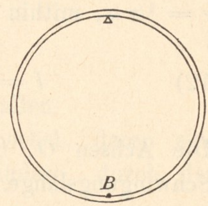
Körper ein mögliches Pendel bildet, so kann man leicht das Gesammt-Trägheitsmoment und daraus das Trägheitsmoment des gegebenen Körpers berechnen.

Fig. 354.



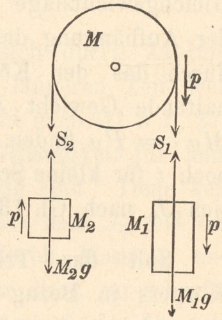
Ein dünner Ring vom Halbmesser r, nach Fig. 354 um eine Schneide schwingend, hat, wegen $J_S = M r^2$, nach Gleichung 7 die Schwingungslänge

$$l = 2 r.$$

5. Beschleunigte Bewegung einer Seilrolle.

Um eine Seilrolle von der Masse M (Fig. 355) sei ein völlig biegsamer Faden geschlungen, an dessen Enden ungleiche Massen M_1 und M_2 hängen. Es soll die Umfangsbeschleunigung p der Rolle berechnet werden ohne Rücksicht auf Zapfenreibung und Seilbiegungswiderstand und unter der Annahme, dass ein Gleiten des Fadens auf der Rolle nicht stattfindet. Die Masse M_1 erfährt die Beschleunigung p abwärts, die Masse M_2 dieselbe Beschleunigung aufwärts. Die Spannkräfte der Seilstücke sind nicht etwa $M_1 g$ und $M_2 g$, denn diese Gleichheit findet nach S. 86 nur statt, wenn die Massen keine Beschleunigung erfahren. An der Masse M_1 muss die Mittelkraft $M_1 g - S_1 = M_1 p$, mithin

Fig. 355.



1) $S_1 = M_1 g - M_1 p$, u. zw. $< M_1 g$

sein, weil $M_1 g$ und S_1 zusammen die Beschleunigung p erzeugen Ebenso muss an der Masse M_2 die aufwärts gerichtete Beschleunigung p durch die aufwärts gerichtete Kraftsumme $S_2 - M_2 g$ hervorgebracht werden; $S_2 - M_2 g = M_2 p$, mithin

2) $$S_2 = M_2 g + M_2 p, \text{ u. zw. } > M_2 g.$$

Kann der Faden als gewichtlos betrachtet werden, so wird die gesammte Seilreibung, welche die Rolle zu beschleunigter Drehbewegung veranlasst, gemessen durch den Unterschied der Spannkräfte S_1 und S_2, daher wird nach Gl. 4, S. 277, $\mu p = S_1 - S_2$, wenn μ die auf den Umfang bezogene Masse der Rolle ist.

Also $\mu p = M_1 g - M_1 p - M_2 g - M_2 p$,

$$p(M_1 + M_2 + \mu) = M_1 g - M_2 g, \quad \text{oder}$$

3) $$p = \frac{M_1 g - M_2 g}{M_1 + M_2 + \mu} = g \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + \mu}.$$

In dieser Gleichung erscheint also der Gewichtsunterschied $M_1 g - M_2 g$ als treibende Kraft, als träge Masse aber die Summe aller Massen, die an der Beschleunigung p theilnehmen, d. h. M_1, M_2 und die auf den Umfang bezogene Masse μ.

Eine Vorrichtung nach Fig. 355 ist die Atwood'sche Fallmaschine; sie dient, da p mit g verhältnisgleich ist, zur Vorführung der Gesetze der Fallbewegung in verkleinertem Mafsstabe, weil die wirkliche Fallbewegung unbequem schnell erfolgt.

Beispiel 1: Ist $Mg = 1$ kg und (nach S. 270) das auf den Umfang bezogene Gewicht der Rolle $\mu g = 1/2$ kg, $M_1 g = 4$, $M_2 g = 3{,}9$ kg, so wird, wenn man in Zähler und Nenner statt der Massen die g mal grösseren Gewichte einführt,

$$p = g \frac{4 - 3{,}9}{4 + 3{,}9 + 0{,}5} = g \cdot \frac{0{,}1}{8{,}4} = \frac{g}{84},$$

die Bewegung der angehängten Massen erfolgt daher nur mit $1/84$ der wahren Fallbeschleunigung.

Will man auch die Zapfenreibung mit der Reibungsziffer f und dem Zapfendurchmesser d berücksichtigen, so wird

der Zapfendruck $D = S_1 + S_2 + Mg$; es ist, wie vorher,

$$S_1 = M_1 g - M_1 p$$
$$S_2 = M_2 g + M_2 p \quad \text{und daher}$$
$$D = (M + M_1 + M_2)\, g - (M_1 - M_2)\, p$$

mit dem Momente $1/2\, D f d$. Sonach wird, wenn r der Rollenhalbmesser,

$$\mu p = S_1 - S_2 - D f \frac{d}{2r}$$

$$= M_1 g - M_1 p - M_2 g - M_2 p - (M + M_1 + M_2)\, g f \frac{d}{2r} + (M_1 - M_2)\, p f \frac{d}{2r}$$

und daraus

4) $$p = g \frac{M_1 - M_2 - (M + M_1 + M_2) f \dfrac{d}{2r}}{M_1 + M_2 + \mu - (M_1 - M_2) f \dfrac{d}{2r}}.$$

Mit $d : r = 1 : 25$, $f = 0{,}08$, $M_1 g = 4$, $M_2 g = 3{,}9$, $Mg = 1$, $\mu g = 0{,}5$ kg wird

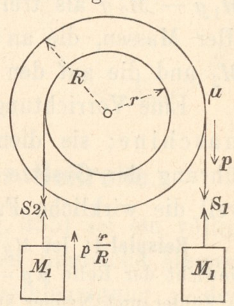
$$p = g \frac{0{,}1 - 0{,}014}{8{,}4 - 0{,}00016} \quad \text{oder rund} \quad \frac{g}{100}.$$

Hiernach wird $S_1 = 4\,(1 - 0{,}01) = 3{,}96$ kg, $S_2 = 3{,}9\,(1 + 0{,}01) = 3{,}94$ kg. Damit kein Gleiten des Fadens entstehe, muss nach S. 233 $\frac{S_1}{S_2} \leqq e^{f_1 \alpha}$ sein, worin f_1 die Reibungsziffer des Fadens, $\alpha = \pi$. Dieser Bedingung wird schon für $f_1 \geqq 0{,}0017$ genügt. Der Seilbiegungswiderstand ist hierbei vernachlässigt, da der Faden sehr dünn.

Beispiel 2: Gleiche Massen M_1 mögen an 2 mit einander verbundenen Rollen von ungleichen Halbmessern R und r hängen (Fig. 356); es soll die Umfangsbeschleunigung p der grösseren Rolle berechnet werden; die der kleinen ist dann $pr : R$. — Die Fadenkräfte sind $S_1 = M_1 g - M_1 p$; $S_2 = M_1 g + M_1 pr : R$; die Winkelbeschleunigung der Rolle ohne Rücksicht auf Reibung (nach S. 276)

$$\varepsilon = \frac{S_1 R - S_2 r}{\mu R^2} = \frac{M_1 g R - M_1 p R - M_1 g r - M_1 p \frac{r^2}{R}}{\mu R^2},$$

Fig. 356.



mithin, weil $R\varepsilon = p$,

$$\mu p = M_1 g - M_1 p - M_1 g \frac{r}{R} - M_1 p \frac{r^2}{R^2},$$

folglich

5) $$p = g \frac{M_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{M_1 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) + \mu}.$$

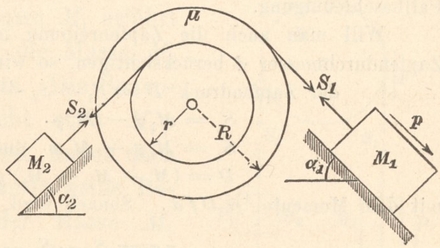
Für $R = 2r$ wird dann $p = g \frac{1/2\, M_1}{5/4\, M_1 + \mu}$, wobei zu beachten, dass μ auf den Abstand R bezogen ist.

Beispiel 3: Hängen die Massen M_1 und M_2 nicht frei herab, sondern gleiten sie mit Reibung auf schiefen Ebenen mit den Neigungswinkeln α_1 u. α_2 (Fig. 357), während an dem Rollenkörper keine Bewegungswiderstände auftreten, so entsteht an der Masse M_1 eine treibende Kraft

$$M_1 g \sin \alpha_1$$

und eine hindernde Reibung, daher ist

Fig. 357.



$$S_1 = M_1 g \sin \alpha_1 - f M_1 g \cos \alpha_1 - M_1 p;$$

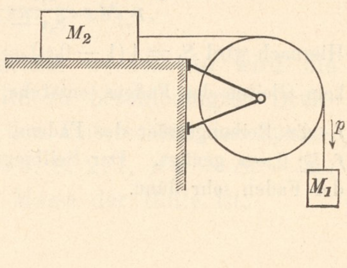
ebenso ist $$S_2 = M_2 g \sin \alpha_2 + f M_2 g \cos \alpha_2 + M_2 p \frac{r}{R};$$

wie in Beispiel 2 wird nun $\mu R p = S_1 R - S_2 r$ und demnach

6) $$p = g \frac{M_1 (\sin \alpha_1 - f \cos \alpha_1) - M_2 (\sin \alpha_2 + f \cos \alpha_2) \frac{r}{R}}{M_1 + M_2 \frac{r^2}{R^2} + \mu}.$$

Für $r = R$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^0$ entsteht Gl. 3; für $M_2 = M_1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^0$ entsteht Gl. 5.

Fig. 358.



Für $\alpha_1 = 90^0$, $\alpha_2 = 0$, $r = R$ (Fig. 358) ergiebt sich

7) $$p = g \frac{M_1 - f M_2}{M_1 + M_2 + \mu}.$$