6. Widerstände der festen Drehachse eines Körpers bei beschleunigter Drehbewegung.

An der Achse des Körpers mögen an 2 Lagerstellen A und B die Widerstände A und B auftreten, welche die Aufgabe erfüllen, die Achse unbeweglich zu halten. Es mögen an dem Körper bewegende Kräfte $[K]$ wirken. Sind ω und ε die augenblickliche Winkel-Geschwindigkeit und Beschleunigung, so hat ein Massenpunkt eine daraus zu ermittelnde Beschleunigung p, welcher eine Ergänzungskraft $-mp$ entspricht. Es muss nun nach dem Satze von d'Alembert die Gruppe dieser Kräfte $[-mp]$ im Gleichgewichte sein mit den Widerständen A und B und der Gruppe der sonstigen äusseren Kräfte $[K]$. Hiernach können A und B gefunden werden, wenn man die Kräftegruppe $[-mp]$ kennt.

Zusammensetzung der Ergänzungskräfte $-mp$ bei ungleichmässiger Drehbewegung. Ein Massenpunkt im Abstande ϱ von der Achse (Fig. 359) führt eine Kreisbewegung aus. Seine Tangentialbeschleunigung ist $p_t = \varrho\varepsilon$, seine Centripetalbeschleunigung $p_n = \varrho\omega^2$ (S. 88). Die entsprechenden Ergänzungskräfte sind die Kraft $m\varrho\varepsilon$ (links herum) und die Centrifugalkraft $m\varrho\omega^2$. Die Drehachse wählen wir zur x-Achse; A sei der Anfangspunkt des Achsenkreuzes (Fig. 359). In einer besonderen Figur (359a) sei der Körper in der Richtung der Drehachse, also auf die yz-Ebene projizirt, weil die Beschleunigungen p_t und p_n und ebenso die entsprechenden Kräfte in dieser Projektion am deutlichsten erscheinen. Bildet der Halbmesser $\varrho = AP$ mit der AY den Winkel ϑ, so ist

Fig. 359.

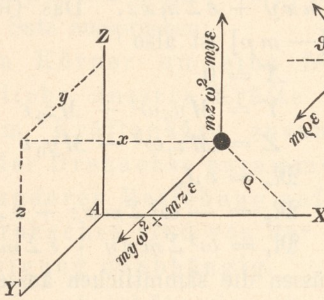
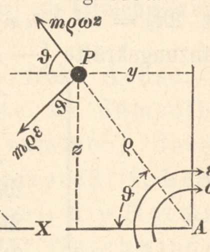


Fig. 359a.



$$\varrho \cos\vartheta = y; \quad \varrho \sin\vartheta = z.$$

Die Kraft $m\varrho\omega^2$ liefert in der positiven y-Richtung die Seitenkraft $m\varrho\omega^2 \cos\vartheta = my\omega^2$, in der positiven z-Richtung die Seitenkraft $m\varrho\omega^2 \sin\vartheta = mz\omega^2$. Ebenso giebt die Kraft $m\varrho\varepsilon$ die entsprechenden Seitenkräfte $m\varrho\varepsilon \sin\vartheta = mz\varepsilon$ bezw. $-m\varrho\varepsilon\cos\vartheta = -my\varepsilon$.

Diese Seitenkräfte sind in Fig. 359 eingetragen. Denkt man sich solche Kräfte für jeden einzelnen Massenpunkt angebracht und setzt diese Kräftegruppe nach S. 112 zusammen, so erhält man 3 durch den Punkt A gehende Seitenkräfte X, Y, Z und 3 Kräftepaar-Achsen $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$. In der x-Richtung ergeben sich keine Seitenkräfte. In der positiven y-Richtung entsteht $Y = \Sigma my\omega^2 + \Sigma mz\varepsilon$, oder, weil ω und ε für alle Punkte dieselben Werthe haben und ausserdem $\Sigma my = My_0$, $\Sigma mz = Mz_0$ (mit y_0 und z_0 als Koordinaten des Schwerpunktes),

$$Y = My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon.$$

In gleicher Weise wird $Z = Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon$. Zur Ermittelung der Kräftepaar-Achse $\mathfrak{M}_x$ gehen wir am einfachsten auf die ursprünglichen Kräfte $m\varrho\omega^2$ und $m\varrho\varepsilon$ zurück, da $m\varrho\omega^2$ in Bezug auf AX kein Moment hat, $m\varrho\varepsilon$ aber das Moment $-m\varrho\varepsilon\varrho$, sodass $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon\Sigma m\varrho^2 = -\varepsilon J_x$, was nach Gl. 2, S. 276 selbstverständlich war. Die in der z-Richtung wirkenden Kräfte gehen an der AY in einem Abstande x vorbei, liefern daher mit Rücksicht auf den Drehungssinn $\mathfrak{M}_y = -\omega^2\Sigma mxz + \varepsilon\Sigma mxy$; ebenso ist $\mathfrak{M}_z = \omega^2\Sigma mxy + \varepsilon\Sigma mxz$. Das Gesammtergebnis der Ergänzungskräfte $[-mp]$ ist also

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= 0 \\ Y &= My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon \\ Z &= Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon \\ \mathfrak{M}_x &= \varepsilon J_x \\ \mathfrak{M}_y &= -\omega^2\Sigma mxz + \varepsilon\Sigma mxy \\ \mathfrak{M}_z &= \omega^2\Sigma mxy + \varepsilon\Sigma mxz. \end{aligned}\right.$$

Hiermit müssen die sämmtlichen äusseren Kräfte $[K]$ und die Widerstände A und B im Gleichgewichte sein. In den vorstehenden Gleichungen erscheinen Summenausdrücke Σmxy und Σmxz; um sie zu erhalten, muss man jedes Massentheilchen m mit zweien seiner Koordinaten xy bezw. xz multipliciren und die Glieder dann summiren. Diese Ausdrücke sind von demselben Grade, derselben Dimension wie die Trägheitsmomente $J = \Sigma m\varrho^2$ und heissen **Centrifugalmomente** $= C$. Wir wollen Σmxy und Σmxz von einander unterscheiden, indem wir neben C als Zeiger diejenige Ordinate setzen, welche in den Summen nicht vorkommt, mithin

$$2)\quad \Sigma mxy = C_z;\quad \Sigma mxz = C_y.$$

Im Allgemeinen sind die Ergänzungskräfte von ω und ε abhängig, so dass auch die Widerstände der festen Achse sich mit ω und ε ändern. Geht aber die Drehachse durch den Schwerpunkt, so dass $y_0 = z_0 = 0$, und sind ausserdem die Centrifugalmomente C_y und C_z gleich Null, so werden ausser $X = 0$ auch $Y = Z = \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_z = 0$, und es bilden die Kräfte $[-mp]$ nur ein $\mathfrak{M}_x$. Aus den Gl. 1 verschwinden dann, abgesehen von $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon J_x$, sämmtliche von ω und ε abhängigen Glieder, so dass die Widerstände A und B der festen Achse sich ebenso berechnen lassen wie für den ruhenden Körper. Bilden unter dieser Voraussetzung die bewegenden Kräfte $[K]$ ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$, dessen Achsenstrecke (S. 109) die Richtung AX hat, so ist dies mit dem berechneten $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon J_x$ im Gleichgewichte. Weil die Normalwiderstände der Achse zu dem treibenden Momente nichts beitragen, die Kräfte $[-mp]$ sich aber in jeder anderen Beziehung aufheben, so müssen in diesem Falle die Widerstände A und B der festen Achse verschwinden. Die Achse bedarf dann gar keiner Befestigung, der Körper führt seine Drehung um die unbefestigte Achse so aus, als wäre sie fest. Eine solche Achse nennt man deshalb eine **freie Achse**. Da die sämmtlichen äusseren Kräfte $[K]$, A und B mit $[-mp]$ im Gleichgewichte sind, so kann man den Satz aussprechen:

Dreht sich ein Körper um eine **freie** Achse, so setzen sich sämmtliche äussere Kräfte an demselben lediglich zu einem Kräftepaare zusammen, dessen Achsenstrecke mit der Drehachse zusammenfällt, heben sich aber in jeder anderen Beziehung auf; die Normalwiderstände der Drehachse sind von der Geschwindigkeit und Beschleunigung unabhängig.

Ist die Drehung eine gleichförmige ($\varepsilon = 0$), so bestehen die Kräfte $[-mp]$ nur in den Centrifugalkräften, deren Zusammensetzung liefert

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} X &= 0 \\ Y &= M y_0 \omega^2 \\ Z &= M z_0 \omega^2 \\ \mathfrak{M}_x &= 0 \\ \mathfrak{M}_y &= -\omega^2 C_y \\ \mathfrak{M}_z &= \omega^2 C_z. \end{aligned}\right.$$

Hiermit müssen wieder die äusseren Kräfte im Gleichgewichte sein. Weil nun zur Zusammensetzung der Centrifugalkräfte die Summen C nöthig sind, so erhielten sie den Namen „Centrifugalmoment".

Ist einem Körper eine Drehbewegung um eine feste Achse ertheilt und setzt er diese ohne weitere Einwirkung von Kräften K fort, so müssen die Widerstände A und B mit den Kräften der Gl. 3 im Gleichgewichte sein. Diese Widerstände sind durch die Winkelgeschwindigkeit bedingt und verschwinden mit dieser. Ist aber die Drehachse eine freie Achse, so heben sich die Centrifugalkräfte vollständig auf, und es werden auch keine Achswiderstände nöthig; die Drehung setzt sich um die unbefestigte Achse fort, als wäre dieselbe festgehalten. Man kann daher sagen, eine freie Achse für einen Körper ist eine solche, in Bezug auf welche die Centrifugalkräfte sich aufheben.

Einige Bedingungen für eine freie Achse. Die Centrifugalmomente C_y und C_z werden gleich Null, wenn der Körper rechtwinklig zur Drehachse AX eine Symmetrie-Ebene hat; wählt man diese nämlich zur yz-Ebene (Fig. 360), so entspricht jedem Massentheilchen mit positivem x ein gleiches mit negativem x, so dass in Σmxy und Σmxz stets je zwei gleiche, sich aufhebende Glieder $+ mxy$ und $- mxy$ bezw. $+ mxz$ und $- mxz$ vorkommen. Geht ausserdem noch die Drehachse durch den Schwerpunkt, so ist AX eine freie Achse. Hiernach ist für einen gleichartigen Körper von der Form eines geraden Prismas oder Cylinders die Verbindungsgerade der Schwerpunkte der Endflächen (Fig. 361) eine freie Achse.

Fig. 360.

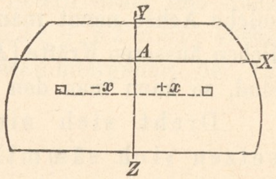
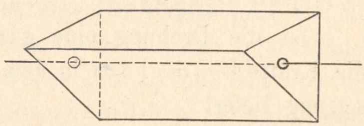


Fig. 361.

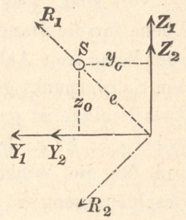


Ferner ist AX eine freie Achse, wenn man durch sie zwei rechtwinklig zu einander stehende Symmetrie-Ebenen legen kann. Wählt man diese nämlich zur xy-Ebene und xz-Ebene, so liegen je zwei Massentheilchen mit $+ y$ und mit $- y$ einander gegenüber, deren eines den Beitrag $+ mxy$, deren anderes den Beitrag $- mxy$ liefert, so dass $C_z = 0$ wird; ebenso $C_y = 0$.

Eingehendere Rechnungen zeigen, dass jeder noch so unregelmässige Körper mindestens drei zu einander rechtwinklige freie Achsen hat.

Andere Arten der Zusammensetzung der Ergänzungskräfte. Trennt man in Gl. 1 die durch den Anfangspunkt A gehenden Kräfte Y und Z in diejenigen Theile $Y_1 = My_0\omega^2$ und $Y_2 = Mz_0\varepsilon$ bezw. $Z_1 = Mz_0\omega^2$ und $Z_2 = -My_0\varepsilon$, welche allein von ω, bezw. von ε abhängen (Fig. 362), so lassen sich nunmehr Y_1 und Z_1 wieder zusammensetzen zu einer Mittelkraft

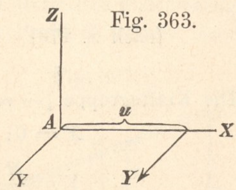
Fig. 362.



$$R_1 = M\omega^2\sqrt{y_0^2 + z_0^2} = M\omega^2 e,$$

wenn e die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse bedeutet. Diese Kraft ist parallel mit der Richtung jenes rechtwinkligen Abstandes e. Y_2 und Z_2 geben in gleicher Weise eine Mittelkraft $R_2 = M\varepsilon e$, die zu R_1 rechtwinklig ist und, dem Sinne nach, der Umfangsbeschleunigung des Schwerpunktes entgegengesetzt ist.

Fig. 363.

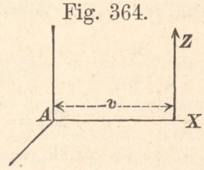


Vereinigt man die Kraft Y der Gl. 1 mit der Kräftepaarachse $\mathfrak{M}_z$, so ergiebt sich aus beiden eine Kraft von derselben Grösse $Y = My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon$, welche von A aus um

$$5)\qquad u = \frac{\mathfrak{M}_z}{Y} = \frac{\omega^2 C_z + \varepsilon C_y}{My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon}$$

im Sinne der positiven x-Richtung parallel verschoben ist (Fig. 363).

Fig. 364.



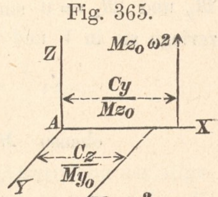
Vereinigt man ebenso Z mit $\mathfrak{M}_y$, so erhält man eine gleiche Kraft

$$6)\qquad Z = Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon, \quad \text{welche um}$$

$$7)\qquad v = \frac{-\mathfrak{M}_y}{Z} = \frac{\omega^2 C_y - \varepsilon C_z}{Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon}$$

im Sinne der positiven x-Richtung parallel verschoben ist (Fig. 364). Auf diese beiden im Raume sich rechtwinklig kreuzenden Kräfte ist mithin die Gruppe $[-mp]$ auch zurückzuführen.

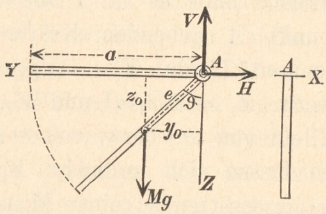
Fig. 365.



Im Falle der gleichförmigen Drehung ($\varepsilon = 0$) vereinfachen sich diese Ergebnisse in der Weise der Fig. 365.

Beispiel 1: Eine als materielle Gerade aufzufassende Stange von der Länge a schwinge unter Einwirkung der Schwere um eine durch den Endpunkt gelegte wagerechte Achse (Fig. 366). Die Bewegung möge von der wagerechten Lage ausgegangen sein. Hier liegt ein Fall vor, wo C_y und C_z Null sind, weil AYZ eine Symmetrie-Ebene für die Stange ist. Die Drehachse ist aber keine freie Achse, weil sie nicht durch den Schwerpunkt geht. In einer beliebigen Zwischenlage ist $y_0 = e \sin\vartheta$; $z_0 = e\cos\vartheta$, wobei $e = {}^1/_2\, a$; ferner ist $J_x = {}^1/_3\, M a^2$; und für die Winkelgeschwindigkeit ω und Beschleunigung ε in der beliebigen Zwischenlage gelten:

Fig. 366.



(nach S. 267) $${}^1/_2\, J_x \omega^2 = M g z_0,$$

$$\omega^2 = \frac{2 M g z_0}{J_x} = \frac{3 g \cos\vartheta}{a};$$

(nach S. 276) $$\varepsilon = \frac{M g e \sin\vartheta}{J_x} = \frac{3}{2}\,\frac{g \sin\vartheta}{a}.$$

Die Kräftegruppe $[-mp]$ liefert hiernach (Gl. 1, S. 288)

$$X = 0;$$

$$Y = \frac{Ma}{2}\sin\vartheta\,\frac{3 g\cos\vartheta}{a} + \frac{Ma}{2}\cos\vartheta\,\frac{3}{2}\,\frac{g\sin\vartheta}{a}$$

$$= \frac{9}{4} Mg \sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{9}{8} Mg \sin 2\vartheta;$$

$$Z = \frac{Ma}{2}\cos\vartheta\,\frac{3 g\cos\vartheta}{a} - \frac{Ma}{2}\sin\vartheta\,\frac{3}{2}\,\frac{g\sin\vartheta}{a}$$

$$= \frac{Mg}{2}\left(3 - 3\sin^2\vartheta - \frac{3}{2}\sin^2\vartheta\right) = \frac{Mg}{8}\left(3 + 9\cos 2\vartheta\right);$$

$$\mathfrak{M}_x = {}^1/_2\, M g a \sin\vartheta;$$

$$\mathfrak{M}_y = 0; \quad \mathfrak{M}_z = 0.$$

Mit diesen Kräften müssen die Schwerkraft Mg und die Widerstände der Drehachse im Gleichgewichte sein. Letztere brauchen in diesem Falle, weil $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z = 0$ sind, nur in dem Punkte A der Achse anzugreifen; man zerlege sie in V und H. Dann muss

$$H = Y = \frac{9}{8} Mg \sin 2\vartheta \text{ sein}$$

ebenso $$Mg - V = -Z = -{}^1/_8\, Mg\,(3 + 9\cos 2\vartheta),$$

d. h. $$V = {}^1/_8\, Mg\,(11 + 9\cos 2\vartheta).$$

Der wagerechte Achsenwiderstand H ist für $\vartheta = 90^0$, d. h. in der Anfangslage gleich Null, ebenso in der tiefsten Lage für $\vartheta = 0$; am grössten wird er für $\vartheta = 45^0$, nämlich $H_{max} = {}^9/_8\, Mg$.

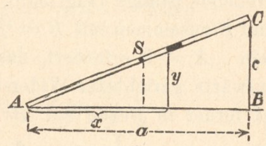
Der lothrechte Widerstand ist

$$\text{für } \vartheta = 90^0: \quad V = {}^1/_4\, Mg,$$
$$\text{für } \vartheta = 45^0: \quad V = {}^{11}/_8\, Mg,$$
$$\text{für } \vartheta = 0: \quad V_{max} = {}^5/_2\, Mg.$$

Diese Grösstwerthe von H und V sind im Verhältnisse zum Gewicht Mg des Stabes erheblich. Die Kraft H wirkt abwechselnd bald nach links, bald nach rechts, je nach der Lage des schwingenden Körpers. — Von besonderer Wichtigkeit sind diese Kräfte, wenn der schwingende Körper eine schwere Glocke ist. Die Achswiderstände H und V müssen dann von dem sog. Glockenstuhle ausgeübt werden. Der fortwährende Wechsel des Sinnes der Kraft H ist für den Thurm besonders gefährlich. Der Rechnungsgang ist im Wesentlichen derselbe wie in dem vorliegenden Falle. — Wurde die Stange in der Anfangslage ($\vartheta = 90^0$) am linksseitigen Ende etwa unterstützt, so war im Ruhezustande $V = {}^1/_2\, Mg$; durch plötzliches Loslassen des Endes verändert sich V auf ${}^1/_4\, Mg$. — Weitere Beispiele sollen sich auf gleichförmige Drehung beziehen.

Beispiel 2: Eine materielle Gerade AC (Fig. 367) drehe sich gleichförmig um eine Achse AB; der Punkt A sei unmittelbar, der Punkt C mittels einer gewichtlosen Stange c mit der Achse verbunden. Die Projektionen der Stange seien a und c. Da der Körper ein ebenes Gebilde, so lege man ACB in die xy-Ebene, dann ist $y_0 = {}^1/_2\, c$; $z_0 = 0$; ferner wird $\Sigma mxz = C_y = 0$, weil sämmtliche z-Werthe Null sind. Die Zusammensetzung der sämmtlichen Centrifugalkräfte beschränkt sich daher nach Fig. 365 auf eine Einzelkraft $Y = My_0\,\omega^2 = {}^1/_2\, Mc\omega^2$, im Abstande $u = \dfrac{C_z}{My_0}$ rechts von A liegend.

Fig. 367.



Ein Massentheilchen von der Länge ds hat die Masse $m = \dfrac{\gamma}{g} F ds$, wenn F der Querschnitt des Stabes, γ die Dichte. Man kann aber bei der Berechnung von u die selbstverständlichen Faktoren $F\gamma : g$ fortlassen, wenn man $m = ds$ und ebenso $M = s =$ der Länge der Stange setzt. Das Theilchen liefert zu C_z den Beitrag $ds\,x\,y$, was wegen $y = xc : a$ und $ds = dx \cdot s : a$ geschrieben werden kann:

$$m\,x\,y = \frac{s\,c}{a^2}\, x^2\, d\,x.$$

$$\text{Daraus folgt } C_z = \Sigma mxy = \frac{sc}{a^2}\int_0^a x^2 d\,x = \frac{1}{3}\, sca.$$

Weil nun nach Obigem $My_0 = {}^1/_2\, cs$, so wird $u = {}^2/_3\, a$.

Derartig einfache Fälle kann man auch leicht ohne Anwendung der allgemeinen Formeln unmittelbar behandeln. Dem Theilchen ds entspricht die Centrifugalkraft $ds\,y\,\omega^2$. Die Mittelkraft R der Centrifugalkräfte ist die Summe der gleichgerichteten Kräfte $[ds\,y\,\omega^2]$, mithin

$$R = \omega^2 \int ds\,y = \omega^2 s\,y_0 = \omega^2 s\, {}^1/_2\, c \cdot = {}^1/_2\, M\omega^2 c.$$

Nach dem Satze der Momente wird dann in Bezug auf A:

$$R\,u = \omega^2 \int ds\,x\,y = \omega^2 s \frac{c}{a^2} \int_0^a x^2\,d\,x\,,$$

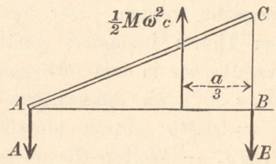
d. h. $\frac{1}{2} s\,c\,\omega^2 u = \frac{1}{3}\omega^2 s\,c\,a$, wonach $u = \frac{2}{3}a$.

Dass die Kraft $\frac{1}{2}M\omega^2 c$ durch den Schwerpunkt des Dreiecks ABC (Fig. 368) geht, folgt auch daraus, dass man die Theilkraft $ds\,y\,\omega^2$ schreiben kann

$$= \omega^2 \frac{s}{a}\,y\,d\,x\,,$$

d. h. proportional dem Flächenstreifen $y\,d\,x$ des Dreiecks.

Fig. 368.

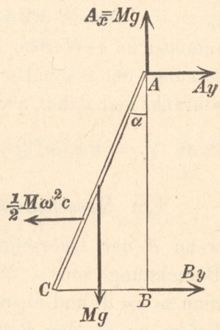


Wirken nnn auf die Stange keine bewegenden Kräfte $[K]$, so müssen die etwa in A und B angreifenden Achsenwiderstände mit R im Gleichgewichte sein. Daher wird

$$A = \tfrac{1}{3}R = \tfrac{1}{6}M\,\omega^2 c\,; \quad B = \tfrac{2}{3}R = \tfrac{1}{3}M\,\omega^2 c\,.$$

Steht die Drehachse AB lothrecht und wirkt die Schwere auf die sich drehende Stange (Fig. 369), so müssen die Schwere Mg und die Widerstände A und B zusammen mit $R = \frac{1}{2}M\omega^2 c$ im Gleichgewichte sein. $X = 0$ erfordert, dass etwa in A ein lothrecht aufwärts gerichteter Widerstand $A_x = Mg$ wirke. Es ist ferner in Bezug auf B:

Fig. 369.



$$0 = -\frac{1}{2}M\,\omega^2 c\,\frac{a}{3} + A_y\,a - M\,g\,\frac{c}{2}\,,$$

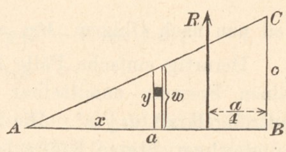
$$\text{d. h.}\quad A_y = M\,g\,\frac{c}{2\,a} + \frac{M\,c\,\omega^2}{6} = \frac{M\,g\,c}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{\omega^2}{3\,g}\right)$$

$$\text{und ebenso}\quad B_y = \frac{M\,g\,c}{2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{3}\,\frac{\omega^2}{g}\right).$$

Es wird der Widerstand $B_y = 0$ für $\omega^2 = \frac{3}{2}\,\frac{g}{a}$; unter dieser Bedingung bewegt sich die Stange als ein physisches Kegelpendel; d. h. nicht durch einen Stab BC, sondern nur in Folge der Drehung wird der Winkel α unverändert erhalten. Für das mathematische Kegelpendel (S. 69) war $\omega^2 = \frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{c} = \frac{g\,c}{a\,c} = \frac{g}{a}$.

Beispiel 3: Der sich gleichförmig um die Achse AB drehende Körper sei eine materielle Dreieckfläche ABC (Fig. 370). Dann ist, wenn man die Masse der Flächeneinheit $= 1$ setzt, $M = \frac{1}{2}a\,c$, $y_0 = \frac{1}{3}c$, mithin die gesammte Centrifugalkraft $R = \frac{1}{3}Mc\omega^2$ im Abstande u von A. Um $C_z = \Sigma m\,x\,y$ zu bestimmen, bedenke man, dass $C_z = \int dx\,dy\,x\,y$. Alle

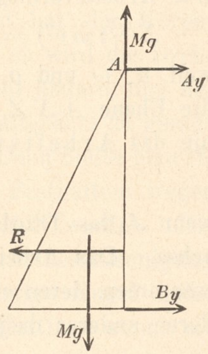
Fig. 370.



Theilchen eines lothrechten Flächenstreifens haben übereinstimmendes x und dx, liefern daher zu C_z den Beitrag $x\,dx \int_0^w y\,dy, = x\,dx\ {}^1\!/_2\, w^2$, wenn w die Höhe des Streifens; darin ist $w = cx : a$, also wird

$$C_z = \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{a^2}\int_0^a x^3\,dx = \frac{1}{8}\,c^2 a^2 = \frac{1}{4}\,Mac.$$

Fig. 371.



Mithin nach Fig. 365 $u = \frac{C_z}{My_0} = \frac{{}^1\!/_4\,Mac}{{}^1\!/_3\,Mc} = {}^3\!/_4\,a$.

Die entsprechenden Achsenwiderstände werden dann

$$A = {}^1\!/_4\,R = {}^1\!/_{12}\,Mc\omega^2 \text{ und}$$
$$B = {}^3\!/_4\,R = {}^1\!/_4\,Mcw^2.$$

Stellen wir wiederum die Drehachse lothrecht (Fig. 371) und lassen die Schwere wirken, so sind in A und B die wagerechten Widerstände A_y und B_y nöthig, für welche gilt:

$${}^1\!/_4\,aR = A_y\,a - Mg\,{}^1\!/_3\,c,$$

mithin $A_y = {}^1\!/_4\,R + {}^1\!/_3\,Mg\,\frac{c}{a}$ und ebenso $B_y = {}^3\!/_4\,R - {}^1\!/_3\,Mg\,\frac{c}{a}$.

Wiederum wird die Befestigung bei B unnöthig, wenn

$${}^3\!/_4\,R = {}^1\!/_4\,Mc\omega^2 = {}^1\!/_3\,Mg\frac{c}{a}, \text{ d. h. für } \omega^2 = \frac{4}{3}\,\frac{g}{a}.$$

7. Gleichzeitige Verschiebung und Drehung eines Körpers.

a) Arbeitsvermögen.

Ein Körper drehe sich um eine Schwerpunktsachse, die zur x-Achse gewählt werden möge, mit der Winkelgeschwindigkeit ω; zugleich werde die Achse mit einer der xz-Ebene parallelen Geschwindigkeit u parallel verschoben, und zwar möge u mit der x-Richtung den Winkel α bilden (Fig. 372). Dann setzt sich die gesammte Geschwindigkeit v eines Punktes der Koordinaten x, y, z im Abstande ϱ von der Achse aus den Einzelgeschwindigkeiten u und $\varrho\omega$ zusammen.

Fig. 372.

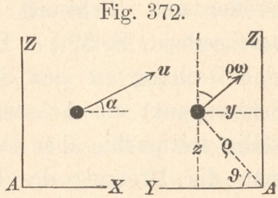


Fig. 372 stellt das Achsenkreuz in zwei Projektionen dar. Bildet ϱ mit der AY den Winkel ϑ, so ist $\varrho\cos\vartheta = y$, $\varrho\sin\vartheta = z$; somit zerlegt sich $\varrho\omega$ in $-z\omega$ und $y\omega$. Die Seitengeschwindigkeiten eines Punktes nach den Achsenrichtungen werden dann

$$v_x = u\cos\alpha;\quad v_y = -z\omega;\quad v_z = y\omega + u\sin\alpha.$$