II. B. Beschleunigte Bewegung starrer Körper.

1. Grösse des Arbeitsvermögens eines Körpers bei einer Verschiebung bezw. einer Drehung um eine feste Achse.

Soll ein Körper von der Masse M eine reine Verschiebung erfahren, d. h. sollen seine sämmtlichen Punkte in einem Augenblicke übereinstimmende Geschwindigkeiten v und Beschleunigungen p haben, so muss nach S. 141 die Mittelkraft R aller äusseren Kräfte K durch den Schwerpunkt gehen. Die Beschleunigung des Schwerpunktes, also auch sämmtlicher Punkte des Körpers ist dann

$$1)\qquad p = \frac{R}{M}.$$

Will man den Satz der Arbeit auf starre Körper anwenden, so ist zu bemerken, dass nach S. 144 die inneren Kräfte eines starren Körpers keine Arbeit verrichten, dass $\Sigma\frac{mv^2}{2} - \Sigma\frac{mc^2}{2} = \mathfrak{A}_k$, gleich der Arbeit der äusseren Kräfte K ist.

Es kommt nun darauf an, den noch unbestimmten, allgemeinen Ausdruck für das Arbeitsvermögen eines Körpers $\Sigma\frac{mv^2}{2}$ für die einfachen Bewegungsarten in eine bestimmtere Form zu bringen.

Bei einer Verschiebung ist in einem Augenblicke die Geschwindigkeit v allen Massenpunkten gemeinsam, daher

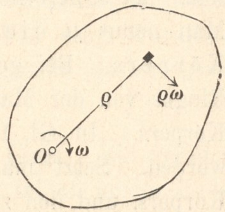
$$\Sigma\frac{mv^2}{2} = \frac{v^2}{2}m_1 + \frac{v^2}{2}m_2 + \ldots + \frac{v^2}{2}m_n = \frac{Mv^2}{2},$$

und der Satz der Arbeit lautet:

$$2)\qquad \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mc^2}{2} = \mathfrak{A}_k.$$

Dreht sich der Körper (Fig. 326) aber um eine feste Achse O (rechtwinklig zur Bildebene), so ist die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω allen seinen Punkten gemeinsam, die Geschwindigkeit eines Punktes im Abstande ϱ von der Achse beträgt $v = \varrho\omega$.

Fig 326.



Daher wird $\Sigma \frac{m v^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \Sigma m \varrho^2$. Der Ausdruck $\Sigma m \varrho^2$, der nur von der Massenvertheilung des Körpers in Bezug auf die Achse abhängt, heisst nach L. Euler (1707—1783) das **Trägheitsmoment** des Körpers in Bezug auf die Achse O und wird mit J bezeichnet. Daher

3) $$J = \Sigma (m \varrho^2) \quad \text{und}$$

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} J, \quad \text{sowie}$$

4) $$\frac{\omega^2}{2} J - \frac{\omega_1^{\,2}}{2} J = \mathfrak{A}_k,$$

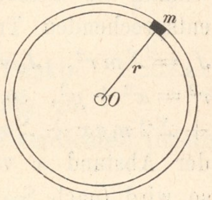
wenn ω_1 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit ist. Die Bezeichnung Trägheitsmoment ist ganz treffend, da diese Grösse den Einfluss der trägen Masse eines Körpers bei der Drehung um eine Achse angiebt.

In gleicher Weise wie S. 125 u. ff. die statischen Momente verschiedener Körper und ebener Flächen ermittelt wurden, soll dies nun auch bezüglich der Trägheitsmomente geschehen.

2. Trägheitsmomente.

Das Trägheitsmoment J wird für solche Körper am einfachsten, deren Massentheilchen sämmtlich in gleicher Entfernung r von der Achse sich befinden. Dies findet statt bei einem Ringe von sehr geringer Wandstärke (Fig. 327). Es ist dann

Fig. 327.



$$J = \Sigma m \varrho^2 = r^2 \Sigma m = M r^2.$$

Für die weitere Anwendung ist es häufig vortheilhaft, das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine Achse gleich zu setzen dem Trägheitsmomente eines dünnen Ringes von einem Halbmesser r.