Ist die Meridianfigur ein Kreis vom Halbmesser a (Fig. 339), so wird $\mathfrak{J} = {}^1/_4\, F a^2$, mithin

$$J = V\,(x_0{}^2 + {}^3/_4\, a^2)\,.$$

Fig. 339.

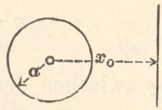
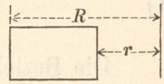


Fig. 340.



Für ein Rechteck als erzeugende Figur (Fig. 340) ist $\mathfrak{J} = F \cdot {}^1/_{12}\,(R - r)^2$, $x_0 = {}^1/_2\,(R + r)$, somit

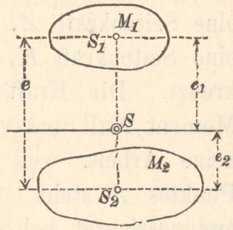
$$J = V\left\{ {}^1/_4\,(R + r)^2 + {}^1/_4\,(R - r)^2 \right\}$$

$$= {}^1/_4\, V \left\{ R^2 + 2\,R\,r + r^2 + R^2 - 2\,R\,r + r^2 \right\}$$

$$= {}^1/_2\, V (R^2 + r^2),$$ übereinstimmend mit Gl. 14, S. 272.

Trägheitsmoment eines aus 2 Theilen bestehenden Körpers. Legt man (Fig. 341) durch die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Theile und durch den Gesammtschwerpunkt S parallele Achsen, sind e_1, e_2 und e die Abstände der Achsen, J_1 und J_2 die Trägheitsmomente der Theile bezüglich der eigenen Schwerpunktsachsen, so ist für den ganzen Körper und seine Schwerpunktsachse (Gl. 3, S. 268)

Fig. 341.



$$J = J_1 + M_1 e_1{}^2 + J_2 + M_2 e_2{}^2.$$

Weil aber $M_2 e_2 = M_1 e_1$ und $e_1 + e_2 = e$, so wird $$e_1 = e \frac{M_2}{M_1 + M_2}.$$

Man kann auch schreiben:

$$J = J_1 + J_2 + M_1 e_1 e_1 + M_2 e_2 e_2$$

$$= J_1 + J_2 + M_1 e_1 (e_1 + e_2)$$

$$= J_1 + J_2 + M_1 \frac{e^2 M_2}{M_1 + M_2}$$

27) $$J = J_1 + J_2 + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} e^2.$$

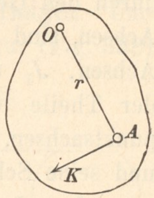
3. Winkelbeschleunigung.

Soll ein Körper sich gleichförmig um eine feste Achse drehen, so muss die Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug auf die Achse Null sein (S. 219) Ist die Momentensumme von Null verschieden, so erfolgt die Drehung nicht gleichförmig, sondern mit einer Winkelbeschleunigung ε. Ebenso wie bei der geradlinigen Bewegung die Beschleunigung $p = \dfrac{dv}{dt}$ (S. 15), so ist die sekundliche Zunahme der Winkelgeschwindigkeit die Winkelbeschleunigung

$$1) \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Die Beziehung zwischen der Winkelbeschleunigung ε und deren Ursachen, den äusseren Kräften, kann man aus dem Satze vom Arbeitsvermögen ableiten, indem man diesen auf ein Zeittheilchen dt anwendet. Die Zunahme an Arbeitsvermögen kann dann nach Gl. 4 (S. 267) geschrieben werden $\frac{1}{2} J d(\omega^2) = J\omega\, d\omega$. Die entsprechende Arbeit aber findet man in folgender Weise: Eine der äusseren Kräfte sei P und liege im Allgemeinen windschief zur Achse O. Das gemeinsame Loth zwischen der Kraft P und der Achse sei r; man zerlege die Kraft P im Fusspunkte A von r in eine Seitenkraft Z, parallel mit der Achse O, und eine Seitenkraft K, welche die Achse rechtwinklig kreuzt. Die Kraft Z hat in Bezug auf O das Moment Null und verrichtet auch bei der Drehung keine Arbeit, weil sie rechtwinklig zur Bewegungsrichtung des Punktes A steht. Die Seitenkraft K aber hat das Moment Kr und verrichtet bei der unendlich kleinen Drehung um den Winkel $\omega\, dt$ die Arbeit $Kr\omega\, dt$. Für sämmtliche Punkte des Körpers ist in einem Augenblicke die Grösse $\omega\, dt$ die gleiche. Verfährt man mit allen äusseren Kräften ebenso wie mit P, so wird die Arbeitssumme $d\mathfrak{A}_k = \omega\, dt \Sigma Kr$. Darin ist ΣKr die Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug auf die Drehachse, schreiben wir dafür $\mathfrak{M}$, so wird nunmehr $J\omega\, d\omega = \omega\, dt \mathfrak{M}$, mithin

Fig. 342.



$$2) \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{J}.$$

Ebenso wie bei der Verschiebung die Beschleunigung $p = R : M$ = Kraft : träge Masse, so ist bei der Drehung um eine feste Achse die Winkelbeschleunigung = Kraftmoment : Trägheitsmoment.

Wählt man einen bestimmten Drehungshalbmesser oder Hebelarm r, so ist an dessen Endpunkte die Umfangsgeschwindigkeit $v = r\omega$, die Umfangsbeschleunigung oder Tangentialbeschleunigung

$$3) \qquad p_t = r\, d\omega : dt = r\varepsilon;$$

bringt man nun das Kraftmoment $\mathfrak{M}$ auf den Hebelarm r, setzt $\mathfrak{M} = Kr$ und schreibt $J = \mu r^2$, so wird aus Gl. 2 und 3

$$p_t = r\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}r}{J} = \frac{Kr^2}{\mu r^2} \text{ oder}$$

4) $$p_t = \frac{K}{\mu},$$

d. h. wenn man Alles auf den gleichen Abstand oder Drehungshalbmesser r bezieht, hat man wie bei einer Verschiebung:

$$\text{Umfangsbeschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}.$$

Auch Gl. 4 (S. 267) für das Arbeitsvermögen kann man entsprechend umformen. Setzt man am Ende des Armes r die Anfangsgeschwindigkeit $c = r\omega_1$, die Endgeschwindigkeit $v = r\omega$, $J = \mu r^2$, so wird aus $\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_1{}^2)\, J = \mathfrak{A}_k$:

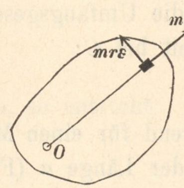
$$\tfrac{1}{2}(v^2 - c^2)\,\mu = \mathfrak{A}_k \text{ oder}$$

5) $$\frac{\mu v^2}{2} - \frac{\mu c^2}{2} = \mathfrak{A}_k,$$

wie (S. 266) für die Verschiebung eines Körpers.

Man kann Gl. 2, $\mathfrak{M} = \varepsilon J$ auch mittels des Satzes von d'Alembert (S. 139) ableiten. Ist in einem Augenblicke ω die Winkelgeschwindigkeit, ε die Winkelbeschleunigung, so führt ein Punkt des Körpers im Abstande r von der Achse (Fig. 343) eine ungleichförmige Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit $v = r\omega$ und der Tangentialbeschleunigung $p_t = r\varepsilon$ aus; die Centripetalbeschleunigung ist $p_n = v^2 : r = r\omega^2$. Diesen entsprechen die Ergänzungskräfte $mr\varepsilon$ bezw. $mr\omega^2$. Deren Momentensumme in Bezug auf O ist $-\varepsilon\Sigma mr^2 = -\varepsilon J$.

Fig. 343.



Den gleichen, aber entgegengesetzten Werth muss auch die Momentensumme $\mathfrak{M}$ der äusseren Kräfte haben, d. h.

6) $$\mathfrak{M} = \varepsilon J.$$

4. Physisches Pendel.

Ein Körper, der um eine nicht durch den Schwerpunkt gehende wagerechte Achse drehbar ist und unter alleiniger Wirkung der Schwere steht, bildet, wenn er in der sicheren Gleichgewichtslage nicht die Geschwindigkeit Null hat, ein Pendel, welches, zum Unterschiede von dem aus einem einzelnen Massenpunkte m mit