bringt man nun das Kraftmoment $\mathfrak{M}$ auf den Hebelarm r, setzt $\mathfrak{M} = Kr$ und schreibt $J = \mu r^2$, so wird aus Gl. 2 und 3

$$p_t = r\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}r}{J} = \frac{Kr^2}{\mu r^2} \text{ oder}$$

4) $$p_t = \frac{K}{\mu},$$

d. h. wenn man Alles auf den gleichen Abstand oder Drehungshalbmesser r bezieht, hat man wie bei einer Verschiebung:

$$\text{Umfangsbeschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}.$$

Auch Gl. 4 (S. 267) für das Arbeitsvermögen kann man entsprechend umformen. Setzt man am Ende des Armes r die Anfangsgeschwindigkeit $c = r\omega_1$, die Endgeschwindigkeit $v = r\omega$, $J = \mu r^2$, so wird aus $\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_1^2) J = \mathfrak{A}_k$:

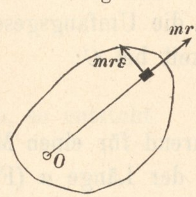
$$\frac{1}{2}(v^2 - c^2)\mu = \mathfrak{A}_k \text{ oder}$$

5) $$\frac{\mu v^2}{2} - \frac{\mu c^2}{2} = \mathfrak{A}_k,$$

wie (S. 266) für die Verschiebung eines Körpers.

Man kann Gl. 2, $\mathfrak{M} = \varepsilon J$ auch mittels des Satzes von d'Alembert (S. 139) ableiten. Ist in einem Augenblicke ω die Winkelgeschwindigkeit, ε die Winkelbeschleunigung, so führt ein Punkt des Körpers im Abstande r von der Achse (Fig. 343) eine ungleichförmige Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit $v = r\omega$ und der Tangentialbeschleunigung $p_t = r\varepsilon$ aus; die Centripetalbeschleunigung ist $p_n = v^2 : r = r\omega^2$. Diesen entsprechen die Ergänzungskräfte $mr\varepsilon$ bezw. $mr\omega^2$. Deren Momentensumme in Bezug auf O ist $-\varepsilon \Sigma mr^2 = -\varepsilon J$.

Fig. 343.



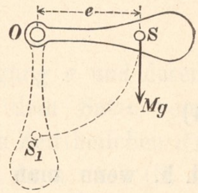
Den gleichen, aber entgegengesetzten Werth muss auch die Momentensumme $\mathfrak{M}$ der äusseren Kräfte haben, d. h.

6) $$\mathfrak{M} = \varepsilon J.$$

4. Physisches Pendel.

Ein Körper, der um eine nicht durch den Schwerpunkt gehende wagerechte Achse drehbar ist und unter alleiniger Wirkung der Schwere steht, bildet, wenn er in der sicheren Gleichgewichtslage nicht die Geschwindigkeit Null hat, ein Pendel, welches, zum Unterschiede von dem aus einem einzelnen Massenpunkte m mit gewichtlosem Faden bestehenden, S. 76 behandelten, mathematischen Pendel, **physisches Pendel** genannt wird.

Fig. 344.



Der beliebig gestaltete Körper sei zunächst so festgehalten, dass der Schwerpunkt S (Fig. 344) in gleicher Höhe mit der Achse O liegt, und werde nun losgelassen. Es soll die Winkelgeschwindigkeit ω berechnet werden, mit der der Drehungshalbmesser $OS = e$ des Schwerpunktes durch die Lothrechte hindurchschwingt.

Wendet man auf die Bewegung SS_1 den Satz der Arbeit an, so ergiebt sich (nach S. 267) $\frac{1}{2}\omega^2 J - 0 = Mge$, mithin

$$1)\qquad \omega = \sqrt{2ge\frac{M}{J}} = \sqrt{2g\frac{e}{i^2}} \text{ mit } J = Mi^2 \text{ (S. 268).}$$

Ist der Körper ein Stab, eine materielle Gerade von der Länge a (Fig. 345), so ist

$$e = \tfrac{1}{2}a,\quad J = \tfrac{1}{3}Ma^2,$$

mithin

$$2)\qquad \omega = \sqrt{\frac{ga\,3}{a^2}} = \sqrt{\frac{3g}{a}}$$

und die Umfangsgeschwindigkeit bei C:

Fig. 345.

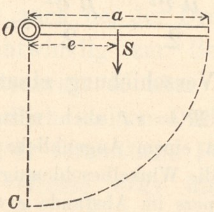
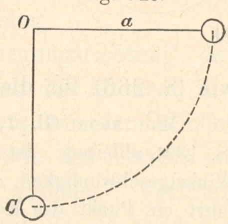


Fig. 346.



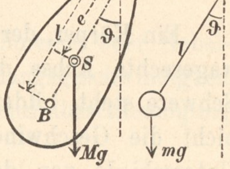
$$3)\qquad v = a\omega = \sqrt{3ga},$$

während für einen Massenpunkt am Ende einer gewichtlosen Stange von der Länge a (Fig. 346)

$$4)\qquad v = \sqrt{2ga} \text{ sein würde.}$$

Schwingungsdauer des physischen Pendels. In einer beliebigen Zwischenlage (Fig. 347), in der OS mit der Lothrechten den Winkel ϑ bildet, ist das Moment

Fig. 347.



$$\mathfrak{M} = Mge\sin\vartheta,$$

daher die Winkelbeschleunigung

$$\varepsilon = \frac{Mge\sin\vartheta}{J_0}.$$

Für ein mathematisches Pendel aber von einer Pendellänge l ist bei demselben Abweichungswinkel ϑ, weil $J = m\,l^2$,

$$\varepsilon_1 = \frac{m\,g\,l \sin\vartheta}{m\,l^2} = \frac{g \sin\vartheta}{l}.$$

Beide Beschleunigungen ε und ε_1 sind verhältnisgleich mit $\sin\vartheta$ und stimmen völlig überein, wenn

$$\frac{M g\,e}{J_0} = \frac{g}{l}, \text{ d. h. wenn}$$

5) $$l = \frac{J_0}{M e} \text{ ist.}$$

Wählt man die Länge des mathematischen Pendels nach Gl. 5 und giebt beiden Pendeln einen gleichen Anfangswerth von ϑ, bei dem die Geschwindigkeit Null war, lässt also beide Pendel von derselben Anfangsneigung aus sich in Bewegung setzen, so wird die Beschleunigung beider Pendel für jeden Winkel ϑ die gleiche sein, daher werden beide Pendel sich übereinstimmend bewegen, mithin auch gleiche Schwingungsdauer haben müssen.

Bei kleinen Schwingungen ist nun für das mathematische Pendel die Dauer einer einfachen Schwingung nach S. 78

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Setzt man hierin den Werth l nach Gl. 5 ein, so entsteht

6) $$t = \pi \sqrt{\frac{J_0}{M g e}}$$

als Dauer einer einfachen kleinen Schwingung des physischen Pendels.

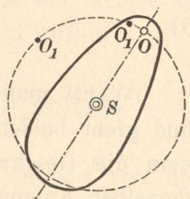
Man nennt die Länge l die Schwingungslänge des physischen Pendels. Trägt man diese Länge von O aus auf der Geraden OS ab, so erhält man mit $OB = l$ einen Punkt B, den man den Schwingungspunkt des physischen Pendels nennt (Fig. 347). Die Achse durch B rechtwinklig zur Bildebene heisst Schwingungsachse. Der Punkt B und jeder Punkt der Achse B in dem physischen Pendel schwingt gerade so, als wäre er ein einzelner, mittels eines gewichtlosen Fadens mit O verbundener Massenpunkt.

Denkt man sich durch S eine zu der Drehachse O parallele Achse gelegt und nennt das entsprechende Trägheitsmoment des Körpers J_S, so ist $J_0 = J_S + Me^2$, mithin

$$7) \qquad l = \frac{J_S}{Me} + e.$$

Zeichnet man um S als Mittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser $SO = e$ (Fig. 348) und denkt sich den Körper an einer beliebigen, zur ursprünglichen Achse O parallelen, durch irgend einen Punkt des Kreises gelegten Achse O_1 aufgehängt, so ergiebt sich für diese neue Aufhängung die Schwingungslänge nach Gl. 7 von derselben Grösse wie bei der Aufhängung in O. Alle Seiten eines geraden Cylinders, der den genannten Kreis zum Grundkreise hat, sind hiernach Achsen gleicher Schwingungslänge und Schwingungsdauer für den Körper.

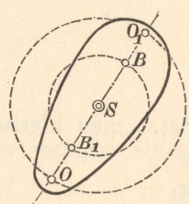
Fig. 348.



Hängt man den Körper aber an der Schwingungsachse B auf (Fig. 349), so hat man ein physisches Pendel von der Schwingungslänge l_1, wofür sich nach Gl. 7 ergiebt, indem man e mit $l - e$ vertauscht:

$$l_1 = \frac{J_S}{M(l-e)} + (l-e).$$

Fig. 349.



Weil aber nach Gl. 7 $J_S = Me(l-e)$, so erhält man

$$8) \qquad l_1 = \frac{Me(l-e)}{M(l-e)} + l - e = l,$$

d. h. das an der Achse B aufgehängte Pendel hat die gleiche Schwingungslänge wie das um die Achse O schwingende. Trägt man $l_1 = l$ von B aus auf BS auf, so erhält man O als Schwingungspunkt und die Achse O (rechtwinktig zur Bildebene) als Schwingungsachse für die Drehachse B. Die Parallelachsen O und B liefern gleiche Schwingungslänge und gleiche Schwingungsdauer, oder sind mit einander vertauschbar. Das Pendel ist bezüglich der Achsen O und B umkehrbar. Ein Kreis um S mit dem Halbmesser SB hat dieselbe Bedeutung wie der Kreis mit dem Halbmesser SO (Fig. 348).

Sämmtliche Achsen, rechtwinklig zur Bildebene, welche durch irgend einen Punkt einer der beiden Kreislinien gelegt werden, sind für den Körper Drehachsen mit übereinstimmender Schwingungslänge l.

Nach Gl. 7 ist die Schwingungslänge l von e abhängig. Fasst man nämlich bei der Vergleichung nur Achsen ins Auge, die zur Bildebene rechtwinklig, d. h. mit der ursprünglichen Drehachse O parallel sind, so ist $J_S : M$ ein konstanter Werth $= i^2$ (wo i der der Achse S entsprechende Trägheitshalbmesser ist). Wird nun e grösser und grösser, verschiebt sich also die Drehachse immer weiter vom Schwerpunkte, so nähert sich der erste Summand der rechten Seite von Gl. 7 mehr und mehr der Null, während der zweite fortwährend zunimmt; daher wird für $e = \infty$ auch $l = \infty$ und $t = \infty$. Geht aber umgekehrt e gegen Null, so wird ebenfalls $l = \infty$ und $t = \infty$, d. h. wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt geht, so ergiebt sich, wie auch schon von S. 148 bekannt, kein Drehmoment, so dass auch keine Schwingung zu Stande kommen kann. Es muss daher einen Werth von e geben, für den l ein Minimum wird.

Schreibt man zur bequemeren Übersicht $l = y$, $e = x$, und untersucht

9) $$y = \frac{i^2}{x} + x$$

auf Minimum, so ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{i^2}{x^2} + 1 = 0$ zu setzen. Dies verlangt $x = \pm i$. Eine besondere Untersuchung, ob hierbei ein Maximum oder Minimum vorliege ist nicht erforderlich; denn den für $x = 0$ und $x = \infty$ eintretenden Grösstwerth $y = \infty$ kennen wir bereits.

10) $$x = \pm i$$

oder in der früheren Schreibweise $e = \pm i$, worin es wegen der Bedeutung der beiden Kreise in Fig. 349 nur auf den absoluten Werth $e = i$ ankommt, ergiebt die Schwingungslänge

$$l = \frac{i^2}{i} + i = 2i, \quad \text{also} \quad l - e = 2i - i = i.$$

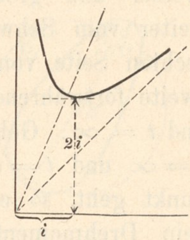
Für eine Drehachse O, welche von S um $i = \sqrt{\frac{J_S}{M}}$ entfernt ist, wird also die Schwingungslänge

11) $$l_{min} = 2\,i = 2\,e,$$

womit die beiden Kreise in Fig. 349 zusammenfallen.

Die Darstellung der Gl. 9 ist eine Hyperbel, deren eine Asymptote die Ordinatenachse, während die andere, durch den Anfangspunkt gehend, den rechten Winkel der Koordinatenachsen halbirt. $x = i$ und $y_{min} = 2\,i$ sind in der Figur angegeben.

Fig. 350.

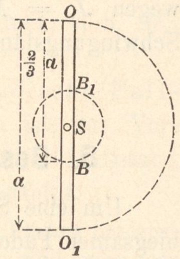


Bekanntlich werden Pendelversuche benutzt zur Ermittelung der scheinbaren Fallbeschleunigung g an verschiedenen Stellen der Erde; aus $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ wird $g = l\,\pi^2 : t^2$. Hieraus kann man g berechnen, wenn man für ein Pendel die Schwingungslänge l und die Dauer t einer einfachen Schwingung kennt. Letztere lässt sich durch Zählung der Anzahl der Schwingungen während einer längeren Zeit feststellen. Die Schwingungslänge könnte man wohl nach Gl. 5 S. 279 berechnen, jedoch nicht mit der erforderlichen Genauigkeit für feine Messungen, wie sie zur Ermittelung von g nöthig sind. Denn kein Körper lässt sich so gleichmässig herstellen, dass man J_0 und das statische Moment Me mit grosser Schärfe durch Messung und Rechnung zu bestimmen vermöchte. Wohl aber dient zur scharfen Bestimmung der Schwingungslänge l die Eigenschaft des Pendels, dass Drehachse und Schwingungsachse mit einander vertauschbar sind. Man stellt also ein Pendel her mit fester Schneide (Drehachse) O, berechnet annähernd l, bringt in diesem Abstande $l = OB$ eine Gegenschneide B an und verstellt an dem Körper verschiebbare Gewichte so lange, bis das Pendel, ob in O oder in B aufgehängt, gleiche Schwingungsdauer zeigt. Dann ist, wenn B und O nicht in derselben Entfernung vom Schwerpunkte liegen, wenn also B nicht den Punkt O_1 in Fig. 349 bedeutet, $OB = l$ die Schwingungslänge, die zwischen den Schneiden mit grosser Schärfe gemessen werden kann. Ein solches Pendel heisst ein U m k e h r u n g s p e n d e l (Reversionspendel).

Ist der Körper ein dünner prismatischer Stab von der Länge a (Fig. 351) und an seinem oberen Ende aufgehängt, so ist $J_0 = {}^1\!/_3\, M a^2$, $e = {}^1\!/_2\, a$, mithin die Schwingungslänge (Gl. 5)

$$12)\qquad l = \frac{2}{3}\,\frac{Ma^2}{Ma} = \frac{2}{3}\,a.$$

Fig. 351.



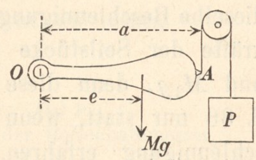
Die Achsen O, O_1, B und B_1 liefern gleiche Schwingungslänge.

Die Beobachtung der Schwingungsdauer eines als physisches Pendel eingerichteten Körpers kann auch benutzt werden, um dessen Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse zu bestimmen. Gl. 6 liefert nämlich

$$13)\qquad J_0 = Mg\,e\,t^2 : \pi^2.$$

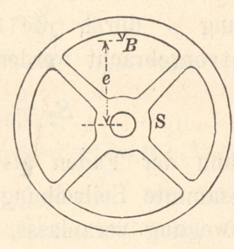
Hat man (Fig. 352) den Punkt A bestimmt, der in der sicheren Gleichgewichtslage lothrecht unter O liegt, so kann man mittels der Aufhängung des Körpers nach Fig. 352 durch das den Körper im Gleichgewichte haltende Gewicht P das statische Moment $Mg\,e = Pa$ finden. Beobachtet man sodann noch t für kleine Schwingungen, so bestimmt sich J_0 nach Gl. 13.

Fig. 352.



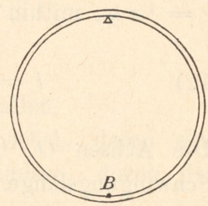
Soll das Trägheitsmoment J_S eines Körpers in Bezug auf eine Schwerpunktsachse bestimmt werden, um welche keine Schwingung entsteht, so lässt man den Körper um eine zeitweilige Achse B schwingen (Fig. 353), bestimmt $J_B = J_0$ nach Gl. 13 und findet daraus $J_S = J_B - Me^2$. Oder, wenn die Befestigung einer besonderen Achse oder Schneide nicht ausführbar, so verbindet man mit dem Körper eine Ergänzungsmasse M_1 derartig, dass sich beide Massen nicht gegen einander verrücken können. M_1 muss so gewählt sein, dass man dessen Beitrag zu J und $Mg\,e$ leicht bestimmen kann. Bringt man M_1 so an, dass es nunmehr mit dem gegebenen

Fig. 353.



Körper ein mögliches Pendel bildet, so kann man leicht das Gesammt-Trägheitsmoment und daraus das Trägheitsmoment des gegebenen Körpers berechnen.

Fig. 354.



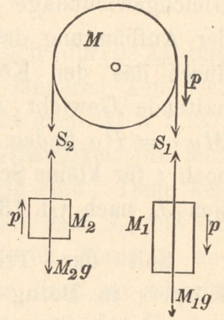
Ein dünner Ring vom Halbmesser r, nach Fig. 354 um eine Schneide schwingend, hat, wegen $J_S = M r^2$, nach Gleichung 7 die Schwingungslänge

$$l = 2\,r.$$

5. Beschleunigte Bewegung einer Seilrolle.

Um eine Seilrolle von der Masse M (Fig. 355) sei ein völlig biegsamer Faden geschlungen, an dessen Enden ungleiche Massen M_1 und M_2 hängen. Es soll die Umfangsbeschleunigung p der Rolle berechnet werden ohne Rücksicht auf Zapfenreibung und Seilbiegungswiderstand und unter der Annahme, dass ein Gleiten des Fadens auf der Rolle nicht stattfindet. Die Masse M_1 erfährt die Beschleunigung p abwärts, die Masse M_2 dieselbe Beschleunigung aufwärts. Die Spannkräfte der Seilstücke sind nicht etwa $M_1 g$ und $M_2 g$, denn diese Gleichheit findet nach S. 86 nur statt, wenn die Massen keine Beschleunigung erfahren. An der Masse M_1 muss die Mittelkraft $M_1 g - S_1 = M_1 p$, mithin

Fig. 355.



1) $\quad S_1 = M_1 g - M_1 p$, u. zw. $< M_1 g$

sein, weil $M_1 g$ und S_1 zusammen die Beschleunigung p erzeugen Ebenso muss an der Masse M_2 die aufwärts gerichtete Beschleunigung p durch die aufwärts gerichtete Kraftsumme $S_2 - M_2 g$ hervorgebracht werden; $S_2 - M_2 g = M_2 p$, mithin

2) $$S_2 = M_2 g + M_2 p, \text{ u. zw. } > M_2 g.$$

Kann der Faden als gewichtlos betrachtet werden, so wird die gesammte Seilreibung, welche die Rolle zu beschleunigter Drehbewegung veranlasst, gemessen durch den Unterschied der Spannkräfte S_1 und S_2, daher wird nach Gl. 4, S. 277, $\mu p = S_1 - S_2$, wenn μ die auf den Umfang bezogene Masse der Rolle ist.