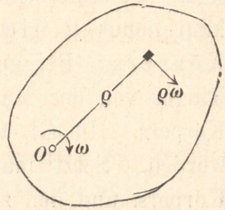
Dreht sich der Körper (Fig. 326) aber um eine feste Achse O (rechtwinklig zur Bildebene), so ist die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω allen seinen Punkten gemeinsam, die Geschwindigkeit eines Punktes im Abstande ϱ von der Achse beträgt $v = \varrho\omega$. Daher wird $\Sigma\frac{mv^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\Sigma m\varrho^2$. Der Ausdruck $\Sigma m\varrho^2$, der nur von der Massenvertheilung des Körpers in Bezug auf die Achse abhängt, heisst nach L. Euler (1707—1783) das **Trägheitsmoment** des Körpers in Bezug auf die Achse O und wird mit J bezeichnet. Daher

Fig 326.



$$3)\qquad J = \Sigma(m\varrho^2) \quad \text{und}$$

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}J, \quad \text{sowie}$$

$$4)\qquad \frac{\omega^2}{2}J - \frac{\omega_1^{\,2}}{2}J = \mathfrak{A}_k,$$

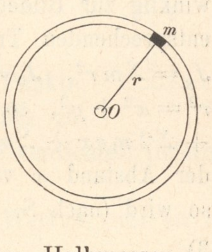
wenn ω_1 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit ist. Die Bezeichnung Trägheitsmoment ist ganz treffend, da diese Grösse den Einfluss der trägen Masse eines Körpers bei der Drehung um eine Achse angiebt.

In gleicher Weise wie S. 125 u. ff. die statischen Momente verschiedener Körper und ebener Flächen ermittelt wurden, soll dies nun auch bezüglich der Trägheitsmomente geschehen.

2. Trägheitsmomente.

Das Trägheitsmoment J wird für solche Körper am einfachsten, deren Massentheilchen sämmtlich in gleicher Entfernung r von der Achse sich befinden. Dies findet statt bei einem Ringe von sehr geringer Wandstärke (Fig. 327). Es ist dann

Fig. 327.



$$J = \Sigma m\varrho^2 = r^2\Sigma m = Mr^2.$$

Für die weitere Anwendung ist es häufig vortheilhaft, das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine Achse gleich zu setzen dem Trägheitsmomente eines dünnen Ringes von einem Halbmesser r.

Nennt man die Masse des gedachten Ringes μ, so muss

1) $$J = \mu r^2$$

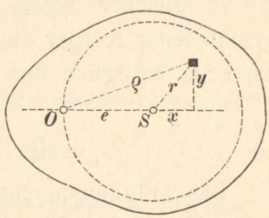
sein. Ist J berechnet, r angenommen, so ist dann auch μ bestimmt. Man nennt μ die auf den Abstand r bezogene Masse des Körpers. Bei gegebenem ω ist dann das Arbeitsvermögen dieses Ringes von der Masse μ ebenso gross wie dasjenige des gegebenen Körpers. In Gl. 1 kann von den Grössen μ und r eine gewählt werden. Setzt man $\mu = M$, d. h. gleich der wahren Masse des Körpers, und den zugehörigen Abstand $r = i$, so wird

2) $$J = Mi^2,$$

und man nennt i den **Trägheitsarm** oder **Trägheitshalbmesser** des Körpers für die Achse O. Denkt man sich die wahre Masse M des Körpers in dem Abstande i von der Achse zu einem Ringe oder einem Punkte vereinigt, so hat dies Gebilde das gleiche Trägheitsmoment mit dem Körper.

Das statische Moment $Mx_0 = \Sigma mx$ bezieht sich auf eine Ebene. Verschiebt sich die Ebene um eine Grösse e, so geht der Schwerpunktsabstand x_0 über in $x_0 \pm e$, mithin ändert sich das statische Moment um $\pm Me$. Das Trägheitsmoment bezieht sich auf eine Achse. Vertauscht man die gegebene Achse aber mit einer Parallelachse im Abstande e, so lässt sich zwischen den Trägheitsmomenten in Bezug auf die beiden Parallelachsen auch eine ähnlich einfache Beziehung aufstellen, wenn die eine Achse durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

Fig. 328.



Die Schwerpunktsachse S stehe rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 328), ebenso eine Achse durch O. Die entsprechenden Trägheitsmomente seien J_S bezw. J_0. Dann ist $J_S = \Sigma mr^2$, $J_0 = \Sigma m\varrho^2$. Weil nun $\varrho^2 = (e+x)^2 + y^2$ und $r^2 = x^2 + y^2$, so wird $\varrho^2 = e^2 + 2ex + r^2$, mithin $J_0 = \Sigma me^2 + \Sigma 2mex + \Sigma mr^2$ oder $J_0 = Me^2 + 2e\Sigma mx + J_S$. Weil aber der Abstand x von einer durch S gehenden Ebene gemessen ist, so wird (nach S. 126) $\Sigma mx = 0$, also

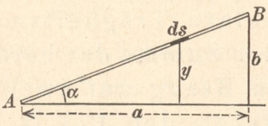
3) $$J_0 = J_S + Me^2.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Achse ist gleich dem Trägheitsmoment in Bezug auf die parallele Schwerpunktsachse plus der Masse mal dem Quadrate der Entfernung beider Achsen.

Sämmtliche Parallelachsen O, O_1 . . . in demselben Abstande e von S liefern gleiches Trägheitsmoment. Von allen Parallelachsen liefert die durch den Schwerpunkt gehende das kleinste Trägheitsmoment.

Trägheitsmoment der materiellen geraden Linie. Ein gerader Stab von der Länge s und dem Querschnitt F sei an einem Ende A an der als Drehachse dienenden x-Achse befestigt, während das andere Ende B durch eine masselose Stange b mit der Achse verbunden sei. Ein Massentheilchen m ist dann nach S. 33 $= \frac{\gamma}{g} F ds$ und

Fig. 329.



liefert zum Trägheitsmoment J den Beitrag $dJ = \frac{\gamma}{g} F ds y^2$; es ist aber $ds : s = dy : b$, mithin

$$J = \frac{\gamma}{g} \frac{Fs}{b} \int_0^b y^2 dy = \frac{\gamma}{g} \frac{Fsb^2}{3},$$

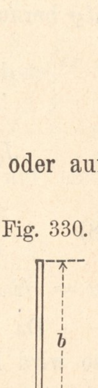
oder, weil die Masse des Stabes $M = \frac{\gamma}{g} Fs$:

4) $$J = \tfrac{1}{3} M b^2.$$

Setzt man dies $= \mu b^2$, so ist die auf den Endpunkt B oder auf den Abstand b bezogene Masse des Stabes

5) $$\mu = \tfrac{1}{3} M,$$

Fig. 330.



während der Trägheitshalbmesser

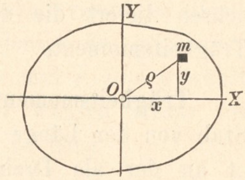
6) $$i = \sqrt{\frac{J}{M}} = \frac{b}{\sqrt{3}} = 0{,}577\, b$$

wird. Dieses Drittel der Masse des Stabes, im Punkte B angebracht, oder die ganze Masse des Stabes zu einem Punkte im Abstande $0{,}577\, b$ von der Achse verdichtet, liefern dasselbe J wie der Stab.

Für $\alpha = 90^0$ (Fig. 330) gelten dieselben Werthe; nur ist b hier gleich der Länge s des Stabes.

Trägheitsmoment einer materiellen ebenen Fläche (Scheibe). Trägheitsmomente in Bezug auf Achsen OX und OY in der Ebene der Figur (Fig. 331) nennen wir Durchmesser-Trägheitsmomente J_x und J_y. Es ist $J_x = \Sigma m y^2$, $J_y = \Sigma m x^2$, ihre Summe $J_x + J_y = \Sigma m (x^2 + y^2) = \Sigma m \varrho^2$; letzterer Werth ist aber das Trägheitsmoment J_0 in Bezug auf die Achse O rechtwinklich zur Fläche und heisst das polare Trägheitsmoment.

Fig. 331.



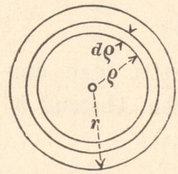
7) $$\boldsymbol{J_0 = J_y + J_x}.$$

Es ist in Bezug auf einen Pol O das polare Trägheitsmoment einer ebenen Fläche gleich der Summe der beiden Durchmesser-Trägheitsmomente in Bezug auf zwei rechtwinklig zu einander stehende, durch den Pol O gelegte Durchmesser. Eine gemeinschaftliche Drehung der Durchmesser um O ändert diese Summe nicht, weil J_0 dadurch nicht beeinflusst wird.

Trägheitsmoment einer materiellen Kreisfläche. Um das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Mittelpunkt O (Fig. 332) zu erhalten, nehmen wir einen Ring von dem Halbmesser ϱ und der Dicke $d\varrho$ heraus. Dieser liefert, wenn δ die Dicke der Scheibe, den Beitrag

$$dJ = \frac{\gamma}{g}\delta \cdot 2\,\varrho\pi d\varrho \cdot \varrho^2, \text{ daher ist}$$

Fig. 332.



$$J_0 = \frac{\gamma}{g}\delta \cdot 2\pi \int_0^r \varrho^3 d\varrho = \frac{\gamma}{g}\delta \cdot \pi \frac{r^4}{2},$$

8) $$\boldsymbol{J_0 = \frac{Mr^2}{2}},$$

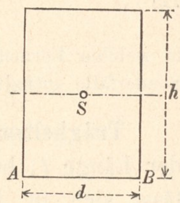
$\mu = \frac{1}{2} M$ (bezogen auf r), $i = r\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707\, r$.

Da sämmtliche Durchmesser des Kreises gleichwerthig sind, so wird hier $J_y = J_x$, mithin $J_x + J_y = 2J_x = J_0$, oder

9) $$J_x = J_y = \frac{Mr^2}{4} = \frac{\gamma}{g}\delta \cdot \frac{r^4\pi}{4}.$$

Trägheitsmoment einer mat. Rechteckfläche. Das Trägheitsmoment des Rechtecks von der Breite d, der Höhe h (Fig. 333) in Bezug auf eine Kante $AB = d$ lässt sich unmittelbar aus dem eines Stabes ableiten. Theilt man das Rechteck in lauter gleiche Streifen von der Höhe h, so ist, nach Gleichung 5, die auf den Abstand h bezogene Masse jedes Streifens $^1/_3$ der wahren Masse. Das gleiche Verhältnis gilt dann auch für das ganze Rechteck, und es ist in Bezug auf AB:

Fig. 333.



$$J = {}^1/_3\, Mh^2 = {}^1/_3 \frac{\gamma}{g}\delta \cdot d \cdot h^3 .$$

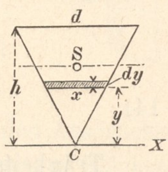
Eine zu AB parallele Achse durch den Schwerpunkt S hat von AB den Abstand $e = {}^1/_2\, h$, mithin ist

$$10)\quad J_S = {}^1/_3\, Mh^2 - {}^1/_4\, Mh^2 = {}^1/_{12}\, Mh^2 = \frac{1}{12}\frac{\gamma}{g}\delta \cdot d \cdot h^3 .$$

Für das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Schwerpunktsachse, parallel mit h würde ebenso $^1/_{12}\, Md^2$ entstehen, mithin für das polare Trägheitsmoment $J_0 = {}^1/_{12}\, M(d^2 + h^2) = {}^1/_{12}\, MD^2$, wenn D die Diagonale bedeutet.

Trägheitsmoment einer mat. Dreieckfläche von der Grundlinie d, der Höhe h (Fig. 334). Zum Trägheitsmomente J_x in Bezug auf eine Achse $CX \parallel d$ liefert ein Streifen $x\,dy$ den Beitrag $dJ = \frac{\gamma}{g}\delta \cdot x\,dy\,y^2 = \frac{\gamma}{g}\frac{\delta \cdot d}{h}y^3 dy$ (wegen $x : d = y : h$), daher ist

Fig. 334.



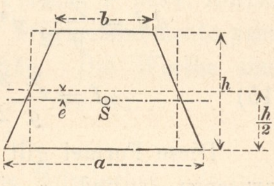
$$J_x = \frac{\gamma}{g}\frac{\delta \cdot d}{h}\int_0^h y^3 dy = \frac{\gamma}{g}\delta\frac{d \cdot h^3}{4} = \frac{Mh^2}{2};$$

darin bezeichnet δ die Dicke der Platte. In Bezug auf eine Schwerpunktsachse $\parallel d$ ist wegen des Abstandes $e = {}^2/_3\, h$:

$$11)\quad J_S = J_x - M\frac{4}{9}h^2 = Mh^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right) = \frac{Mh^2}{18} = \frac{\gamma}{g}\delta\frac{d \cdot h^3}{36}.$$

Trägheitsmoment eines mat. Trapezes. In Bezug auf eine Achse in der Mitte der Höhe (Fig. 335) ist das Trägheitsmoment J_1 offenbar ebenso gross wie dasjenige des gestrichelten flächengleichen Rechtecks, da die von unten nach oben verdrehten Dreiecke in beiden Lagen die gleichen Beiträge liefern; es ist also $J_1 = \frac{M}{12}h^2$.

Fig. 335.



Der Schwerpunkt liegt, wie man aus Gl. 8, S. 129, leicht findet, um $e = \frac{h}{6}\frac{a - b}{a + b}$

unterhalb der Mitte, daher ist in Bezug auf die wagerechte Schwerpunktsachse $J_S = \frac{Mh^2}{12} - \frac{Mh^2}{36}\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$. Dies lässt sich zusammenziehen zu

$$J_S = \frac{Mh^2}{18}\left(1 + \frac{2ab}{(a+b)^2}\right), \tag{12}$$

in welcher Formel selbstverständlich diejenigen für Rechteck und Dreieck als Sonderfälle enthalten sind.

Trägheitsmoment eines Cylinders überall gleicher Dichte, von der Länge l, bezogen auf seine geometrische Achse. Der Cylinder lässt sich in lauter Scheiben von gleicher Dicke zerlegen, die sämmtlich gleich viel zur Masse sowie zum Trägheitsmomente beitragen. Daher muss gelten, wie für die mat. Kreisfläche (Gl. 8)

$$J_0 = M\frac{r^2}{2} = \frac{\gamma}{g}\frac{r^4\pi}{2}l \quad \text{und} \quad \mu = {}^1\!/_2\, M. \tag{13}$$

Für einen Ring von den Halbmessern r und R, der Länge l ist J_0 der Unterschied der Trägheitsmomente der Cylinder der Halbmesser R und r, d. h.

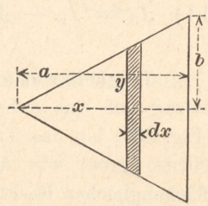
$$J = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)\,l, \quad \text{und weil}$$

$$M = \frac{\gamma}{g}\pi(R^2 - r^2)\,l,$$

$$J_0 = {}^1\!/_2\, M(R^2 + r^2). \tag{14}$$

Trägheitsmoment eines Kegels in Bezug auf seine geometrische Achse (Fig. 336). Für einen Umdrehungskörper gilt, wenn man ihn in Scheiben, rechtwinklig zur Drehachse, vom Halbmesser y und der Dicke dx zerlegt, dass diese Scheibe zum Trägheitsmomente den Beitrag liefert

Fig. 336.



$$dJ = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi}{2}y^4dx, \quad \text{so dass}$$

$$J = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi}{2}\int y^4dx. \tag{15}$$

Diese Formel gilt für alle Umdrehungskörper. Die Beziehung zwischen y und x richtet sich nach der besonderen Art der Meridianlinie.

Beim Kegel ist $y : b = x : a$, daher

$$J = \frac{\gamma}{g}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{b^4}{a^4}\int_0^a x^4 dx = \frac{\gamma}{g}\,\pi\,\frac{a b^4}{10},$$

mithin, weil $M = \frac{\gamma}{g}\,\pi\,\frac{a b^2}{3}$:

16) $$J = \frac{3}{10} M b^2;\quad i = b\sqrt{0{,}3} = 0{,}548\, b,$$

und, auf den Abstand b bezogen:

$$\mu = 0{,}3\, M.$$

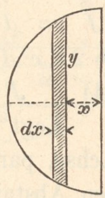
Für ein Umdrehungsparaboloid wird mit $y^2 = 2\,p x$

17) $$J = {}^1/_3\, M b^2;\quad i = 0{,}577\, b;\quad \mu = {}^1/_3\, M.$$

Trägheitsmoment der Halbkugel (Fig. 337). Es ist $y^2 = r^2 - x^2$, daher $$J = \frac{\gamma}{g}\,\frac{\pi}{2}\int_0^r (r^4 - 2\,r^2 x^2 + x^4)\, dx = \frac{8}{30}\,\frac{\gamma}{g}\, r^5 \pi;$$

oder, weil $M = \frac{2}{3}\,\frac{\gamma}{g}\, r^3 \pi$:

Fig. 337.



18) $$J = 0{,}4\, M r^2;\quad i = r\sqrt{0{,}4} = 0{,}632\, r$$

und, auf den Abstand r bezogen:

19) $$\mu = 0{,}4\, M.$$

Für die ganze Kugel ist sowohl J wie M doppelt so gross, daher gelten die gleichen Verhältniszahlen.

Geometrische Trägheitsmomente. Setzt man in den Ausdrücken der Trägheitsmomente für ebene Flächen die Masse der Flächeneinheit $\frac{\gamma}{g}\,\delta = 1$ und in denen für Körper die Masse der Körpereinheit $\frac{\gamma}{g} = 1$, so erhält man für die Trägheitsmomente Ausdrücke, die nur von der geometrischen Form der Flächen bezw. Körper abhängen. Für die Massen treten dann die Flächen F bezw. Körperinhalte V an die Stelle. Diese Werthe der Trägheitsmomente nennt man geometrische Trägheitsmomente. Die Werthe sind:

Für die Kreisfläche $J_0 = {}^1/_2\, F r^2 = {}^1/_2\, r^4 \pi$;

20) $$J_x = {}^1/_4\, F r^2 = {}^1/_4\, r^4 \pi.$$

Für das Rechteck in Bezug auf eine Mittelachse

21) $$J = {}^1/_{12}\, d h^3 = {}^1/_{12}\, F h^2.$$

Für das Dreieck in Bezug auf die Schwerpunktsachse

21) $$J = \frac{1}{36}\, d h^3 = \frac{1}{18}\, F h^2.$$

Für das Trapez in Bezug auf die Schwerpunktsachse

22) $$J = \frac{1}{18} F h^2 \left(1 + \frac{2\,ab}{(a+b)^2}\right) = \frac{h^3}{36}\left(a + b + \frac{2\,ab}{a+b}\right).$$

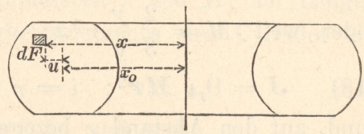
Für den Cylinder

23) $$J = \frac{1}{2} V r^2 = \frac{1}{2} r^4 \pi l \quad \text{u. s. w.}$$

Das geometrische Trägheitsmoment einer Fläche ist wegen der Form $F i^2$ vom vierten Grade, das eines Körpers wegen der Form $V i^2$ vom fünften Grade.

Geometrisches Trägheitsmoment eines ringförmigen Umdrehungskörpers. Ein Theilchen dF der Meridian-Figur (Fig. 338) liefert zum geometrischen Trägheitsmoment J in Bezug auf die geometrische Achse den Beitrag $dJ = dV x^2 = 2\,x \pi\, dF x^2 = 2 \pi x^3 dF$, daher ist

Fig. 338.



24) $$J = 2\pi \int x^3 dF.$$

Legt man durch den Schwerpunkt der Meridianfigur eine Achse, parallel der Umdrehungsachse, und hat dF von dieser Achse den Abstand u, so ist

$$x = x_0 + u; \quad x^3 = x_0{}^3 + 3\,x_0{}^2\,u + 3\,x_0\,u^2 + u^3,$$

mithin, weil x_0 für die Integration unveränderlich:

$$J = 2\pi \left\{ x_0{}^3 F + 3\,x_0{}^2 \int dF u + 3\,x_0 \int dF u^2 + \int dF u^3 \right\}.$$

Nach dem Satze von Guldin (S. 137) ist aber der Rauminhalt des Körpers $V = 2\pi x_0 F$; ferner $\int dF u = 0$ (nach S. 126); endlich $\int dF u^2$ das geometrische Trägheitsmoment der Meridianfigur in Bezug auf die zur Umdrehungsachse parallele Achse durch ihren Schwerpunkt; dies werde $\mathfrak{J}$ genannt, so dass

25) $$J = V x_0{}^2 + 6\pi x_0 \mathfrak{J} + 2\pi \int dF u^3.$$

Ist die Schwerpunktsachse der Figur eine Symmetrieachse derselben, so wird $\int dF u^3 = 0$, da $dF u^3$ in gleich viel positiven und negativen Elementen auftritt, daher

26) $$J = V x_0{}^2 + 6\pi x_0 \mathfrak{J} = V\left(x_0{}^2 + 3\frac{\mathfrak{J}}{F}\right).$$

(Für einen sehr dünnen Ring wäre bekanntlich nach Gl. 1 $J = V x_0{}^2$.)

Ist die Meridianfigur ein Kreis vom Halbmesser a (Fig. 339), so wird $\mathfrak{J} = {}^1/_4\, F a^2$, mithin

$$J = V\,(x_0{}^2 + {}^3/_4\, a^2)\,.$$

Fig. 339.

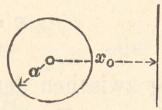
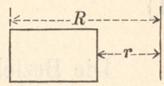


Fig. 340.

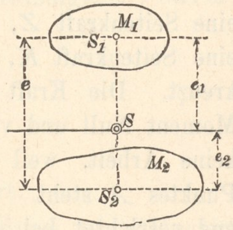


Für ein Rechteck als erzeugende Figur (Fig. 340) ist $\mathfrak{J} = F \cdot {}^1/_{12}\,(R - r)^2$, $x_0 = {}^1/_2\,(R + r)$, somit

$$J = V\left\{ {}^1/_4\,(R+r)^2 + {}^1/_4\,(R-r)^2 \right\}$$
$$= {}^1/_4\, V \left\{ R^2 + 2Rr + r^2 + R^2 - 2Rr + r^2 \right\}$$
$$= {}^1/_2\, V (R^2 + r^2), \text{ übereinstimmend mit Gl. 14, S. 272.}$$

Trägheitsmoment eines aus 2 Theilen bestehenden Körpers. Legt man (Fig. 341) durch die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Theile und durch den Gesammtschwerpunkt S parallele Achsen, sind e_1, e_2 und e die Abstände der Achsen, J_1 und J_2 die Trägheitsmomente der Theile bezüglich der eigenen Schwerpunktsachsen, so ist für den ganzen Körper und seine Schwerpunktsachse (Gl. 3, S. 268)

Fig. 341.



$$J = J_1 + M_1 e_1{}^2 + J_2 + M_2 e_2{}^2.$$

Weil aber $M_2 e_2 = M_1 e_1$ und $e_1 + e_2 = e$,

so wird $\quad e_1 = e \dfrac{M_2}{M_1 + M_2}\,.$

Man kann auch schreiben:

$$J = J_1 + J_2 + M_1 e_1 e_1 + M_2 e_2 e_2$$
$$= J_1 + J_2 + M_1 e_1 (e_1 + e_2)$$
$$= J_1 + J_2 + M_1 \frac{e^2 M_2}{M_1 + M_2}$$

27) $$J = J_1 + J_2 + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\, e^2.$$

3. Winkelbeschleunigung.

Soll ein Körper sich gleichförmig um eine feste Achse drehen, so muss die Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug auf die Achse Null sein (S. 219) Ist die Momentensumme von Null verschieden, so erfolgt die Drehung nicht gleichförmig, sondern mit einer Winkelbeschleunigung ε. Ebenso wie bei der geradlinigen Bewegung die Beschleunigung $p = \dfrac{dv}{dt}$ (S. 15), so ist