass diese dagegen verschwindet. Daher kann man mit grosser Annäherung statt der Gl. 4 und 5 die einfachere Doppelformel

6) $$p = g \frac{M}{\mu} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi) \quad \text{schreiben.}$$

Beginnt die Bewegung mit der Geschwindigkeit Null, so ist, nachdem die Schraube um h gesunken,

7) $$v^2 = 2ph.$$

Das Arbeitsvermögen wird dann $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + M\right) 2ph$.

Beispiel: Das Gesammtgewicht der Schraube betrage 300 kg, wovon auf die Schwungkugeln 200 kg kommen mögen. Ausserdem sei $\operatorname{tg} \varphi = f = 0{,}1$; $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}2$;

$R = 20\,r$. Dann ist $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = 0{,}098$, $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 0{,}306$ Ferner ist mit genügender Genauigkeit $\mu r^2 = {}^2\!/_3\, M R^2$, daher $\mu = {}^2\!/_3 \cdot 400\, M = {}^{800}\!/_3\, M$, so dass dagegen M in Gl. 1 zu vernachlässigen ist. Dann kann auch das Arbeitsvermögen einfacher geschrieben werden $\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \frac{u^2}{2} = \frac{20\,000\, M}{3} \frac{u^2}{2}$. Die Beschleunigung der Abwärtsbewegung wird nach Gl. 6

$$p = g\, \frac{3}{800}\, 0{,}2 \cdot 0{,}098 = 0{,}000\,074\, g = 0{,}000\,72\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s.}^2}\,.$$

Nennt man p_0 die Beschleunigung einer reibungslosen Schraube von den gleichen Verhältnissen, so ist nach Gl. 6 (für $\varphi = 0$)

$$p_0 = g\, \frac{M}{\mu} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{daher} \quad p = p_0\, \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}\,.$$

Da nun nach Gl. 7 v^2 mit p verhältnisgleich, so ist auch, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_0$ das Arbeitsvermögen der wirklichen bezw. der reibungslosen Schraube, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}$. Will man daher das Arbeitsvermögen der sinkenden Schraube verwerthen, so ist $\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}$ der Wirkungsgrad der sinkenden Schraube. Es muss zugleich $\mathfrak{A}_0 = M g h$ sein, da bei der reibungslos sinkenden Schraube nur die Schwerkraft Arbeit verrichtet. Um aber von der Höhe h sinken zu können, musste die Schraube um diese Grösse gehoben werden, und weil der Wirkungsgrad der Schraube beim Heben nach S. 259 $\eta_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$, so war zum Heben die Arbeit $\mathfrak{A}_1 = M g h\, \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}$ erforderlich. Betrachtet man nun Auf- und Abwärtsbewegung im Zusammenhange, so ist der Gesammt-Wirkungsgrad

$$\eta_2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}_2} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = 0{,}32\,.$$

Annähernd kann man auch bei der Kleinheit der Winkel α und φ $\operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi) = \operatorname{tg} \alpha \mp f$ schreiben, dann wird

$$\eta_2 = \frac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}2 + 0{,}1} = \frac{1}{3} = 0{,}33\,.$$

Derartige Vernachlässigungen sind zulässig, weil ja φ und f doch in jedem Falle nur unsicher bekannt sind. Um die Schraube von 300 kg Gewicht um $h = 0{,}1$ m zu heben, waren $30 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}$ = annähernd 45 mkg Arbeit aufzuwenden. Nach dem Hinabsinken um 0,1 m beträgt das Arbeitsvermögen noch $30 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}$ = annähernd 15 mkg.