

II. B. Beschleunigte Bewegung starrer Körper.

I. Grösse des Arbeitsvermögens eines Körpers bei einer Verschiebung bzw. einer Drehung um eine feste Achse.

Soll ein Körper von der Masse M eine reine Verschiebung erfahren, d. h. sollen seine sämtlichen Punkte in einem Augenblicke übereinstimmende Geschwindigkeiten v und Beschleunigungen p haben, so muss nach S. 141 die Mittelkraft R aller äusseren Kräfte K durch den Schwerpunkt gehen. Die Beschleunigung des Schwerpunktes, also auch sämtlicher Punkte des Körpers ist dann

$$1) \quad p = \frac{R}{M}.$$

Will man den Satz der Arbeit auf starre Körper anwenden, so ist zu bemerken, dass nach S. 144 die inneren Kräfte eines starren Körpers keine Arbeit verrichten, dass $\sum \frac{m v^2}{2} - \sum \frac{m c^2}{2} = \mathfrak{A}_k$, gleich der Arbeit der äusseren Kräfte K ist.

Es kommt nun darauf an, den noch unbestimmten, allgemeinen Ausdruck für das Arbeitsvermögen eines Körpers $\sum \frac{m v^2}{2}$ für die einfachen Bewegungsarten in eine bestimmtere Form zu bringen.

Bei einer Verschiebung ist in einem Augenblicke die Geschwindigkeit v allen Massenpunkten gemeinsam, daher

$$\sum \frac{m v^2}{2} = \frac{v^2}{2} m_1 + \frac{v^2}{2} m_2 + \dots + \frac{v^2}{2} m_n = \frac{M v^2}{2},$$

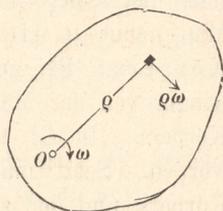
und der Satz der Arbeit lautet:

$$2) \quad \frac{M v^2}{2} - \frac{M c^2}{2} = \mathfrak{A}_k.$$

Dreht sich der Körper (Fig. 326) aber um eine feste Achse O (rechtwinklig zur Bildebene), so ist die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω allen seinen Punkten gemeinsam, die Geschwindigkeit eines Punktes im Abstände ρ von der Achse beträgt $v = \rho\omega$.

Daher wird $\Sigma \frac{mv^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \Sigma m\rho^2$. Der Ausdruck $\Sigma m\rho^2$, der nur von der Massenverteilung des Körpers in Bezug auf die Achse abhängt, heisst nach L. Euler (1707—1783) das **Trägheitsmoment** des Körpers in Bezug auf die Achse O und wird mit J bezeichnet. Daher

Fig. 326.



$$3) \quad J = \Sigma (m\rho^2) \quad \text{und}$$

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} J, \quad \text{sowie}$$

$$4) \quad \frac{\omega^2}{2} J - \frac{\omega_1^2}{2} J = \mathfrak{A}_k,$$

wenn ω_1 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit ist. Die Bezeichnung Trägheitsmoment ist ganz treffend, da diese Grösse den Einfluss der trägen Masse eines Körpers bei der Drehung um eine Achse angiebt.

In gleicher Weise wie S. 125 u. ff. die statischen Momente verschiedener Körper und ebener Flächen ermittelt wurden, soll dies nun auch bezüglich der Trägheitsmomente geschehen.

2. Trägheitsmomente.

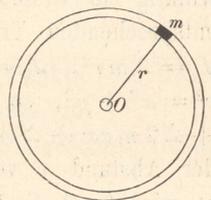
Das Trägheitsmoment J wird für solche Körper am einfachsten, deren Massentheilchen sämmtlich in gleicher Entfernung r von der Achse sich befinden. Dies findet statt bei einem Ringe von sehr geringer Wandstärke (Fig. 327). Es ist dann

$$J = \Sigma m\rho^2 = r^2 \Sigma m = Mr^2.$$

Für die weitere Anwendung ist es häufig vorthellhaft, das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine Achse gleich zu setzen dem

Trägheitsmomente eines dünnen Ringes von einem Halbmesser r .

Fig. 327.



Nennt man die Masse des gedachten Ringes μ , so muss

$$1) \quad J = \mu r^2$$

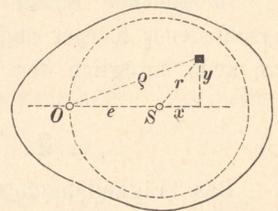
sein. Ist J berechnet, r angenommen, so ist dann auch μ bestimmt. Man nennt μ die auf den Abstand r bezogene Masse des Körpers. Bei gegebenem ω ist dann das Arbeitsvermögen dieses Ringes von der Masse μ ebenso gross wie dasjenige des gegebenen Körpers. In Gl. 1 kann von den Grössen μ und r eine gewählt werden. Setzt man $\mu = M$, d. h. gleich der wahren Masse des Körpers, und den zugehörigen Abstand $r = i$, so wird

$$2) \quad J = Mi^2,$$

und man nennt i den **Trägheitsarm** oder **Trägheitshalbmesser** des Körpers für die Achse O . Denkt man sich die wahre Masse M des Körpers in dem Abstände i von der Achse zu einem Ringe oder einem Punkte vereinigt, so hat dies Gebilde das gleiche Trägheitsmoment mit dem Körper.

Das statische Moment $Mx_0 = \Sigma mx$ bezieht sich auf eine Ebene. Verschiebt sich die Ebene um eine Grösse e , so geht der Schwerpunktsabstand x_0 über in $x_0 \pm e$, mithin ändert sich das statische Moment um $\pm Me$. Das Trägheitsmoment bezieht sich auf eine Achse. Vertauscht man die gegebene Achse aber mit einer Parallelachse im Abstände e , so lässt sich zwischen den Trägheitsmomenten in Bezug auf die beiden Parallelachsen auch eine ähnlich einfache Beziehung aufstellen, wenn die eine Achse durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

Fig. 328.



Die Schwerpunktsachse S stehe rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 328), ebenso eine Achse durch O . Die entsprechenden Trägheitsmomente seien J_s bzw. J_0 . Dann ist $J_s = \Sigma mr^2$, $J_0 = \Sigma m \rho^2$. Weil nun $\rho^2 = (e + x)^2 + y^2$ und $r^2 = x^2 + y^2$, so wird $\rho^2 = e^2 + 2ex + r^2$, mithin $J_0 = \Sigma me^2 + \Sigma 2mex + \Sigma mr^2$ oder $J_0 = Me^2 + 2e \Sigma mx + J_s$. Weil aber der Abstand x von einer durch S gehenden Ebene gemessen ist, so wird (nach S. 126) $\Sigma mx = 0$, also

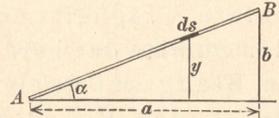
$$3) \quad J_0 = J_s + Me^2.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Achse ist gleich dem Trägheitsmoment in Bezug auf die parallele Schwerpunktsachse plus der Masse mal dem Quadrate der Entfernung beider Achsen.

Sämmtliche Parallelachsen $O, O_1 \dots$ in demselben Abstände e von S liefern gleiches Trägheitsmoment. Von allen Parallelachsen liefert die durch den Schwerpunkt gehende das kleinste Trägheitsmoment.

Trägheitsmoment der materiellen geraden Linie. Ein gerader Stab von der Länge s und dem Querschnitt F sei an einem Ende A an der als Drehachse dienenden x -Achse befestigt, während das andere Ende B durch eine masselose Stange b mit der Achse verbunden sei. Ein Massenthcilchen m ist dann nach S. 33 $= \frac{\gamma}{g} F ds$ und

Fig. 329.



liefert zum Trägheitsmoment J den Beitrag $dJ = \frac{\gamma}{g} F ds y^2$; es ist aber $ds : s = dy : b$, mithin

$$J = \frac{\gamma}{g} \frac{Fs}{b} \int_0^b y^2 dy = \frac{\gamma}{g} \frac{Fs b^2}{3},$$

oder, weil die Masse des Stabes $M = \frac{\gamma}{g} Fs$:

$$4) \quad J = \frac{1}{3} M b^2.$$

Setzt man dies $= \mu b^2$, so ist die auf den Endpunkt B oder auf den Abstand b bezogene Masse des Stabes

$$5) \quad \mu = \frac{1}{3} M,$$

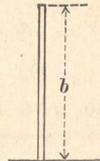
während der Trägheitshalbmesser

$$6) \quad i = \sqrt{\frac{J}{M}} = \frac{b}{\sqrt{3}} = 0,577 b$$

wird. Dieses Drittel der Masse des Stabes, im Punkte B angebracht, oder die ganze Masse des Stabes zu einem Punkte im Abstände $0,577 b$ von der Achse verdichtet, liefern dasselbe J wie der Stab.

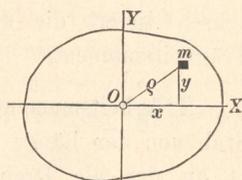
Für $\alpha = 90^\circ$ (Fig. 330) gelten dieselben Werthe; nur ist b hier gleich der Länge s des Stabes.

Fig. 330.



Trägheitsmoment einer materiellen ebenen Fläche (Scheibe). Trägheitsmomente in Bezug auf Achsen OX und OY in der Ebene der Figur (Fig. 331) nennen wir Durchmesser-Trägheitsmomente J_x und J_y . Es ist $J_x = \sum m y^2$, $J_y = \sum m x^2$, ihre Summe $J_x + J_y = \sum m (x^2 + y^2) = \sum m \rho^2$; letzterer Werth ist aber das Trägheitsmoment J_0 in Bezug auf die Achse O rechtwinklich zur Fläche und heisst das polare Trägheitsmoment.

Fig. 331.



$$7) \quad J_0 = J_y + J_x.$$

Es ist in Bezug auf einen Pol O das polare Trägheitsmoment einer ebenen Fläche gleich der Summe der beiden Durchmesser-Trägheitsmomente in Bezug auf zwei rechtwinklig zu einander stehende, durch den Pol O gelegte Durchmesser. Eine gemeinschaftliche Drehung der Durchmesser um O ändert diese Summe nicht, weil J_0 dadurch nicht beeinflusst wird.

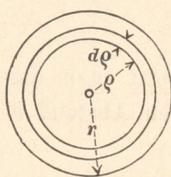
Trägheitsmoment einer materiellen Kreisfläche. Um das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Mittelpunkt O (Fig. 332) zu erhalten, nehmen wir einen Ring von dem Halbmesser ρ und der Dicke $d\rho$ heraus. Dieser liefert, wenn δ die Dicke der Scheibe, den Beitrag

Fig. 332.

$$dJ = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot 2 \rho \pi d\rho \cdot \rho^2, \text{ daher ist}$$

$$J_0 = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot 2 \pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot \pi \frac{r^4}{2},$$

$$8) \quad J_0 = \frac{Mr^2}{2},$$



$$\mu = \frac{1}{2} M \text{ (bezogen auf } r), \quad i = r \sqrt{1/2} = 0,707 r.$$

Da sämtliche Durchmesser des Kreises gleichwerthig sind, so wird hier $J_y = J_x$, mithin $J_x + J_y = 2 J_x = J_0$, oder

$$9) \quad J_x = J_y = \frac{Mr^2}{4} = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot \frac{r^4 \pi}{4}.$$

Trägheitsmoment einer mat. Rechteckfläche. Das Trägheitsmoment des Rechtecks von der Breite d , der Höhe h (Fig. 333) in Bezug auf eine Kante $AB = d$ lässt sich unmittelbar aus dem eines Stabes ableiten. Theilt man das Rechteck in lauter gleiche Streifen

von der Höhe h , so ist, nach Gleichung 5, die auf den Abstand h bezogene Masse jedes Streifens $1/3$ der wahren Masse. Das gleiche Verhältnis gilt dann auch für das ganze Rechteck, und es ist in Bezug auf AB :

$$J = 1/3 Mh^2 = 1/3 \frac{\gamma}{g} \delta \cdot d \cdot h^3.$$

Eine zu AB parallele Achse durch den Schwerpunkt S hat von AB den Abstand $e = 1/2 h$, mithin ist

$$10) \quad J_s = 1/3 Mh^2 - 1/4 Mh^2 = 1/12 Mh^2 = \frac{1}{12} \frac{\gamma}{g} \delta \cdot d \cdot h^3.$$

Für das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Schwerpunktsachse, parallel mit h würde ebenso $1/12 Md^2$ entstehen, mithin für das polare Trägheitsmoment $J_0 = 1/12 M(d^2 + h^2) = 1/12 MD^2$, wenn D die Diagonale bedeutet.

Trägheitsmoment einer mat. Dreiecksfläche von der Grundlinie d , der Höhe h (Fig. 334). Zum Trägheitsmomente J_x in Bezug auf eine Achse $CX \parallel d$ liefert ein Streifen $x dy$ den

Beitrag $dJ = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot x dy y^2 = \frac{\gamma}{g} \frac{\delta \cdot d}{h} y^3 dy$ (wegen $x : d = y : h$), daher ist

$$J_x = \frac{\gamma}{g} \frac{\delta \cdot d}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{\gamma}{g} \delta \frac{d \cdot h^3}{4} = \frac{Mh^2}{2};$$

darin bezeichnet δ die Dicke der Platte. In Bezug auf eine Schwerpunktsachse $\parallel d$ ist wegen des Abstandes $e = 2/3 h$:

$$11) \quad J_s = J_x - M \frac{4}{9} h^2 = Mh^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9} \right) = \frac{Mh^2}{18} = \frac{\gamma}{g} \delta \frac{d \cdot h^3}{36}.$$

Trägheitsmoment eines mat. Trapezes. In Bezug auf eine Achse in der Mitte der Höhe (Fig. 335) ist das Trägheitsmoment J_1 offenbar ebenso gross wie dasjenige des gestrichelten flächengleichen Rechtecks, da die von unten nach oben verdrehten Dreiecke in beiden Lagen die gleichen Beiträge liefern; es ist also $J_1 = \frac{M}{12} h^2$.

Der Schwerpunkt liegt, wie man aus Gl. 8, S. 129, leicht findet, um $e = \frac{h}{6} \frac{a-b}{a+b}$

Fig. 333.

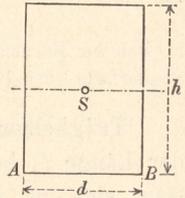


Fig. 334.

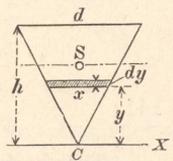
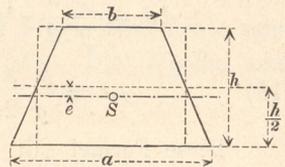


Fig. 335.



unterhalb der Mitte, daher ist in Bezug auf die wagerechte Schwerpunktsachse

$$J_S = \frac{Mh^2}{12} - \frac{Mh^2}{36} \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}. \quad \text{Dies lässt sich zusammenziehen zu}$$

$$12) \quad J_S = \frac{Mh^2}{18} \left(1 + \frac{2ab}{(a+b)^2} \right),$$

in welcher Formel selbstverständlich diejenigen für Rechteck und Dreieck als Sonderfälle enthalten sind.

Trägheitsmoment eines Cylinders überall gleicher Dichte, von der Länge l , bezogen auf seine geometrische Achse. Der Cylinder lässt sich in lauter Scheiben von gleicher Dicke zerlegen, die sämtlich gleich viel zur Masse sowie zum Trägheitsmomente beitragen. Daher muss gelten, wie für die mat. Kreisfläche (Gl. 8)

$$13) \quad J_0 = M \frac{r^2}{2} = \frac{\gamma}{g} \frac{r^4 \pi}{2} l \quad \text{und} \quad \mu = 1/2 M.$$

Für einen Ring von den Halbmessern r und R , der Länge l ist J_0 der Unterschied der Trägheitsmomente der Cylinder der Halbmesser R und r , d. h.

$$J = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) l, \quad \text{und weil}$$

$$M = \frac{\gamma}{g} \pi (R^2 - r^2) l,$$

$$14) \quad J_0 = 1/2 M (R^2 + r^2).$$

Trägheitsmoment eines Kegels in Bezug auf seine geometrische Achse (Fig. 336). Für einen Umdrehungskörper gilt, wenn man ihn in Scheiben, rechtwinklig zur Drehachse, vom Halbmesser y und der Dicke dx zerlegt, dass diese Scheibe zum Trägheitsmomente den Beitrag liefert

$$dJ = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} y^4 dx, \quad \text{so dass}$$

$$15) \quad J = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} \int y^4 dx.$$

Diese Formel gilt für alle Umdrehungskörper. Die Beziehung zwischen y und x richtet sich nach der besonderen Art der Meridianlinie.

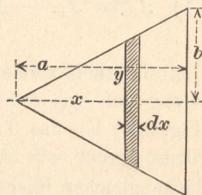


Fig. 336.

Beim Kegel ist $y : b = x : a$, daher

$$J = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} \frac{b^4}{a^4} \int_0^a x^4 dx = \frac{\gamma}{g} \pi \frac{a b^4}{10},$$

mithin, weil $M = \frac{\gamma}{g} \pi \frac{a b^3}{3}$:

$$16) \quad J = \frac{3}{10} M b^2; \quad i = b \sqrt{0,3} = 0,548 b,$$

und, auf den Abstand b bezogen:

$$\mu = 0,3 M.$$

Für ein Umdrehungsparaboloid wird mit $y^2 = 2 p x$

$$17) \quad J = 1/3 M b^2; \quad i = 0,577 b; \quad \mu = 1/3 M.$$

Trägheitsmoment der Halbkugel (Fig. 337). Es ist $y^2 = r^2 - x^2$,

$$\text{daher} \quad J = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} \int_0^r (r^4 - 2 r^2 x^2 + x^4) dx = \frac{8}{30} \frac{\gamma}{g} r^5 \pi;$$

oder, weil $M = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{g} r^3 \pi$:

$$18) \quad J = 0,4 M r^2; \quad i = r \sqrt{0,4} = 0,632 r$$

und, auf den Abstand r bezogen:

$$19) \quad \mu = 0,4 M.$$

Für die ganze Kugel ist sowohl J wie M doppelt so gross, daher gelten die gleichen Verhältniszahlen.

Geometrische Trägheitsmomente. Setzt man in den Ausdrücken der Trägheitsmomente für ebene Flächen die Masse der Flächeneinheit $\frac{\gamma}{g} \delta = 1$ und in denen für Körper die Masse der Körpereinheit $\frac{\gamma}{g} = 1$, so erhält man für die Trägheitsmomente Ausdrücke, die nur von der geometrischen Form der Flächen bzw. Körper abhängen. Für die Massen treten dann die Flächen F bzw. Körperinhalte V an die Stelle. Diese Werthe der Trägheitsmomente nennt man geometrische Trägheitsmomente. Die Werthe sind:

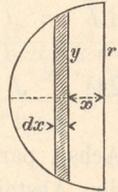
Für die Kreisfläche $J_0 = 1/2 F r^2 = 1/2 r^4 \pi$;

$$20) \quad J_x = 1/4 F r^2 = 1/4 r^4 \pi.$$

Für das Rechteck in Bezug auf eine Mittelachse

$$21) \quad J = 1/12 d h^3 = 1/12 F h^2.$$

Fig. 337.



Für das Dreieck in Bezug auf die Schwerpunktsachse

$$21) \quad J = \frac{1}{36} dh^3 = \frac{1}{18} Fh^2.$$

Für das Trapez in Bezug auf die Schwerpunktsachse

$$22) \quad J = \frac{1}{18} Fh^2 \left(1 + \frac{2ab}{(a+b)^2} \right) = \frac{h^3}{36} \left(a + b + \frac{2ab}{a+b} \right).$$

Für den Cylinder

$$23) \quad J = \frac{1}{2} Vr^2 = \frac{1}{2} r^4 \pi l \quad \text{u. s. w.}$$

Das geometrische Trägheitsmoment einer Fläche ist wegen der Form $F\bar{v}^2$ vom vierten Grade, das eines Körpers wegen der Form $V\bar{v}^2$ vom fünften Grade.

Geometrisches Trägheitsmoment eines ringförmigen Umdrehungskörpers. Ein Theilchen dF der Meridian-Figur (Fig. 338)

liefert zum geometrischen Träg-

heitsmoment J in Bezug auf die

geometrische Achse den Beitrag

$$dJ = dVx^2 = 2x\pi dFx^2$$

$$= 2\pi x^3 dF, \text{ daher ist}$$

$$24) \quad J = 2\pi \int x^3 dF.$$

Legt man durch den Schwerpunkt der Meridianfigur eine Achse, parallel der Umdrehungsachse, und hat dF von dieser Achse den Abstand u , so ist

$$x = x_0 + u; \quad x^3 = x_0^3 + 3x_0^2u + 3x_0u^2 + u^3,$$

mithin, weil x_0 für die Integration unveränderlich:

$$J = 2\pi \left\{ x_0^3 F + 3x_0^2 \int dFu + 3x_0 \int dFu^2 + \int dFu^3 \right\}.$$

Nach dem Satze von Guldin (S. 137) ist aber der Rauminhalt des Körpers $V = 2\pi x_0 F$; ferner $\int dFu = 0$ (nach S. 126); endlich $\int dFu^2$ das geometrische Trägheitsmoment der Meridianfigur in Bezug auf die zur Umdrehungsachse parallele Achse durch ihren Schwerpunkt; dies werde \mathfrak{S} genannt, so dass

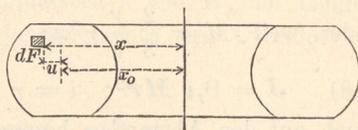
$$25) \quad J = Vx_0^2 + 6\pi x_0 \mathfrak{S} + 2\pi \int dFu^3.$$

Ist die Schwerpunktsachse der Figur eine Symmetrieachse derselben, so wird $\int dFu^3 = 0$, da dFu^3 in gleich viel positiven und negativen Elementen auftritt, daher

$$26) \quad J = Vx_0^2 + 6\pi x_0 \mathfrak{S} = V \left(x_0^2 + 3 \frac{\mathfrak{S}}{F} \right).$$

(Für einen sehr dünnen Ring wäre bekanntlich nach Gl. 1 $J = Vx_0^2$.)

Fig. 338.

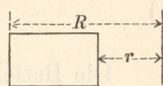
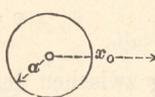


Ist die Meridianfigur ein Kreis vom Halbmesser a (Fig. 339), so wird $\mathfrak{S} = \frac{1}{4} F a^2$, mithin

$$J = V (x_0^2 + \frac{3}{4} a^2).$$

Für ein Rechteck als erzeugende Figur (Fig. 340) ist $\mathfrak{S} = F \cdot \frac{1}{12} (R-r)^2$, $x_0 = \frac{1}{2} (R+r)$, somit

$$\begin{aligned} J &= V \left\{ \frac{1}{4} (R+r)^2 + \frac{1}{4} (R-r)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4} V \left\{ R^2 + 2Rr + r^2 + R^2 - 2Rr + r^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} V (R^2 + r^2), \text{ übereinstimmend mit Gl. 14, S. 272.} \end{aligned}$$



Trägheitsmoment eines aus 2 Theilen bestehenden Körpers. Legt man (Fig. 341) durch die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Theile und durch den Gesamtschwerpunkt S parallele Achsen, sind e_1 , e_2 und e die Abstände der Achsen, J_1 und J_2 die Trägheitsmomente der Theile bezüglich der eigenen Schwerpunktsachsen, so ist für den ganzen Körper und seine Schwerpunktsachse (Gl. 3, S. 268)

$$J = J_1 + M_1 e_1^2 + J_2 + M_2 e_2^2.$$

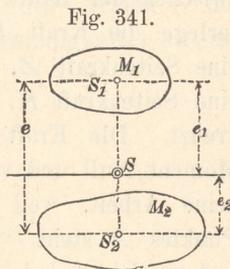
Weil aber $M_2 e_2 = M_1 e_1$ und $e_1 + e_2 = e$,

so wird $e_1 = e \frac{M_2}{M_1 + M_2}$.

Man kann auch schreiben:

$$\begin{aligned} J &= J_1 + J_2 + M_1 e_1 e_1 + M_2 e_2 e_2 \\ &= J_1 + J_2 + M_1 e_1 (e_1 + e_2) \\ &= J_1 + J_2 + M_1 \frac{e^2 M_2}{M_1 + M_2} \end{aligned}$$

$$27) \quad J = J_1 + J_2 + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} e^2.$$



3. Winkelbeschleunigung.

Soll ein Körper sich gleichförmig um eine feste Achse drehen, so muss die Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug auf die Achse Null sein (S. 219). Ist die Momentensumme von Null verschieden, so erfolgt die Drehung nicht gleichförmig, sondern mit einer Winkelbeschleunigung ε . Ebenso wie bei der geradlinigen Bewegung die Beschleunigung $p = \frac{dv}{dt}$ (S. 15), so ist

die sekundliche Zunahme der Winkelgeschwindigkeit die Winkelbeschleunigung

$$1) \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Die Beziehung zwischen der Winkelbeschleunigung ε und deren Ursachen, den äusseren Kräften, kann man aus dem Satze vom Arbeitsvermögen ableiten, indem man diesen auf ein Zeittheilchen dt anwendet. Die Zunahme an Arbeitsvermögen kann dann nach Gl. 4 (S. 267) geschrieben werden $\frac{1}{2} J d(\omega^2) = J\omega d\omega$. Die entsprechende Arbeit aber findet man in folgender Weise: Eine der äusseren Kräfte sei P und liege im Allgemeinen windschief zur Achse O . Das gemeinsame Loth zwischen der Kraft P und der Achse sei r ; man zerlege die Kraft P im Fusspunkte A von r in eine Seitenkraft Z , parallel mit der Achse O , und eine Seitenkraft K , welche die Achse rechtwinklig kreuzt. Die Kraft Z hat in Bezug auf O das Moment Null und verrichtet auch bei der Drehung keine Arbeit, weil sie rechtwinklig zur Bewegungsrichtung des Punktes A steht. Die Seitenkraft K aber hat das Moment Kr und verrichtet bei der unendlich kleinen Drehung um den Winkel ωdt die Arbeit $Kr\omega dt$. Für sämtliche Punkte des Körpers ist in einem Augenblicke die Grösse ωdt die gleiche. Verfährt man mit allen äusseren Kräften ebenso wie mit P , so wird die Arbeitssumme $d\mathfrak{A}_x = \omega dt \sum Kr$. Darin ist $\sum Kr$ die Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug auf die Drehachse, schreiben wir dafür \mathfrak{M} , so wird nunmehr $J\omega d\omega = \omega dt \mathfrak{M}$, mithin

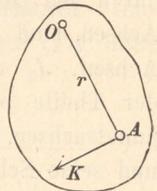
$$2) \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{J}.$$

Ebenso wie bei der Verschiebung die Beschleunigung $p = R : M = \text{Kraft} : \text{träge Masse}$, so ist bei der Drehung um eine feste Achse die Winkelbeschleunigung = Kraftmoment : Trägheitsmoment.

Wählt man einen bestimmten Drehungshalbmesser oder Hebelarm r , so ist an dessen Endpunkte die Umfangsgeschwindigkeit $v = r\omega$, die Umfangsbeschleunigung oder Tangentialbeschleunigung

$$3) \quad p_t = r d\omega : dt = r\varepsilon;$$

Fig. 342.



bringt man nun das Kraftmoment \mathfrak{M} auf den Hebelarm r , setzt $\mathfrak{M} = Kr$ und schreibt $J = \mu r^2$, so wird aus Gl. 2 und 3

$$p_t = r\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}r}{J} = \frac{Kr^2}{\mu r^2} \text{ oder}$$

$$4) \quad p_t = \frac{K}{\mu},$$

d. h. wenn man Alles auf den gleichen Abstand oder Drehungshalbmesser r bezieht, hat man wie bei einer Verschiebung:

$$\text{Umfangsbeschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}.$$

Auch Gl. 4 (S. 267) für das Arbeitsvermögen kann man entsprechend umformen. Setzt man am Ende des Armes r die Anfangsgeschwindigkeit $c = r\omega_1$, die Endgeschwindigkeit $v = r\omega$, $J = \mu r^2$, so wird aus $\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_1^2)J = \mathfrak{A}_k$:

$$\frac{1}{2}(v^2 - c^2)\mu = \mathfrak{A}_k \text{ oder}$$

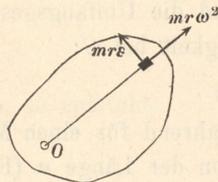
$$5) \quad \frac{\mu v^2}{2} - \frac{\mu c^2}{2} = \mathfrak{A}_k,$$

wie (S. 266) für die Verschiebung eines Körpers.

Man kann Gl. 2, $\mathfrak{M} = \varepsilon J$ auch mittels des Satzes von d'Alembert (S. 139) ableiten. Ist in einem Augenblicke ω die Winkelgeschwindigkeit, ε die Winkelbeschleunigung, so führt ein Punkt des Körpers im Abstande r von der Achse (Fig. 343) eine ungleichförmige Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit $v = r\omega$ und der Tangentialbeschleunigung $p_t = r\varepsilon$ aus; die Centripetalbeschleunigung ist $p_n = v^2 : r = r\omega^2$. Diesen entsprechen die Ergänzungskräfte $mr\varepsilon$ bzw. $mr\omega^2$. Deren Momentensumme in Bezug auf O ist $-\varepsilon \sum mr^2 = -\varepsilon J$. Den gleichen, aber entgegengesetzten Werth muss auch die Momentensumme \mathfrak{M} der äusseren Kräfte haben, d. h.

$$6) \quad \mathfrak{M} = \varepsilon J.$$

Fig. 343.



4. Physisches Pendel.

Ein Körper, der um eine nicht durch den Schwerpunkt gehende wagerechte Achse drehbar ist und unter alleiniger Wirkung der Schwere steht, bildet, wenn er in der sicheren Gleichgewichtslage nicht die Geschwindigkeit Null hat, ein Pendel, welches, zum Unterschiede von dem aus einem einzelnen Massenpunkte m mit

gewichtlosem Faden bestehenden, S. 76 behandelten, mathematischen Pendel, physisches Pendel genannt wird.

Der beliebig gestaltete Körper sei zunächst so festgehalten, dass der Schwerpunkt S (Fig. 344) in gleicher Höhe mit der Achse O liegt, und werde nun losgelassen. Es soll die Winkelgeschwindigkeit ω berechnet werden, mit der der Drehungshalbmesser $OS = e$ des Schwerpunktes durch die Lothrechte hindurchschwingt.

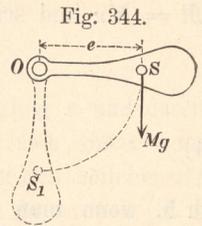


Fig. 344.

Wendet man auf die Bewegung SS_1 den Satz der Arbeit an, so ergibt sich (nach S. 267) $\frac{1}{2} \omega^2 J - 0 = Mge$, mithin

$$1) \quad \omega = \sqrt{2ge \frac{M}{J}} = \sqrt{2g \frac{e}{i^2}} \text{ mit } J = Mi^2 \text{ (S. 268).}$$

Ist der Körper ein Stab, eine materielle Gerade von der Länge a (Fig. 345), so ist

$$e = \frac{1}{2} a, \quad J = \frac{1}{3} Ma^2,$$

mithin

$$2) \quad \omega = \sqrt{\frac{ga \cdot \frac{3}{a^2}}{a}} = \sqrt{\frac{3g}{a}}$$

und die Umfangsgeschwindigkeit bei C :

$$3) \quad v = a\omega = \sqrt{3ga},$$

während für einen Massenpunkt am Ende einer gewichtlosen Stange von der Länge a (Fig. 346)

$$4) \quad v = \sqrt{2ga} \text{ sein würde.}$$

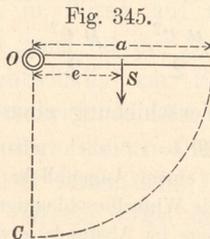


Fig. 345.

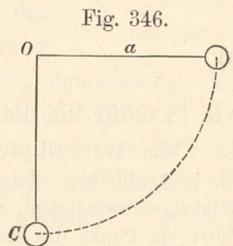


Fig. 346.

Schwingungsdauer des physischen Pendels. In einer beliebigen Zwischenlage (Fig. 347), in der OS mit der Lothrechten den Winkel ϑ bildet, ist das Moment

$$\mathfrak{M} = Mge \sin \vartheta,$$

daher die Winkelbeschleunigung

$$\varepsilon = \frac{Mge \sin \vartheta}{J_0}.$$

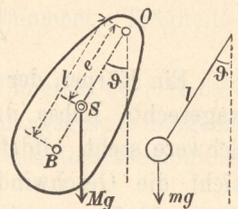


Fig. 347.

Für ein mathematisches Pendel aber von einer Pendellänge l ist bei demselben Abweichungswinkel ϑ , weil $J = ml^2$,

$$\varepsilon_1 = \frac{mgl \sin \vartheta}{ml^2} = \frac{g \sin \vartheta}{l}.$$

Beide Beschleunigungen ε und ε_1 sind verhältnismäßig mit $\sin \vartheta$ und stimmen völlig überein, wenn

$$\frac{Mge}{J_0} = \frac{g}{l}, \text{ d. h. wenn}$$

$$5) \quad l = \frac{J_0}{Me} \text{ ist.}$$

Wählt man die Länge des mathematischen Pendels nach Gl. 5 und giebt beiden Pendeln einen gleichen Anfangswert von ϑ , bei dem die Geschwindigkeit Null war, lässt also beide Pendel von derselben Anfangsneigung aus sich in Bewegung setzen, so wird die Beschleunigung beider Pendel für jeden Winkel ϑ die gleiche sein, daher werden beide Pendel sich übereinstimmend bewegen, mithin auch gleiche Schwingungsdauer haben müssen.

Bei kleinen Schwingungen ist nun für das mathematische Pendel die Dauer einer einfachen Schwingung nach S. 78

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Setzt man hierin den Werth l nach Gl. 5 ein, so entsteht

$$6) \quad t = \pi \sqrt{\frac{J_0}{Mge}}$$

als Dauer einer einfachen kleinen Schwingung des physischen Pendels.

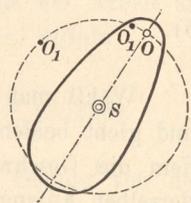
Man nennt die Länge l die Schwingungslänge des physischen Pendels. Trägt man diese Länge von O aus auf der Geraden OS ab, so erhält man mit $OB = l$ einen Punkt B , den man den Schwingungspunkt des physischen Pendels nennt (Fig. 347). Die Achse durch B rechtwinklig zur Bildebene heisst Schwingungsachse. Der Punkt B und jeder Punkt der Achse B in dem physischen Pendel schwingt gerade so, als wäre er ein einzelner, mittels eines gewichtlosen Fadens mit O verbundener Massenpunkt.

Denkt man sich durch S eine zu der Drehachse O parallele Achse gelegt und nennt das entsprechende Trägheitsmoment des Körpers J_s , so ist $J_0 = J_s + Me^2$, mithin

$$7) \quad l = \frac{J_s}{Me} + e.$$

Zeichnet man um S als Mittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser $SO = e$ (Fig. 348) und denkt sich den Körper an einer beliebigen, zur ursprünglichen Achse O parallelen, durch irgend einen Punkt des Kreises gelegten Achse O_1 aufgehängt, so ergibt sich für diese neue Aufhängung die Schwingungslänge nach Gl. 7 von derselben Grösse wie bei der Aufhängung in O . Alle Seiten eines geraden Cylinders, der den genannten Kreis zum Grundkreise hat, sind hiernach Achsen gleicher Schwingungslänge und Schwingungsdauer für den Körper.

Fig. 348.



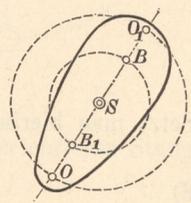
Hängt man den Körper aber an der Schwingungsachse B auf (Fig. 349), so hat man ein physisches Pendel von der Schwingungslänge l_1 , wofür sich nach Gl. 7 ergibt, indem man e mit $l - e$ vertauscht:

$$l_1 = \frac{J_s}{M(l - e)} + (l - e).$$

Weil aber nach Gl. 7 $J_s = Me(l - e)$, so erhält man

$$8) \quad l_1 = \frac{Me(l - e)}{M(l - e)} + l - e = l,$$

Fig. 349.



d. h. das an der Achse B aufgehängte Pendel hat die gleiche Schwingungslänge wie das um die Achse O schwingende. Trägt man $l_1 = l$ von B aus auf BS auf, so erhält man O als Schwingungspunkt und die Achse O (rechtwinklig zur Bildebene) als Schwingungsachse für die Drehachse B . Die Parallelachsen O und B liefern gleiche Schwingungslänge und gleiche Schwingungsdauer, oder sind mit einander vertauschbar. Das Pendel ist bezüglich der Achsen O und B umkehrbar. Ein Kreis um S mit dem Halbmesser SB hat dieselbe Bedeutung wie der Kreis mit dem Halbmesser SO (Fig. 348).

Sämmtliche Achsen, rechtwinklig zur Bildebene, welche durch irgend einen Punkt einer der beiden Kreislinien gelegt werden, sind für den Körper Drehachsen mit übereinstimmender Schwingungslänge l .

Nach Gl. 7 ist die Schwingungslänge l von e abhängig. Fasst man nämlich bei der Vergleichung nur Achsen ins Auge, die zur Bildebene rechtwinklig, d. h. mit der ursprünglichen Drehachse O parallel sind, so ist $J_S : M$ ein konstanter Werth $= i^2$ (wo i der der Achse S entsprechende Trägheitshalbmesser ist). Wird nun e grösser und grösser, verschiebt sich also die Drehachse immer weiter vom Schwerpunkte, so nähert sich der erste Summand der rechten Seite von Gl. 7 mehr und mehr der Null, während der zweite fortwährend zunimmt; daher wird für $e = \infty$ auch $l = \infty$ und $t = \infty$. Geht aber umgekehrt e gegen Null, so wird ebenfalls $l = \infty$ und $t = \infty$, d. h. wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt geht, so ergibt sich, wie auch schon von S. 148 bekannt, kein Drehmoment, so dass auch keine Schwingung zu Stande kommen kann. Es muss daher einen Werth von e geben, für den l ein Minimum wird.

Schreibt man zur bequemeren Übersicht $l = y$, $e = x$, und untersucht

$$9) \quad y = \frac{i^2}{x} + x$$

auf Minimum, so ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{i^2}{x^2} + 1 = 0$ zu setzen. Dies verlangt $x = \pm i$. Eine besondere Untersuchung, ob hierbei ein Maximum oder Minimum vorliege ist nicht erforderlich; denn den für $x = 0$ und $x = \infty$ eintretenden Grösstwerth $y = \infty$ kennen wir bereits.

$$10) \quad x = \pm i$$

oder in der früheren Schreibweise $e = \pm i$, worin es wegen der Bedeutung der beiden Kreise in Fig. 349 nur auf den absoluten Werth $e = i$ ankommt, ergibt die Schwingungslänge

$$l = \frac{i^2}{i} + i = 2i, \text{ also } l - e = 2i - i = i.$$

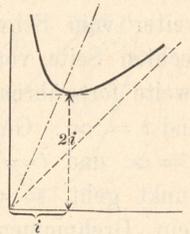
Für eine Drehachse O , welche von S um $i = \sqrt{\frac{J_S}{M}}$ entfernt ist, wird also die Schwingungslänge

$$11) \quad l_{min} = 2i = 2e,$$

womit die beiden Kreise in Fig. 349 zusammenfallen.

Die Darstellung der Gl. 9 ist eine Hyperbel, deren eine Asymptote die Ordinatenachse, während die andere, durch den Anfangspunkt gehend, den rechten Winkel der Koordinatenachsen halbirt. $x = i$ und $y_{min} = 2i$ sind in der Figur angegeben.

Fig. 350.



Bekanntlich werden Pendelversuche benutzt zur Ermittlung der scheinbaren Fallbeschleunigung g an verschiedenen Stellen der Erde; aus $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ wird $g = l \pi^2 : t^2$. Hieraus kann man g berechnen, wenn man für ein Pendel die Schwingungslänge l und die Dauer t einer einfachen Schwingung kennt. Letztere lässt sich durch Zählung der Anzahl der Schwingungen während einer längeren Zeit feststellen. Die Schwingungslänge könnte man wohl nach Gl. 5 S. 279 berechnen, jedoch nicht mit der erforderlichen Genauigkeit für feine Messungen, wie sie zur Ermittlung von g nöthig sind. Denn kein Körper lässt sich so gleichmässig herstellen, dass man J_0 und das statische Moment Me mit grosser Schärfe durch Messung und Rechnung zu bestimmen vermöchte. Wohl aber dient zur scharfen Bestimmung der Schwingungslänge l die Eigenschaft des Pendels, dass Drehachse und Schwingungsachse mit einander vertauschbar sind. Man stellt also ein Pendel her mit fester Schneide (Drehachse) O , berechnet annähernd l , bringt in diesem Abstände $l = OB$ eine Gegenschneide B an und verstellt an dem Körper verschiebbare Gewichte so lange, bis das Pendel, ob in O oder in B aufgehängt, gleiche Schwingungsdauer zeigt. Dann ist, wenn B und O nicht in derselben Entfernung vom Schwerpunkte liegen, wenn also B nicht den Punkt O_1 in Fig. 349 bedeutet, $OB = l$ die Schwingungslänge, die zwischen den Schneiden mit grosser Schärfe gemessen werden kann. Ein solches Pendel heisst ein Umkehrungspendel (Reversionspendel).

Ist der Körper ein dünner prismatischer Stab von der Länge a (Fig. 351) und an seinem oberen Ende aufgehängt, so ist $J_0 = \frac{1}{3} M a^2$, $e = \frac{1}{2} a$, mithin die Schwingungslänge (Gl. 5)

$$12) \quad l = \frac{2}{3} \frac{M a^2}{M a} = \frac{2}{3} a.$$

Die Achsen O , O_1 , B und B_1 liefern gleiche Schwingungslänge.

Die Beobachtung der Schwingungsdauer eines als physisches Pendel eingerichteten Körpers kann auch benutzt werden, um dessen Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse zu bestimmen. Gl. 6 liefert nämlich

$$13) \quad J_0 = M g e t^2 : \pi^2.$$

Hat man (Fig. 352) den Punkt A bestimmt, der in der sicheren Gleichgewichtslage lothrecht unter O liegt, so kann man mittels der Aufhängung des Körpers nach Fig. 352 durch das den Körper im Gleichgewichte haltende Gewicht P das statische Moment $M g e = P a$ finden. Beobachtet man sodann noch t für kleine Schwingungen, so bestimmt sich J_0 nach Gl. 13.

Soll das Trägheitsmoment J_s eines Körpers in Bezug auf eine Schwerpunktsachse bestimmt werden, um welche keine Schwingung entsteht, so lässt man den Körper um eine zeitweilige Achse B schwingen (Fig. 353), bestimmt $J_B = J_0$ nach Gl. 13 und findet daraus $J_s = J_B - M e^2$. Oder, wenn die Befestigung einer besonderen Achse oder Schneide nicht ausführbar, so verbindet man mit dem Körper eine Ergänzungsmasse M_1 derartig, dass sich beide Massen nicht gegen einander verrücken können. M_1 muss so gewählt sein, dass man dessen Beitrag zu J und $M g e$ leicht bestimmen kann. Bringt man M_1 so an, dass es nunmehr mit dem gegebenen

Fig. 351.

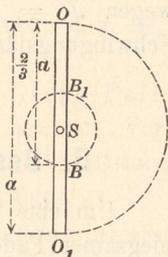


Fig. 352.

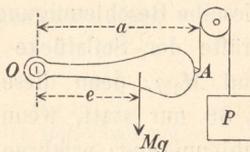
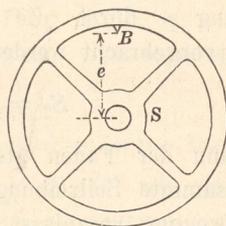


Fig. 353.

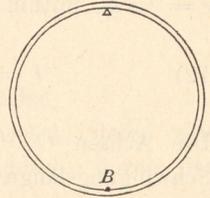


Körper ein mögliches Pendel bildet, so kann man leicht das Gesamt-Trägheitsmoment und daraus das Trägheitsmoment des gegebenen Körpers berechnen.

Ein dünner Ring vom Halbmesser r , nach Fig. 354 um eine Schneide schwingend, hat, wegen $J_s = M r^2$, nach Gleichung 7 die Schwingungslänge

$$l = 2 r.$$

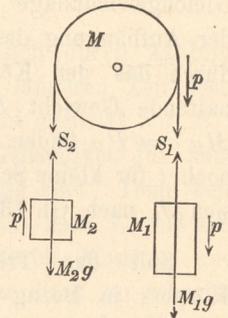
Fig. 354.



5. Beschleunigte Bewegung einer Seilrolle.

Um eine Seilrolle von der Masse M (Fig. 355) sei ein völlig biegsamer Faden geschlungen, an dessen Enden ungleiche Massen M_1 und M_2 hängen. Es soll die Umfangsbeschleunigung p der Rolle berechnet werden ohne Rücksicht auf Zapfenreibung und Seilbiegungswiderstand und unter der Annahme, dass ein Gleiten des Fadens auf der Rolle nicht stattfindet. Die Masse M_1 erfährt die Beschleunigung p abwärts, die Masse M_2 dieselbe Beschleunigung aufwärts. Die Spannkraften der Seilstücke sind nicht etwa $M_1 g$ und $M_2 g$, denn diese Gleichheit findet nach S. 86 nur statt, wenn die Massen keine Beschleunigung erfahren. An der Masse M_1 muss die Mittelkraft $M_1 g - S_1 = M_1 p$, mithin

Fig. 355.



1) $S_1 = M_1 g - M_1 p$, u. zw. $< M_1 g$

sein, weil $M_1 g$ und S_1 zusammen die Beschleunigung p erzeugen. Ebenso muss an der Masse M_2 die aufwärts gerichtete Beschleunigung p durch die aufwärts gerichtete Kraftsumme $S_2 - M_2 g$ hervorgebracht werden; $S_2 - M_2 g = M_2 p$, mithin

2) $S_2 = M_2 g + M_2 p$, u. zw. $> M_2 g$.

Kann der Faden als gewichtlos betrachtet werden, so wird die gesammte Seilreibung, welche die Rolle zu beschleunigter Drehbewegung veranlasst, gemessen durch den Unterschied der Spannkraften S_1 und S_2 , daher wird nach Gl. 4, S. 277, $\mu p = S_1 - S_2$, wenn μ die auf den Umfang bezogene Masse der Rolle ist.

$$\begin{aligned} \text{Also} \quad \mu p &= M_1 g - M_1 p - M_2 g - M_2 p, \\ p (M_1 + M_2 + \mu) &= M_1 g - M_2 g, \quad \text{oder} \\ 3) \quad p &= \frac{M_1 g - M_2 g}{M_1 + M_2 + \mu} = g \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + \mu}. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung erscheint also der Gewichtsunterschied $M_1 g - M_2 g$ als treibende Kraft, als träge Masse aber die Summe aller Massen, die an der Beschleunigung p theilnehmen, d. h. M_1 , M_2 und die auf den Umfang bezogene Masse μ .

Eine Vorrichtung nach Fig. 355 ist die Atwood'sche Fallmaschine; sie dient, da p mit g verhältnissgleich ist, zur Vorführung der Gesetze der Fallbewegung in verkleinertem Mafsstabe, weil die wirkliche Fallbewegung unbequem schnell erfolgt.

Beispiel 1: Ist $Mg = 1$ kg und (nach S. 270) das auf den Umfang bezogene Gewicht der Rolle $\mu g = \frac{1}{2}$ kg, $M_1 g = 4$, $M_2 g = 3,9$ kg, so wird, wenn man in Zähler und Nenner statt der Massen die g mal grösseren Gewichte einführt,

$$p = g \frac{4 - 3,9}{4 + 3,9 + 0,5} = g \cdot \frac{0,1}{8,4} = \frac{g}{84},$$

die Bewegung der angehängten Massen erfolgt daher nur mit $\frac{1}{84}$ der wahren Fallbeschleunigung.

Will man auch die Zapfenreibung mit der Reibungsziffer f und dem Zapfendurchmesser d berücksichtigen, so wird

der Zapfendruck $D = S_1 + S_2 + Mg$; es ist, wie vorher,

$$S_1 = M_1 g - M_1 p$$

$$S_2 = M_2 g + M_2 p \quad \text{und daher}$$

$$D = (M + M_1 + M_2) g - (M_1 - M_2) p$$

mit dem Momente $\frac{1}{2} D f d$. Sonach wird, wenn r der Rollenhalbmesser,

$$\mu p = S_1 - S_2 - D f \frac{d}{2r}$$

$$= M_1 g - M_1 p - M_2 g - M_2 p - (M + M_1 + M_2) g f \frac{d}{2r} + (M_1 - M_2) p f \frac{d}{2r}$$

und daraus

$$4) \quad p = g \frac{M_1 - M_2 - (M + M_1 + M_2) f \frac{d}{2r}}{M_1 + M_2 + \mu - (M_1 - M_2) f \frac{d}{2r}}$$

Mit $d : r = 1 : 25$, $f = 0,08$, $M_1 g = 4$, $M_2 g = 3,9$, $Mg = 1$, $\mu g = 0,5$ kg wird

$$p = g \frac{0,1 - 0,014}{8,4 - 0,00016} \quad \text{oder rund} \quad \frac{g}{100}.$$

Hiernach wird $S_1 = 4(1 - 0,01) = 3,96$ kg, $S_2 = 3,9(1 + 0,01) = 3,94$ kg. Damit kein Gleiten des Fadens entstehe, muss nach S. 233 $\frac{S_1}{S_2} \leq e f_1 \alpha$ sein, worin f_1 die Reibungsziffer des Fadens, $\alpha = \pi$. Dieser Bedingung wird schon für $f_1 \geq 0,0017$ genügt. Der Seilbiegungswiderstand ist hierbei vernachlässigt, da der Faden sehr dünn.

Beispiel 2: Gleiche Massen M_1 mögen an 2 mit einander verbundenen Rollen von ungleichen Halbmessern R und r hängen (Fig. 356); es soll die Umfangsbeschleunigung p der grösseren Rolle berechnet werden; die der kleinen ist dann $pr : R$. — Die Fadenkräfte sind $S_1 = M_1 g - M_1 p$; $S_2 = M_1 g + M_1 pr : R$; die Winkelbeschleunigung der Rolle ohne Rücksicht auf Reibung (nach S. 276)

$$\varepsilon = \frac{S_1 R - S_2 r}{\mu R^2} = \frac{M_1 g R - M_1 p R - M_1 g r - M_1 p \frac{r^2}{R}}{\mu R^2},$$

mithin, weil $R\varepsilon = p$,

$$\mu p = M_1 g - M_1 p - M_1 g \frac{r}{R} - M_1 p \frac{r^2}{R^2},$$

folglich

$$5) \quad p = g \frac{M_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{M_1 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) + \mu}.$$

Für $R = 2r$ wird dann $p = g \frac{1/2 M_1}{5/4 M_1 + \mu}$, wobei zu beachten, dass μ auf den Abstand R bezogen ist.

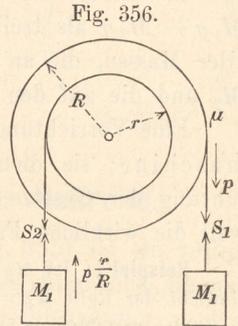


Fig. 356.

Beispiel 3: Hängen die Massen M_1 und M_2 nicht frei herab, sondern gleiten sie mit Reibung auf schiefen Ebenen mit den Neigungswinkeln α_1 u. α_2 (Fig. 357), während an dem Rollenkörper

keine Bewegungswiderstände auftreten, so entsteht an der Masse M_1 eine treibende Kraft

$$M_1 g \sin \alpha_1$$

und eine hindernde Reibung, daher ist

$$S_1 = M_1 g \sin \alpha_1 - f M_1 g \cos \alpha_1 - M_1 p;$$

ebenso ist

$$S_2 = M_2 g \sin \alpha_2 + f M_2 g \cos \alpha_2 + M_2 p \frac{r}{R};$$

wie in Beispiel 2 wird nun $\mu R p = S_1 R - S_2 r$ und demnach

$$6) \quad p = g \frac{M_1 (\sin \alpha_1 - f \cos \alpha_1) - M_2 (\sin \alpha_2 + f \cos \alpha_2) \frac{r}{R}}{M_1 + M_2 \frac{r^2}{R^2} + \mu}.$$

Für $r = R$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$ entsteht Gl. 3; für $M_2 = M_1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$ entsteht Gl. 5.

Für $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 0$, $r = R$ (Fig. 358) ergibt sich

$$7) \quad p = g \frac{M_1 - f M_2}{M_1 + M_2 + \mu}.$$

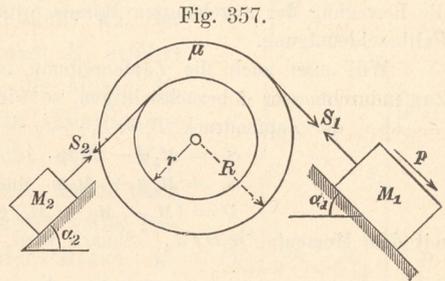


Fig. 357.

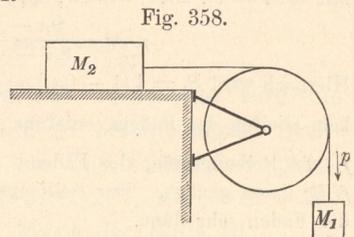


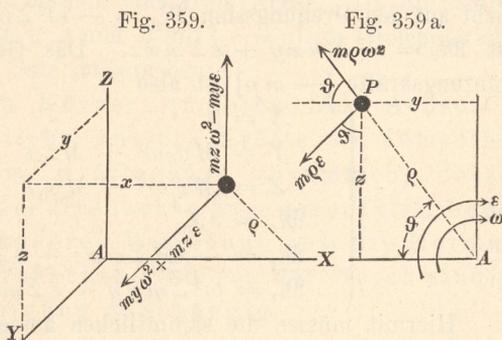
Fig. 358.

6. Widerstände der festen Drehachse eines Körpers bei beschleunigter Drehbewegung.

An der Achse des Körpers mögen an 2 Lagerstellen A und B die Widerstände A und B auftreten, welche die Aufgabe erfüllen, die Achse unbeweglich zu halten. Es mögen an dem Körper bewegendende Kräfte $[K]$ wirken. Sind ω und ε die augenblickliche Winkel-Geschwindigkeit und Beschleunigung, so hat ein Massenpunkt eine daraus zu ermittelnde Beschleunigung p , welcher eine Ergänzungskraft $-mp$ entspricht. Es muss nun nach dem Satze von d'Alembert die Gruppe dieser Kräfte $[-mp]$ im Gleichgewichte sein mit den Widerständen A und B und der Gruppe der sonstigen äusseren Kräfte $[K]$. Hiernach können A und B gefunden werden, wenn man die Kräftegruppe $[-mp]$ kennt.

Zusammensetzung der Ergänzungskräfte $-mp$ bei ungleichmässiger Drehbewegung. Ein Massenpunkt im Abstände ϱ von der Achse (Fig. 359) führt eine Kreisbewegung aus. Seine Tangentialbeschleunigung ist $p_t = \varrho\varepsilon$, seine Centripetalbeschleunigung $p_n = \varrho\omega^2$ (S. 88). Die ent-

sprechenden Ergänzungskräfte sind die Kraft $m\varrho\varepsilon$ (links herum) und die Centrifugalkraft $m\varrho\omega^2$. Die Drehachse wählen wir zur x -Achse; A sei der Anfangspunkt des Achsenkreuzes (Fig. 359). In einer besonderen Figur



(359 a) sei der Körper in der Richtung der Drehachse, also auf die yz -Ebene projiziert, weil die Beschleunigungen p_t und p_n und ebenso die entsprechenden Kräfte in dieser Projektion am deutlichsten erscheinen. Bildet der Halbmesser $\varrho = AP$ mit der AY den Winkel ϑ , so ist

$$\varrho \cos \vartheta = y; \quad \varrho \sin \vartheta = z.$$

Die Kraft $m\varrho\omega^2$ liefert in der positiven y -Richtung die Seitenkraft $m\varrho\omega^2 \cos \vartheta = m y \omega^2$, in der positiven z -Richtung die Seitenkraft $m\varrho\omega^2 \sin \vartheta = m z \omega^2$. Ebenso giebt die Kraft $m\varrho\varepsilon$ die ent-

sprechenden Seitenkräfte $m \varrho \varepsilon \sin \vartheta = m z \varepsilon$ bzw. $- m \varrho \varepsilon \cos \vartheta = - m y \varepsilon$.

Diese Seitenkräfte sind in Fig. 359 eingetragen. Denkt man sich solche Kräfte für jeden einzelnen Massenpunkt angebracht und setzt diese Kräftegruppe nach S. 112 zusammen, so erhält man \mathfrak{B} durch den Punkt A gehende Seitenkräfte X, Y, Z und \mathfrak{B} Kräftepaar-Achsen $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$. In der x -Richtung ergeben sich keine Seitenkräfte. In der positiven y -Richtung entsteht $Y = \Sigma m y \omega^2 + \Sigma m z \varepsilon$, oder, weil ω und ε für alle Punkte dieselben Werthe haben und ausserdem $\Sigma m y = M y_0$, $\Sigma m z = M z_0$ (mit y_0 und z_0 als Koordinaten des Schwerpunktes),

$$Y = M y_0 \omega^2 + M z_0 \varepsilon.$$

In gleicher Weise wird $Z = M z_0 \omega^2 - M y_0 \varepsilon$. Zur Ermittlung der Kräftepaar-Achse \mathfrak{M}_x gehen wir am einfachsten auf die ursprünglichen Kräfte $m \varrho \omega^2$ und $m \varrho \varepsilon$ zurück, da $m \varrho \omega^2$ in Bezug auf AX kein Moment hat, $m \varrho \varepsilon$ aber das Moment $- m \varrho \varepsilon \varrho$, sodass $\mathfrak{M}_x = - \varepsilon \Sigma m \varrho^2 = - \varepsilon J_x$, was nach Gl. 2, S. 276 selbstverständlich war. Die in der z -Richtung wirkenden Kräfte gehen an der AY in einem Abstände x vorbei, liefern daher mit Rücksicht auf den Drehungssinn $\mathfrak{M}_y = - \omega^2 \Sigma m a x z + \varepsilon \Sigma m a x y$; ebenso ist $\mathfrak{M}_z = \omega^2 \Sigma m a x y + \varepsilon \Sigma m a x z$. Das Gesamtergebnis der Ergänzungskräfte $[- m p]$ ist also

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = M y_0 \omega^2 + M z_0 \varepsilon \\ Z = M z_0 \omega^2 - M y_0 \varepsilon \\ \mathfrak{M}_x = \varepsilon J_x \\ \mathfrak{M}_y = - \omega^2 \Sigma m a x z + \varepsilon \Sigma m a x y \\ \mathfrak{M}_z = \omega^2 \Sigma m a x y + \varepsilon \Sigma m a x z. \end{array} \right.$$

Hiermit müssen die sämtlichen äusseren Kräfte $[K]$ und die Widerstände A und B im Gleichgewichte sein. In den vorstehenden Gleichungen erscheinen Summenausdrücke $\Sigma m a x y$ und $\Sigma m a x z$; um sie zu erhalten, muss man jedes Massentheilchen m mit zweien seiner Koordinaten $x y$ bzw. $x z$ multipliciren und die Glieder dann summiren. Diese Ausdrücke sind von demselben Grade, derselben Dimension wie die Trägheitsmomente $J = \Sigma m \varrho^2$ und heissen **Centrifugalmomente** = C . Wir wollen $\Sigma m a x y$ und $\Sigma m a x z$ von einander unterscheiden, indem wir neben C als Zeiger diejenige Ordinate setzen, welche in den Summen nicht vorkommt, mithin

$$2) \quad \Sigma m a x y = C_z; \quad \Sigma m a x z = C_y.$$

Im Allgemeinen sind die Ergänzungskräfte von ω und ε abhängig, so dass auch die Widerstände der festen Achse sich mit ω und ε ändern. Geht aber die Drehachse durch den Schwerpunkt, so dass $y_0 = z_0 = 0$, und sind ausserdem die Centrifugalmomente C_y und C_z gleich Null, so werden ausser $X = 0$ auch $Y = Z = \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_z = 0$, und es bilden die Kräfte $[-mp]$ nur ein \mathfrak{M}_x . Aus den Gl. 1 verschwinden dann, abgesehen von $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon J_x$, sämtliche von ω und ε abhängigen Glieder, so dass die Widerstände A und B der festen Achse sich ebenso berechnen lassen wie für den ruhenden Körper. Bilden unter dieser Voraussetzung die bewegenden Kräfte $[K]$ ein Kräftepaar \mathfrak{M} , dessen Achsenstrecke (S. 109) die Richtung AX hat, so ist dies mit dem berechneten $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon J_x$ im Gleichgewichte. Weil die Normalwiderstände der Achse zu dem treibenden Momente nichts beitragen, die Kräfte $[-mp]$ sich aber in jeder anderen Beziehung aufheben, so müssen in diesem Falle die Widerstände A und B der festen Achse verschwinden. Die Achse bedarf dann gar keiner Befestigung, der Körper führt seine Drehung um die unbefestigte Achse so aus, als wäre sie fest. Eine solche Achse nennt man deshalb eine **freie Achse**. Da die sämtlichen äusseren Kräfte $[K]$, A und B mit $[-mp]$ im Gleichgewichte sind, so kann man den Satz aussprechen:

Dreht sich ein Körper um eine **freie Achse**, so setzen sich sämtliche äussere Kräfte an demselben lediglich zu einem Kräftepaare zusammen, dessen Achsenstrecke mit der Drehachse zusammenfällt, heben sich aber in jeder anderen Beziehung auf; die Normalwiderstände der Drehachse sind von der Geschwindigkeit und Beschleunigung unabhängig.

Ist die Drehung eine gleichförmige ($\varepsilon = 0$), so bestehen die Kräfte $[-mp]$ nur in den Centrifugalkräften, deren Zusammensetzung liefert

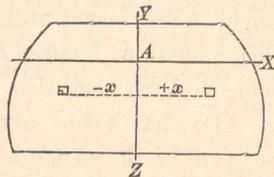
$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = M y_0 \omega^2 \\ Z = M z_0 \omega^2 \\ \mathfrak{M}_x = 0 \\ \mathfrak{M}_y = -\omega^2 C_y \\ \mathfrak{M}_z = \omega^2 C_z. \end{array} \right.$$

Hiermit müssen wieder die äusseren Kräfte im Gleichgewichte sein. Weil nun zur Zusammensetzung der Centrifugalkräfte die Summen C nöthig sind, so erhielten sie den Namen „Centrifugalmoment“.

Ist einem Körper eine Drehbewegung um eine feste Achse ertheilt und setzt er diese ohne weitere Einwirkung von Kräften K fort, so müssen die Widerstände A und B mit den Kräften der Gl. 3 im Gleichgewichte sein. Diese Widerstände sind durch die Winkelgeschwindigkeit bedingt und verschwinden mit dieser. Ist aber die Drehachse eine freie Achse, so heben sich die Centrifugalkräfte vollständig auf, und es werden auch keine Achswiderstände nöthig; die Drehung setzt sich um die unbefestigte Achse fort, als wäre dieselbe festgehalten. Man kann daher sagen, eine freie Achse für einen Körper ist eine solche, in Bezug auf welche die Centrifugalkräfte sich aufheben.

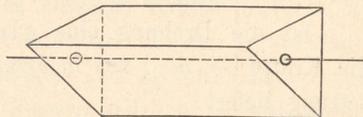
Einige Bedingungen für eine freie Achse. Die Centrifugalmomente C_y und C_z werden gleich Null, wenn der Körper rechtwinklig zur Drehachse AX eine Symmetrie-Ebene hat; wählt man diese nämlich zur yz -Ebene (Fig. 360), so entspricht jedem Massentheilchen mit positivem x ein gleiches mit negativem x , so dass in $\sum mxy$ und $\sum mxz$ stets je zwei gleiche sich aufhebende Glieder $+mxy$ und $-mxy$ bzw. $+mxz$ und $-mxz$

Fig. 360.



vorkommen. Geht ausserdem noch die Drehachse durch den Schwerpunkt, so ist AX eine freie Achse. Hiernach ist für einen gleichartigen Körper von der Form eines geraden Prismas oder Cylinders die Verbindungsgerade der Schwerpunkte der Endflächen (Fig. 361) eine freie Achse.

Fig. 361.



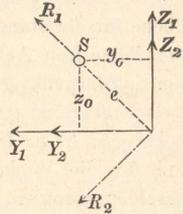
Ferner ist AX eine freie Achse, wenn man durch sie zwei rechtwinklig zu einander stehende Symmetrie-Ebenen legen kann. Wählt man diese nämlich zur xy -Ebene und xz -Ebene, so liegen je zwei Massentheilchen mit $+y$ und mit $-y$ einander gegenüber, deren eines den Beitrag $+mxy$, deren anderes den Beitrag $-mxy$ liefert, so dass $C_z = 0$ wird; ebenso $C_y = 0$.

Eingehendere Rechnungen zeigen, dass jeder noch so unregelmässige Körper mindestens drei zu einander rechtwinklige freie Achsen hat.

Andere Arten der Zusammensetzung der Ergänzungskräfte.

Trennt man in Gl. 1 die durch den Anfangspunkt A gehenden Kräfte Y und Z in diejenigen Theile $Y_1 = My_0\omega^2$ und $Y_2 = Mz_0\varepsilon$ bzw. $Z_1 = Mz_0\omega^2$ und $Z_2 = -My_0\varepsilon$, welche allein von ω , bzw. von ε abhängen (Fig. 362), so lassen sich nunmehr Y_1 und Z_1 wieder zusammensetzen zu einer Mittelkraft

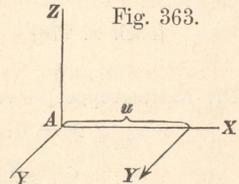
Fig. 362.



$$R_1 = M\omega^2\sqrt{y_0^2 + z_0^2} = M\omega^2 e,$$

wenn e die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse bedeutet. Diese Kraft ist parallel mit der Richtung jenes rechtwinkligen Abstandes e . Y_2 und Z_2 geben in gleicher Weise eine Mittelkraft $R_2 = M\varepsilon e$, die zu R_1 rechtwinklig ist und, dem Sinne nach, der Umfangsbeschleunigung des Schwerpunktes entgegengesetzt ist.

Fig. 363.

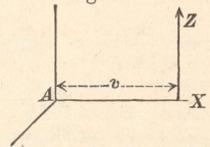


Vereinigt man die Kraft Y der Gl. 1 mit der Kräftepaarachse \mathfrak{M}_x , so ergibt sich aus beiden eine Kraft von derselben Grösse $Y = My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon$, welche von A aus um

5)
$$u = \frac{\mathfrak{M}_x}{Y} = \frac{\omega^2 C_x + \varepsilon C_y}{My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon}$$

im Sinne der positiven x -Richtung parallel verschoben ist (Fig. 363).

Fig. 364.



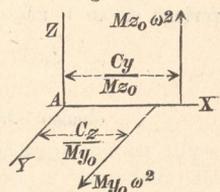
Vereinigt man ebenso Z mit \mathfrak{M}_y , so erhält man eine gleiche Kraft

6)
$$Z = Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon,$$
 welche um

7)
$$v = \frac{-\mathfrak{M}_y}{Z} = \frac{\omega^2 C_y - \varepsilon C_z}{Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon}$$

im Sinne der positiven x -Richtung parallel verschoben ist (Fig. 364). Auf diese beiden im Raume sich rechtwinklig kreuzenden Kräfte ist mithin die Gruppe $[-mp]$ auch zurückzuführen.

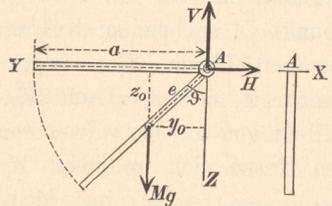
Fig. 365.



Im Falle der gleichförmigen Drehung ($\varepsilon = 0$) vereinfachen sich diese Ergebnisse in der Weise der Fig. 365.

Beispiel 1: Eine als materielle Gerade aufzufassende Stange von der Länge a schwinde unter Einwirkung der Schwere um eine durch den Endpunkt gelegte wagerechte Achse (Fig. 366). Die Bewegung möge von der wagerechten Lage ausgegangen sein. Hier liegt ein Fall vor, wo C_y und C_z Null sind, weil AYZ eine Symmetrie-Ebene für die Stange ist. Die Drehachse ist aber keine freie Achse, weil sie nicht durch den Schwerpunkt geht. In einer beliebigen Zwischenlage ist $y_0 = e \sin \vartheta$; $z_0 = e \cos \vartheta$, wobei $e = 1/2 a$; ferner ist $J_x = 1/3 M a^2$; und für die Winkelgeschwindigkeit ω und Beschleunigung ε in der beliebigen Zwischenlage gelten:

Fig. 366.



(nach S. 267) $\frac{1}{2} J_x \omega^2 = M g z_0,$

$$\omega^2 = \frac{2 M g z_0}{J_x} = \frac{3 g \cos \vartheta}{a};$$

(nach S. 276) $\varepsilon = \frac{M g e \sin \vartheta}{J_x} = \frac{3}{2} \frac{g \sin \vartheta}{a}.$

Die Kräftegruppe $[-m_p]$ liefert hiernach (Gl. 1, S. 288)

$$X = 0;$$

$$Y = \frac{M a}{2} \sin \vartheta \frac{3 g \cos \vartheta}{a} + \frac{M a}{2} \cos \vartheta \frac{3}{2} \frac{g \sin \vartheta}{a}$$

$$= \frac{9}{4} M g \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{9}{8} M g \sin 2 \vartheta;$$

$$Z = \frac{M a}{2} \cos \vartheta \frac{3 g \cos \vartheta}{a} - \frac{M a}{2} \sin \vartheta \frac{3}{2} \frac{g \sin \vartheta}{a}$$

$$= \frac{M g}{2} (3 - 3 \sin^2 \vartheta - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta) = \frac{M g}{8} (3 + 9 \cos 2 \vartheta);$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{1}{2} M g a \sin \vartheta;$$

$$\mathfrak{M}_y = 0; \quad \mathfrak{M}_z = 0.$$

Mit diesen Kräften müssen die Schwerkraft Mg und die Widerstände der Drehachse im Gleichgewichte sein. Letztere brauchen in diesem Falle, weil \mathfrak{M}_y und $\mathfrak{M}_z = 0$ sind, nur in dem Punkte A der Achse anzugreifen; man zerlege sie in V und H . Dann muss

$$H = Y = \frac{9}{8} M g \sin 2 \vartheta \text{ sein}$$

ebenso $Mg - V = -Z = -\frac{1}{8} M g (3 + 9 \cos 2 \vartheta),$

d. h. $V = \frac{1}{8} M g (11 + 9 \cos 2 \vartheta).$

Der wagerechte Achsenwiderstand H ist für $\vartheta = 90^\circ$, d. h. in der Anfangslage gleich Null, ebenso in der tiefsten Lage für $\vartheta = 0$; am grössten wird er für $\vartheta = 45^\circ$, nämlich $H_{max} = \frac{9}{8} M g.$

Der lothrechte Widerstand ist

$$\text{für } \vartheta = 90^\circ: V = \frac{1}{4} Mg,$$

$$\text{für } \vartheta = 45^\circ: V = \frac{11}{8} Mg,$$

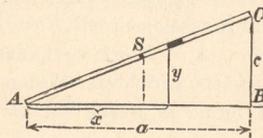
$$\text{für } \vartheta = 0: V_{max} = \frac{5}{2} Mg.$$

Diese Grösstwerthe von H und V sind im Verhältnisse zum Gewicht Mg des Stabes erheblich. Die Kraft H wirkt abwechselnd bald nach links, bald nach rechts, je nach der Lage des schwingenden Körpers. — Von besonderer Wichtigkeit sind diese Kräfte, wenn der schwingende Körper eine schwere Glocke ist. Die Achswiderstände H und V müssen dann von dem sog. Glockenstuhle ausgeübt werden. Der fortwährende Wechsel des Sinnes der Kraft H ist für den Thurm besonders gefährlich. Der Rechnungsgang ist im Wesentlichen derselbe wie in dem vorliegenden Falle. — Wurde die Stange in der Anfangslage ($\vartheta = 90^\circ$) am linksseitigen Ende etwa unterstützt, so war im Ruhezustande $V = \frac{1}{2} Mg$; durch plötzliches Loslassen des Endes verändert sich V auf $\frac{1}{4} Mg$. — Weitere Beispiele sollen sich auf gleichförmige Drehung beziehen.

Beispiel 2: Eine materielle Gerade AC (Fig. 367) drehe sich gleichförmig um eine Achse AB ; der Punkt A sei unmittelbar, der Punkt C mittels einer gewichtlosen Stange c mit der Achse verbunden.

Die Projektionen der Stange seien a und c . Da der Körper ein ebenes Gebilde, so lege man ACB in die xy -Ebene, dann ist $y_0 = \frac{1}{2} c$; $z_0 = 0$; ferner wird $\Sigma mxz = C_y = 0$, weil sämtliche z -Werthe Null sind. Die Zusammensetzung der sämtlichen Centrifugalkräfte beschränkt sich daher nach Fig. 365 auf eine Einzel-

Fig. 367.



kraft $Y = My_0 \omega^2 = \frac{1}{2} Mc \omega^2$, im Abstände $u = \frac{C_z}{My_0}$ rechts von A liegend.

Ein Massentheilchen von der Länge ds hat die Masse $m = \frac{\gamma}{g} F ds$, wenn F der Querschnitt des Stabes, γ die Dichte. Man kann aber bei der Berechnung von u die selbstverständlichen Faktoren $F\gamma : g$ fortlassen, wenn man $m = ds$ und ebenso $M = s =$ der Länge der Stange setzt. Das Theilchen liefert zu C_z den Beitrag $dsxy$, was wegen $y = xc : a$ und $ds = dx \cdot s : a$ geschrieben werden kann:

$$mxy = \frac{sc}{a^2} x^2 dx.$$

$$\text{Daraus folgt } C_z = \Sigma mxy = \frac{sc}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} sca.$$

Weil nun nach Obigem $My_0 = \frac{1}{2} cs$, so wird $u = \frac{2}{3} a$.

Derartig einfache Fälle kann man auch leicht ohne Anwendung der allgemeinen Formeln unmittelbar behandeln. Dem Theilchen ds entspricht die Centrifugalkraft $dsy\omega^2$. Die Mittelkraft R der Centrifugalkräfte ist die Summe der gleichgerichteten Kräfte $[dsy\omega^2]$, mithin

$$R = \omega^2 \int dsy = \omega^2 sy_0 = \omega^2 s \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} M \omega^2 c.$$

Nach dem Satze der Momente wird dann in Bezug auf A :

$$R u = \omega^2 \int ds x y = \omega^2 s \frac{c}{a^2} \int_0^a x^2 dx,$$

d. h. $\frac{1}{2} s c \omega^2 u = \frac{1}{3} \omega^2 s c a$, wonach $u = \frac{2}{3} a$.

Dass die Kraft $\frac{1}{2} M \omega^2 c$ durch den Schwerpunkt des Dreiecks ABC (Fig. 368) geht, folgt auch daraus, dass man die Theilkraft $ds y \omega^2$ schreiben kann

$$= \omega^2 \frac{s}{a} y dx,$$

d. h. proportional dem Flächenstreifen $y dx$ des Dreiecks.

Wirken nun auf die Stange keine bewegenden Kräfte $[K]$, so müssen die etwa in A und B angreifenden Achsenwiderstände mit R im Gleichgewichte sein. Daher wird

$$A = \frac{1}{3} R = \frac{1}{6} M \omega^2 c; \quad B = \frac{2}{3} R = \frac{1}{3} M \omega^2 c.$$

Steht die Drehachse AB lothrecht und wirkt die Schwere auf die sich drehende Stange (Fig. 369), so müssen die Schwere Mg und die Widerstände A und B zusammen mit $R = \frac{1}{2} M \omega^2 c$ im Gleichgewichte sein. $X = 0$ erfordert, dass etwa in A ein lothrecht aufwärts gerichteter Widerstand $A_x = Mg$ wirke. Es ist ferner in Bezug auf B :

$$0 = -\frac{1}{2} M \omega^2 c \frac{a}{3} + A_y a - Mg \frac{c}{2},$$

d. h. $A_y = Mg \frac{c}{2a} + \frac{M c \omega^2}{6} = \frac{M g c}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{\omega^2}{3g} \right)$

und ebenso $B_y = \frac{M g c}{2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{3} \frac{\omega^2}{g} \right)$.

Es wird der Widerstand $B_y = 0$ für $\omega^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{a}$;

unter dieser Bedingung bewegt sich die Stange als ein physisches Kegelpendel; d. h. nicht durch einen Stab BC , sondern nur in Folge der Drehung wird der Winkel α unverändert erhalten. Für das

mathematische Kegelpendel (S. 69) war $\omega^2 = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{c} = \frac{g c}{a c} = \frac{g}{a}$.

Beispiel 3: Der sich gleichförmig um die Achse AB drehende Körper sei eine materielle Dreieckfläche ABC (Fig. 370). Dann ist, wenn man die Masse der Flächeneinheit = 1 setzt, $M = \frac{1}{2} a c$, $y_0 = \frac{1}{3} c$, mithin die gesammte Centrifugalkraft $R = \frac{1}{3} M c \omega^2$ im Abstände u von A . Um

$C_z = \Sigma m x y$ zu bestimmen, bedenke man, dass $C_z = \int dx dy x y$. Alle

Fig. 368.

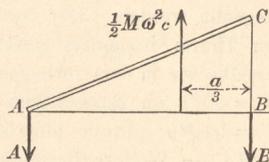


Fig. 369.

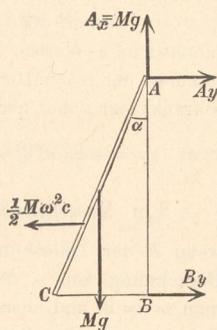
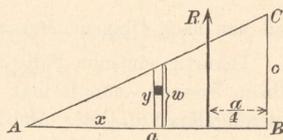


Fig. 370.



Theilchen eines lothrechten Flächenstreifens haben übereinstimmendes x und dx , liefern daher zu C_z den Beitrag $x dx \int_0^w y dy$, $= x dx \frac{1}{2} w^2$, wenn w die Höhe des Streifens; darin ist $w = cx : a$, also wird

$$C_z = \frac{1}{2} \frac{c^2}{a^2} \int_0^a x^3 dx = \frac{1}{8} c^2 a^2 = \frac{1}{4} M a c.$$

Mithin nach Fig. 365 $u = \frac{C_z}{M y_0} = \frac{1/4 M a c}{1/3 M c} = 3/4 a$.

Die entsprechenden Achsenwiderstände werden dann

$$A = 1/4 R = 1/12 M c \omega^2 \quad \text{und} \\ B = 3/4 R = 1/4 M c \omega^2.$$

Stellen wir wiederum die Drehachse lothrecht (Fig. 371) und lassen die Schwere wirken, so sind in A und B die wagerechten Widerstände A_y und B_y nöthig, für welche gilt:

$$1/4 a R = A_y a - M g \frac{1}{3} c,$$

mithin $A_y = 1/4 R + 1/3 M g \frac{c}{a}$ und ebenso $B_y = 3/4 R - 1/3 M g \frac{c}{a}$.

Wiederum wird die Befestigung bei B unnöthig, wenn

$$3/4 R = 1/4 M c \omega^2 = 1/3 M g \frac{c}{a}, \quad \text{d. h. für } \omega^2 = \frac{4}{3} \frac{g}{a}.$$

7. Gleichzeitige Verschiebung und Drehung eines Körpers.

a) Arbeitsvermögen.

Ein Körper drehe sich um eine Schwerpunktsachse, die zur x -Achse gewählt werden möge, mit der Winkelgeschwindigkeit ω ; zugleich werde die Achse mit einer der xz -Ebene parallelen Geschwindigkeit u parallel verschoben, und zwar möge u mit der x -Richtung den Winkel α bilden (Fig. 372). Dann setzt sich die gesammte Geschwindigkeit v eines Punktes der Koordinaten x, y, z im Abstände ρ von der Achse aus den Einzelgeschwindigkeiten u und $\rho\omega$ zusammen.

Fig. 372.

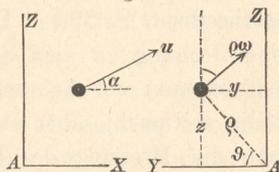


Fig. 372 stellt das Achsenkreuz in zwei Projektionen dar. Bildet ρ mit der $A Y$ den Winkel ϑ , so ist $\rho \cos \vartheta = y$, $\rho \sin \vartheta = z$; somit zerlegt sich $\rho \omega$ in $-z\omega$ und $y\omega$. Die Seitengeschwindigkeiten eines Punktes nach den Achsenrichtungen werden dann

$$v_x = u \cos \alpha; \quad v_y = -z\omega; \quad v_z = y\omega + u \sin \alpha.$$

Daher wird

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 \cos^2 \alpha + z^2 \omega^2 + y^2 \omega^2 + 2y\omega u \sin \alpha + u^2 \sin^2 \alpha \\ &= u^2 + \varrho^2 \omega^2 + 2y\omega u \sin \alpha. \end{aligned}$$

Das Arbeitsvermögen des Körpers ergibt sich dann zu

$$\Sigma(1/2 m v^2) = 1/2 M u^2 + 1/2 \omega^2 \Sigma m \varrho^2 + 2 \omega u \sin \alpha \Sigma m y,$$

weil u , ω und α für alle Theile des Körpers dieselben. Da aber die Ebene AXZ den Schwerpunkt enthält, so ist $\Sigma m y = 0$, mithin das Arbeitsvermögen

$$1/2 M u^2 + 1/2 J \omega^2,$$

wenn J das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse. Das Arbeitsvermögen setzt sich hiernach aus zwei Theilen zusammen, deren einer das Arbeitsvermögen wegen der Verschiebung, deren anderer dasjenige wegen der Drehung bedeutet.

b) Bewegung eines freien Körpers.

Wirken an einem freien starren Körper beliebige äussere Kräfte $K_1, K_2, K_3 \dots$, so füge man im Schwerpunkte S des Körpers je zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K hinzu. Dann lassen sich im Schwerpunkte die den gegebenen gleichgesinnten Kräfte K zu einer Mittelkraft R vereinigen, während jede gegebene Kraft K mit der entgegengesetzt hinzugefügten ein Kräftepaar bildet, deren Achsenstrecken ein Gesamtmoment \mathfrak{M} (S. 112) liefern. Der Schwerpunkt S bewegt sich nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes nur unter Einwirkung der Kraft R mit der Beschleunigung $p_0 = R : M$. (Wäre etwa R unveränderlich nach Grösse und Richtung, so würde der Schwerpunkt eine Parabel beschreiben, S. 59.) Das Achsenmoment \mathfrak{M} bewirkt aber noch eine Drehung um den Schwerpunkt. Denkt man sich nun mit dem Schwerpunkt ein Achsenkreuz verbunden, welches dessen Bewegung völlig mitmacht, aber stets der Anfangslage parallel bleibt, so kann man die Drehung des Körpers auffassen als scheinbare Bewegung gegen dieses, mit der Beschleunigung p_0 sich verschiebende Achsenkreuz. Diese Bewegung kann dann betrachtet werden wie eine Drehung um den festliegenden Schwerpunkt, wenn man an allen Punkten des Körpers die entsprechenden Ergänzungskräfte $[-m p_0]$ anbringt. Weil diese sich gleichmässig über die ganze Masse vertheilen, so liefern sie eine Mittelkraft $-M p_0$, die durch den

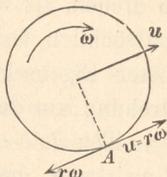
Schwerpunkt geht, daher auf die Drehung um ihn keinen Einfluss haben kann. Die Drehung geschieht also gerade so, als ruhte der Schwerpunkt.

Ist nun die durch den Schwerpunkt gelegte Achsenstrecke des Gesamt-Kräftepaars \mathfrak{M} eine freie Achse und hat der Körper anfänglich keine Drehung um eine andere Achse, so wird die Drehachse ihre Richtung im Raume und im Körper nicht ändern, und der Körper wird sich um diese Achse des Gesamt-Kräftepaars \mathfrak{M} gerade so drehen, als wäre sie eine festgehaltene Achse. Denn hielte man sie thatsächlich fest, so würden die Widerstände des Festhaltens wegen dieser Eigenschaft der freien Achse (S. 289) zu Null werden. Die Drehung um diese Achse erfolgt dann mit der Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \mathfrak{M} : J$. — Dies trifft zu für eine gleichartige Kugel unter Einwirkung beliebiger aber gleichbleibender Kräfte, wenn sie zu Anfang keine Drehbewegung um eine andere Achse als die Achse des Gesamtmomentes \mathfrak{M} hatte. Der Schwerpunkt beschreibt eine Parabel; die Achse \mathfrak{M} verschiebt sich mit dem Schwerpunkte und bildet, weil jeder Durchmesser eine freie Achse, fortwährend die Drehachse für den Körper. — Ist aber die Achse \mathfrak{M} durch den Schwerpunkt keine freie Achse, oder ist zu Anfang schon eine Drehung um eine andere Achse vorhanden, so ändert die Achse, um welche die Drehung geschieht, fortwährend ihre Richtung im Körper und im Raume; es entsteht neben der Bewegung des Schwerpunktes, die hierdurch nicht berührt wird, im Allgemeinen eine unregelmässig wirbelnde Bewegung um den Schwerpunkt, die so verwickelt ist, dass sie an dieser Stelle nicht weiter behandelt werden kann; man kann solche Bewegung beobachten, wenn man einen Stab so fortwirft, dass er eine Drehung um eine schief zu ihm liegende Achse mit auf den Weg bekommt. Wird ein Stab (Speer oder Ger) in der Mitte erfasst und in wagerechter Lage so fortgeworfen, dass er keine Drehung auf den Weg bekommt, so beschreibt sein Schwerpunkt — abgesehen von der Wirkung des Luftwiderstandes — eine Wurfparabel; die Stange erfährt, weil $\mathfrak{M} = 0$, keine Drehung, sondern bleibt immer ihrer Anfangslage parallel, stellt sich aber nicht etwa tangential zur Wurflinie. Anders ist es mit einem gespitzten und gefiederten Pfeile; dieser wird durch den Luftwiderstand stets so gedreht, dass seine Längsrichtung ziemlich tangential zur Wurflinie sich stellt.

c) Rollbewegung auf schiefer Ebene. Fuhrwerke.

Bewegung ohne Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Hat ein Umdrehungskörper eine Winkelgeschwindigkeit ω rechts herum um seine geometrische Achse und wird er gleichzeitig rechtwinklig zur Achse mit der Geschwindigkeit $u = r\omega$ nach rechts verschoben, so setzen sich die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte eines Kreises vom Halbmesser r aus den Einzelgeschwindigkeiten $r\omega$ rechtwinklig zum Drehungshalbmesser und $u = r\omega$ zusammen. An dem Punkte A (Fig. 373) ist dann die Gesamtgeschwindigkeit $v = 0$. Bringt man den Körper an dieser Stelle mit einer Ebene in Berührung, welche mit u und der geometrischen Achse des Körpers parallel ist, so wird der Umdrehungskörper sich gegen diese Ebene in der Art bewegen, dass die Berührungsstelle fortwährend wechselt, dass an der Berührungsstelle aber stets die relative Gleitgeschwindigkeit Null ist. Eine solche Bewegung nennt man eine **Rollbewegung**. Andere, ebenfalls aus Drehung und Verschiebung zusammengesetzte Bewegungen, bei denen aber die Bedingung $r\omega = u$ nicht erfüllt ist, erscheinen äusserlich ebenfalls wie Rollbewegungen, sind es aber nicht, sondern sind, weil an der Berührungsstelle die relative Gleitgeschwindigkeit nicht gleich Null, Gleitbewegungen sich drehender Körper auf einer Ebene. Für die Kräfte und damit auch für die Gesetze der Bewegung ist es von massgebender Bedeutung, ob die Gleitgeschwindigkeit an der Berührungsstelle Null ist, oder nicht. Im ersteren Falle kommt nämlich die Reibung im Allgemeinen mit einem Betrage $T \leq fN$ zur Wirkung, während, wenn u nur im Geringsten von $r\omega$ abweicht, der volle Betrag der Reibung wirksam wird.

Fig. 373.



An dieser Stelle behandeln wir die reine Rollbewegung und werden die Gleitbewegung S. 304 besprechen.

Das Arbeitsvermögen der Rollbewegung ist nach S. 296 $\frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}\omega^2 J$, oder, wenn u die auf den Halbmesser des Rollkreises r bezogene Masse (wegen $r\omega = u$):

$$1) \quad \frac{1}{2}(M + \mu)u^2.$$

Wird ein Umdrehungskörper (Cylinder, Reif oder Kugel) mit der Geschwindigkeit Null auf eine schiefe Ebene gesetzt und lediglich

der Einwirkung der Schwere Mg und des Normalwiderstandes N der Ebene überlassen, so würde er unter Annahme völliger Glätte nicht in Drehung gerathen können, weil Mg und N beide durch den Schwerpunkt gehen; es würde der Körper also eine beschleunigte, rein fortschreitende Gleitbewegung ausführen. In Wirklichkeit setzt sich ein Reibungswiderstand T dem Gleiten entgegen, und wenn dieser in der erforderlichen Grösse zur Wirkung gelangen kann, so wird er das Gleiten verhindern und eine Rollbewegung erzeugen. Unter welchen Bedingungen dies geschieht, bleibt noch zu untersuchen. Daher setzen wir zunächst voraus, dass eine vollkommene Rollbewegung stattfindet, welche entweder durch Reibung erzeugt, oder durch einen um den Rollkreis geschlungenen, von A aus auf der Ebene nach oben hin gerade gestreckten und an ihr befestigten Faden, oder endlich durch eine Verzahnung von Rollkreis und Bahn erzwungen werde. Dann wird durch eines dieser Mittel die für das Rollen erforderliche Umfangskraft T geliefert.

Beginnt die Rollbewegung mit der Geschwindigkeit Null und ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, nachdem dieser um h gesunken, v geworden, so ist die Zunahme an Arbeitsvermögen $\frac{1}{2}(M + \mu)v^2$. Arbeit wird nur von der Schwere im Betrage Mgh verrichtet, denn N und T greifen an der Berührungsstelle A an, deren Geschwindigkeit Null ist. Hiernach muss

$$\frac{1}{2}(M + \mu)v^2 = Mgh \text{ sein, oder}$$

$$2) \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\mu}{M}}}$$

Will man die Bewegung in ihren Einzelheiten kennen lernen, so muss man die Beschleunigungen beider Einzelbewegungen berechnen. Zerlegt man Mg in $Mg \sin \alpha$ und $Mg \cos \alpha$, so muss

$$3) \quad N = Mg \cos \alpha$$

sein, weil der Schwerpunkt sich geradlinig bewegt, d. h. keine Centripetalbeschleunigung erfährt. Die Beschleunigung p des Schwerpunktes erhält man nach S. 142, indem man T an den Schwerpunkt

Fig. 374.

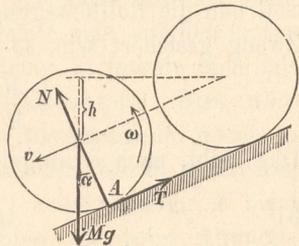
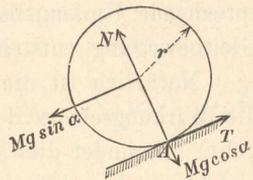


Fig. 375.



verschoben denkt, mithin ist $Mp = Mg \sin a - T$. Weil T noch unbekannt, ist eine zweite Gleichung erforderlich. Da in jedem Augenblicke $v = r\omega$, so muss das gleiche Verhältnis auch für die Beschleunigungen gelten, d. h. $r\varepsilon = p$. Weil nun die Umfangsbeschleunigung $r\varepsilon = p$ von T herrührt, so ist nach Gl. 4, S. 277:

$$\mu p = T.$$

Führt man dies in obigen Ausdruck für Mp ein, so ergibt sich schliesslich

$$4) \quad p = \frac{Mg \sin a}{M + \mu} = \frac{g \sin a}{1 + \frac{\mu}{M}}.$$

d. h. die treibende Seitenkraft der Schwere $Mg \sin a$ ist nicht allein durch die Masse M , sondern durch die Summe $M + \mu$ zu theilen, da sie nicht nur die fortschreitende Masse M , sondern zugleich die Schwungmasse μ zu beschleunigen hat.

Hiermit ist auch die Umfangskraft T bestimmt zu

$$5) \quad T = \mu p = \frac{\mu Mg \sin a}{M + \mu} = \frac{Mg \sin a}{1 + \frac{M}{\mu}}.$$

Soll nun die Rollbewegung allein durch die Reibung, ohne sonstigen Zwang gesichert sein, so muss $T \leq fN = fMg \cos a$ sein, oder

$$\frac{\mu Mg \sin a}{M + \mu} \leq fMg \cos a.$$

Das giebt, nach a aufgelöst:

$$6) \quad \operatorname{tg} a \leq f \left(1 + \frac{M}{\mu} \right).$$

Genügt die Neigung der schiefen Ebene dieser Bedingung, so ist Rollbewegung möglich. Bei zu grosser Neigung ist $fMg \cos a$ zu klein, um die der grossen Schwerpunktsbeschleunigung p entsprechende Umfangsbeschleunigung zu erzeugen; es wird dann eine Gleitbewegung entstehen.

Natürlich ist die betrachtete Rollbewegung nur möglich, wenn die Wirkungsebene der Kräfte N und T durch den Schwerpunkt geht. Es findet dies statt beim Cylinder, beim Reif, bei der Kugel; nicht beim Kegel, wohl aber bei einem Doppelkegel und allgemeiner bei jeder Achse, auf der zwei symmetrische Umdrehungskörper als

Räder befestigt sind. Da beim dünnen Reif $u = M$, beim Cylinder $u = 1/2 M$, bei der Kugel $u = 0,4 M$, so wird für den Reif:

$$v = 0,707 \sqrt{2gh} = \sqrt{gh}; \quad p = 1/2 g \sin \alpha; \quad T = 1/2 Mg \sin \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha \leq 2f;$$

für den Cylinder:

$$v = 0,817 \sqrt{2gh}; \quad p = 2/3 g \sin \alpha; \quad T = 1/3 Mg \sin \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha \leq 3f;$$

für die Kugel:

$$v = 0,845 \sqrt{2gh}; \quad p = 5/7 g \sin \alpha; \quad T = 2/7 Mg \sin \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha \leq 3,5f.$$

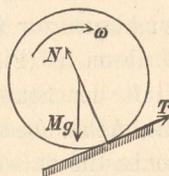
Dagegen würde für reibungsloses Gleiten gelten

$$v = \sqrt{2gh}; \quad p = g \sin \alpha.$$

Reif, Cylinder und Kugel, auf schiefer Ebene neben einander los gelassen, bewegen sich hiernach mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Die Kugel eilt am meisten, u. zw. sind dabei die Durchmesser ohne Einfluss; nur auf die Form der Körper kommt es an. Hierbei wurde kein Rollwiderstand vorausgesetzt, der natürlich die Ergebnisse ändern muss.

Wird der Körper in eine aufwärts gerichtete Rollbewegung versetzt und der Schwere überlassen, so könnte man auf den ersten Blick vielleicht meinen, der Sinn der Reibung T müsste sich mit der Umkehrung der Bewegung ebenfalls umkehren. Dies wäre jedoch ein Trugschluss, denn an der Berührungsstelle findet ja weder in der Richtung aufwärts, noch abwärts ein Gleiten statt, mag der Körper aufwärts oder abwärts rollen. Dass vielmehr T beim Aufwärtsrollen denselben Sinn behalten muss wie beim Abwärtsrollen, erkennt man aus Folgendem: Beim Aufwärtsrollen wird die Arbeit der Schwere negativ, somit muss die Bewegung des Schwerpunktes verzögert sein, und Gleiches folgt hieraus für die Drehbewegung. Damit aber die einzige Drehkraft T beim Aufwärtsrollen eine Verzögerung der Drehung erzeuge, muss sie (Fig. 376) aufwärts gerichtet sein. Da nun die Kräfte jetzt genau dieselben sind wie beim Abwärtsrollen, so gelten auch für p , T und $\operatorname{tg} \alpha$ dieselben Gleichungen wie beim Abwärtsrollen.

Fig. 376.



Geschieht die Rollbewegung nicht auf einer schiefen Ebene, sondern im unteren Theile einer Cylinderfläche vom Halbmesser $R + r$ mit wagerechten Erzeugenden (Fig. 377), so ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Zwischenlage P nach der auch hier gültigen Gl. 2 (S. 299)

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\mu}{M}}} = \sqrt{\frac{2gR(\cos\vartheta - \cos\alpha)}{1 + \frac{\mu}{M}}}$$

wenn die Bewegung bei A mit der Geschwindigkeit Null begann. Bei einem mathematischen Pendel von der Fadlänge R würde

$$v_1 = \sqrt{2gR(\cos\vartheta - \cos\alpha)} \text{ sein.}$$

Die Vertauschung des einfachen Pendels mit einem hin und her rollenden Körper ist also (wegen der Verkleinerung der Beschleunigung des Schwerpunktes, S. 300) gleichbedeutend mit einer Ersetzung der Fallbeschleunigung g durch den kleineren Werth $g : \left(1 + \frac{\mu}{M}\right)$; mithin wird die Dauer einer kleinen einfachen Schwingung sein

$$7) \quad t = \pi \sqrt{\frac{R}{g} \left(1 + \frac{\mu}{M}\right)}.$$

Bewegung der Fuhrwerke mit Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Tragen die auf schiefer Ebene rollenden Räder von der Gesamtmasse M ein Fuhrwerk von der Masse M_1 , welches nur an der Verschiebung mit der Beschleunigung p Theil nimmt, so denkt man sich zur Berechnung der letzteren die Masse M_1 zunächst an der Achse des rollenden Körpers reibungslos aufgehängt. Die Gelenkstange zur Aufhängung nimmt dann im relativen Ruhezustande gegen die Achse des rollenden Körpers eine Richtung an, welche von der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene um einen Winkel β abweicht (Fig. 378). Nennt man die Spannkraft der Stange, die zugleich den Druck auf die Achse bedeutet, D , so müssen D und β so bestimmt werden, dass M_1 nur an der Verschiebungsbeschleunigung p Theil nimmt. Ersetzt man die Stange durch die Kraft D und zerlegt die an M_1 wirkenden D und M_1g

Fig. 377.

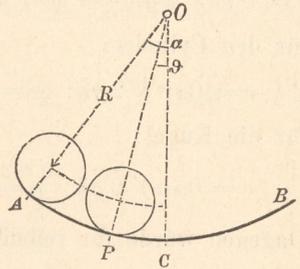
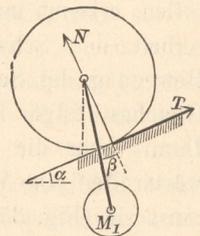


Fig. 378.



parallel zur Ebene und rechtwinklig dazu (Fig. 379), so wird $D \cos \beta = M_1 g \cos \alpha$, ferner $M_1 p = M_1 g \sin \alpha - D \sin \beta$ oder $D \sin \beta = M_1 g \sin \alpha - M_1 p$. Daraus folgt

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \frac{p}{g \cos \alpha}$$

$$8) \quad D = M_1 g \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \frac{p}{g} + \left(\frac{p}{g}\right)^2}.$$

An dem rollenden Körper wirken nun die in Fig. 380 angegebenen Kräfte, wo \mathfrak{M} das gesammte, aus Zapfenreibung und Rollwiderstand herrührende Moment bedeutet. Nach S. 252 ist $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} Dfd + Ne$, wenn d der Zapfendurchmesser, e der Arm des Rollwiderstandes. Dann gilt für die Beschleunigung p des Schwerpunktes

$$M p = M g \sin \alpha + D \sin \beta - T \quad \text{oder}$$

$$9) \quad M p = M g \sin \alpha + M_1 g \sin \alpha - M_1 p - T;$$

und für die Umfangsbeschleunigung der Drehung nach S. 277

$$\mu p = T - \frac{\mathfrak{M}}{R}, \quad \text{oder}$$

$$T = \mu p + \frac{Dfd}{2R} + \frac{Ne}{R},$$

wenn R der Halbmesser des Rollkreises.

Setzt man dies in Gl. 9 ein, so ergibt sich

$$(M + M_1 + \mu) p = (Mg + M_1 g) \sin \alpha - \frac{Dfd}{2R} - \frac{Ne}{R}.$$

Diese Gleichung ist nach p nicht ohne Weiteres aufzulösen, weil in D nach Gl. 8 die Grösse p ebenfalls noch vorkommt. Für alle wichtigen Fälle aber, in denen ein Fuhrwerk frei läuft, ist α und darnach auch $p : g$ nur klein im Verhältnisse zu Eins, so dass man mit genügender Annäherung $D = M_1 g$ setzen kann. Daher wird der Zapfenreibungswiderstand $M_1 gfd : (2R)$, und weil $N = (M + M_1) g \cos \alpha$, der Rollwiderstand $(M + M_1) g \cos \alpha \cdot e : R$, wobei für schwache Neigungen $\cos \alpha$ mit Eins vertauscht werden darf.

Führt man aber, wie S. 254, wiederum die Gleichgewicht-Neigung α_0 ein, welche so beschaffen, dass wenn $\alpha = \alpha_0$ $p = 0$ ist, so wird die Summe der beiden Widerstände wieder gleich mit

Fig. 379.

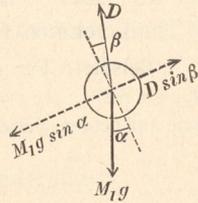
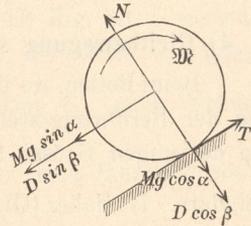


Fig. 380.



$(M + M_1)g \sin \alpha_0$, und wenn man dann noch, wie früher (S. 253), $\sin \alpha$ mit α vertauscht, so entsteht

$$10) \quad (M + M_1 + \mu)p = (M + M_1)g(\alpha - \alpha_0),$$

worin auf der linken Seite die Beschleunigung p mit der Summe der drei Massen multiplicirt erscheint, welche an der Beschleunigung p Theil nehmen (ebenso wie bei der Fallmaschine, S. 285).

Beispiel: Für einen Eisenbahnwagen auf schiefer Ebene sei $Mg = 2000$, $M_1g = 8000$, $\mu g = 1000$ kg, $\alpha = 1 : 200$, $\alpha_0 = 1 : 400$. Dann wird, wenn man auf beiden Seiten der Gl. 10 statt der Massen die Gewichte einführt,

$$11\,000 p = 10\,000 g \cdot \frac{1}{400} \quad \text{oder}$$

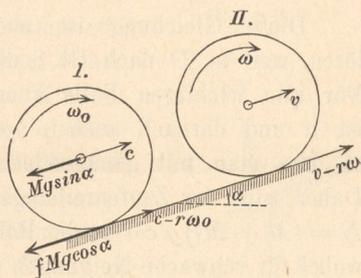
$$p = \frac{g}{440} = 0,023 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ohne Geschwindigkeit losgelassen, wird der Wagen in 10 Sekunden eine Strecke $\frac{1}{2} p t^2 = 1,1$ m zurückgelegt haben, innerhalb einer Minute aber 36 mal so viel, nämlich 39,6 m. Der Wagen läuft auf dem Gefälle 1 : 200 unter Einfluss der Widerstände ganz so, als ob er widerstandslos sich auf einem um α_0 schwächeren Gefälle 1 : 400 bewegte.

d) Gleitbewegung sich drehender Körper auf schiefer Ebene.

Beim Rollen, wo die Geschwindigkeit des Körpers gegen die Ebene an der Berührungsstelle Null ist, tritt der Reibungswiderstand nur in derjenigen Grösse auf, die erforderlich ist, um das Gleiten zu verhindern. Ist daher (Gl. 6, S. 300) $\operatorname{tg} \alpha < f \left(1 + \frac{M}{\mu}\right)$, so ist $T < fN$; sind aber die anfänglichen Einzelbewegungen so beschaffen, dass an der Berührungsstelle ein Gleiten stattfindet, so tritt die Reibung in der Grösse $fMg \cos \alpha$ auf; doch wird nach einer gewissen Zeit die Gleitbewegung in eine Rollbewegung übergehen, wenn die Bedingung für eine solche (Gl. 6, S. 300) erfüllt ist, und in diesem Augenblicke verändert sich dann die Reibung plötzlich. Der Umdrehungskörper habe zu Anfang (Stellung I in Fig. 381) eine Drehung mit der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega_0$, eine Geschwindigkeit des Schwerpunktes c und werde mit diesen Geschwindigkeiten auf die schiefe Ebene gesetzt, so dass an der Berührungsstelle die Gesamt-

Fig. 381.



geschwindigkeit $c - r\omega_0$ entsteht. Es sei $c > r\omega_0$, dann wirkt in Fig. 381 der Reibungswiderstand $fMg \cos a$ abwärts, die Seitenkraft der Schwere $Mg \sin a$ ebenfalls abwärts. Der Schwerpunkt erfährt dadurch eine abwärts gerichtete Beschleunigung

$$1) \quad p = g(f \cos a + \sin a).$$

Die Drehung erfährt nach S. 277 und unter Vernachlässigung des Rollwiderstandes eine Umfangsbeschleunigung

$$2) \quad r\varepsilon = f \frac{M}{\mu} g \cos a.$$

In t Sekunden entstehen die Geschwindigkeits-Änderungen

$$c - v = pt \quad \text{und} \quad r(\omega - \omega_0) = r\varepsilon t$$

mit dem Verhältnisse

$$3) \quad \frac{c - v}{r\omega - r\omega_0} = \frac{p}{r\varepsilon}.$$

Soll nun v diejenige Geschwindigkeit des Schwerpunktes sein, bei der die Rollbewegung beginnt (Stellung II, Fig. 381), so muss $r\omega = v$ eingesetzt werden. Hiermit liefert die letzte Gleichung,

nach v aufgelöst: $v = \frac{cr\varepsilon + pr\omega_0}{p + r\varepsilon}$; die Zeit t_1 , nach welcher

das Rollen beginnt, ist dann $t_1 = \frac{c - v}{p}$, oder nach Einsetzen von v

$$4) \quad t_1 = \frac{c - r\omega_0}{p + r\varepsilon}.$$

Nach dieser Zeit t_1 ist die Geschwindigkeit an der Berührungsstelle Null, und die Reibung wechselt ihren Sinn. Ist nun die Bedingung Gl. 6, S. 300 erfüllt, so wird eine Rollbewegung eintreten. Andernfalls wird die Gleichheit der beiden Geschwindigkeiten v und $r\omega$ nur einen Augenblick wahren, aber sogleich wieder aufhören, weil die Reibung nicht hinreicht, sie zu erhalten. — Für $r\omega_0 > c$ wechselt die Reibung ihren Sinn, es wird

$$p = g(\sin a - f \cos a), \quad r\varepsilon = -f \frac{M}{\mu} g \cos a \quad \text{und}$$

$$t_1 = \frac{r\omega_0 - c}{r\varepsilon - p}, \quad \text{wie man leicht findet.}$$

Beispiel 1: Eine Kugel von $0,1$ m Halbmesser werde nach Fig. 381 mit 8 m sekundlicher Geschwindigkeit des Schwerpunktes und 2 m Umfangsgeschwindigkeit der Drehbewegung auf eine mit $a = 1/10$ ansteigende Bahn geworfen. Die

anfängliche Gleitgeschwindigkeit ist daher $6 \frac{m}{s}$. Die Reibungsziffer betrage $f = 0,2$.

In diesem Falle ist $\cos \alpha$ annähernd $= 1$ zu setzen, $\sin \alpha = 0,1$, $M = 2,5 \mu$ (S. 273), mithin $p = g(0,2 + 0,1) = 0,3 g$; $r\varepsilon = g \cdot 2,5 \cdot 0,2 = 0,5 g$. Die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, ist $v = 5,75 \frac{m}{s}$; die entsprechende Zeit

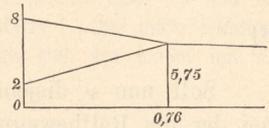
$$t_1 = \frac{8 - 2}{0,3 g} = 0,76 \text{ s.}$$

In diesem Augenblicke vermindert sich die Reibung nach Gl. 5, S. 300 auf

$$T = \frac{Mg \cdot 0,1}{3,5} = 1/35 Mg,$$

während sie vorher $1/5 Mg$ betrug. Die Verzögerung der Rollbewegung wird nun (Gl. 4, S. 300) $p = 5/7 g \sin \alpha = 0,0714 g = 0,7$. Die Geschwindigkeit wird Null nach weiterem Verlaufe von $5,75 : 0,7 = 8,2 \text{ s.}$, während dessen (nach Gl. 3, S. 12) $5,75 \cdot 4,1 = 23,8 \text{ m}$ zurückgelegt werden. Von dieser Stelle an rollt die Kugel mit der Beschleunigung $p = 0,7 \frac{m}{s^2}$ rückwärts, soweit die Bahn reicht. Die Geschwindigkeitsgesetze sind in Figur 382 dargestellt. Die obere Linie bezieht sich auf den Schwerpunkt, die untere auf die Umfangsgeschwindigkeit der Drehung; beide treffen sich beim Beginne des Rollens.

Fig. 382.



1 a. Hat die Bahn keine nennenswerthe Neigung, ist also $\alpha = 0$, so wird die Verzögerung des Schwerpunktes $p = 0,2 g$; die Umfangsbeschleunigung der Drehung $r\varepsilon = 0,5 g$. Die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, wird dann $v = 6,3 \frac{m}{s}$, die entsprechende Zeit $t_1 = 0,274 \text{ s.}$ Mit der Geschwindigkeit v setzt die Kugel die Rollbewegung gleichmässig fort, wenn kein Rollwiderstand sie verzögert.

Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Während des Gleitens wird nach S. 248

$$5) \quad r\varepsilon = \left(f - \frac{e}{r} \right) \frac{M}{\mu} g \cos \alpha$$

zu setzen sein, während des Rollens

$$6) \quad p = g \frac{\sin \alpha - \frac{e}{r} \cos \alpha}{1 + \frac{\mu}{M}}.$$

Letzteres giebt für $\alpha = 0$, $e = 0,5 \text{ mm}$, $r = 100 \text{ mm}$ eine Verzögerung $= \frac{g}{700} = 0,014 \frac{m}{s^2}$.

1 b. Ein Umdrehungskörper, z. B. eine Kugel, kann auch auf wagerechter Bahn so fortgeworfen, fortgeschleunigt, werden, dass sie nach einer gewissen Zeit zurückrollt (Billardkugel). Giebt man ihr eine grosse Drehungsgeschwindigkeit ω_0 links herum und wirft sie mit nicht zu grosser Geschwindigkeit c nach



rechts fort (Fig. 383), so erfährt sie unter Vernachlässigung des Rollwiderstandes eine Verzögerung des Schwerpunktes $p = fg$, eine Umfangersverzögerung $r\varepsilon = fgM : \mu$; also $\mu r\varepsilon = Mp$. Ist v die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, so muss diese negativ, d. h. nach links gerichtet sein, denn während des Rollens auf wagerechter Bahn kann eine Änderung des Sinnes der Geschwindigkeit nicht mehr vorkommen. Ist t_1 die Zeit, nach der das Zurückrollen beginnt, so wird

$$c + v = p t_1, \quad r\omega_0 - v = r\varepsilon t_1,$$

$$\text{mithin } v = \frac{p r \omega_0 - c r \varepsilon}{p + r \varepsilon} \quad \text{und} \quad t_1 = \frac{c + r \omega_0}{p + r \varepsilon}.$$

Soll nun die Kugel rückläufig, also $v > 0$ sein, so muss $p r \omega_0 > c r \varepsilon$ oder $\mu r \omega_0 > M c$, also bei einer Kugel mit $\mu = 0,4 M r \omega_0 > \frac{5}{2} c$, sein. Es lässt sich sogar erreichen, dass $v > c$ wird, d. h. dass die Kugel schneller zurückrollt, als sie fortgeworfen wurde. Dazu muss

$$r\omega_0 > c \left(1 + 2 \frac{r\varepsilon}{p}\right), \text{ bei einer Kugel } r\omega_0 > 6c, \text{ sein.}$$

1c. Sollen der ursprünglich ruhenden Kugel durch eine grosse, nur sehr kurze Zeit t_0 wirkende Kraft P solche Geschwindigkeiten $r\omega_0$ und c ertheilt werden, dass ein Zurückrollen eintritt, dass also $\mu r \omega_0 > M c$ wird, so sind dazu Beschleunigungen $r\varepsilon_0$ und p_0 erforderlich, die in der Zeit t_0 die Geschwindigkeiten $r\omega_0$ und c hervorbringen; es muss also auch $\mu r \varepsilon_0 > M p_0$ sein.

Auf die Kugel wirke die Schwere Mg , der um den Reibungswinkel φ von der Normalen abweichende Gesamtwiderstand W der Bahn und die gesuchte Kraft P . Die Mittelkraft R dieser drei muss wagerecht gerichtet sein, da die Beschleunigung p_0 des Schwerpunktes wagerecht sein soll (Fig. 384), u. zw. muss die Lage von R sich unterhalb des Schwerpunktes befinden (etwa um l), dann wird $\mu r \varepsilon_0 = R l : r$ und $M p_0 = R$, wobei $l > r$ sein muss, damit $\mu r \varepsilon_0 > M p_0$ werde. Gegenüber der grossen Kraft P möge das Gewicht der Kugel vernachlässigt werden.

Der Punkt B (Fig. 385), an welchem der Druck P auf die Kugel ausgeübt werden soll, möge durch den Mittelpunktswinkel α bestimmt sein. Übt man die Kraft P aus, indem man mit einem lederbeschlagenen Stabe bei B in der Richtung BC gegen die Kugel stösst, oder indem man mit der Hand an der Kugel (bei B sie berührend) abwärts schlägt, so wird der Stab bezw. die Hand an der Kugel gleiten und die

Fig. 383.

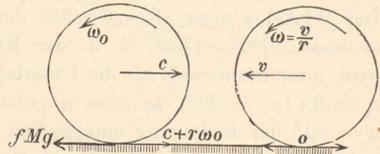


Fig. 384.

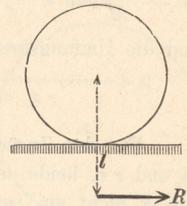
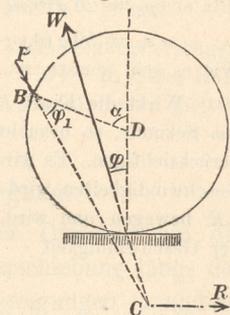


Fig. 385.



Richtung des Druckes P von der Normalen DB um den Reibungswinkel φ_1 , der für Kugel und stossenden Körper gilt, abweichen. Soll nun der Schnittpunkt von W und P unterhalb der Kugel liegen, so muss $\alpha - \varphi_1 > \varphi$ und zugleich $\varphi_1 > \frac{1}{2} \alpha$ sein, woraus folgt

$$\alpha > \varphi + \varphi_1 \quad \text{und} \quad \alpha < 2\varphi_1.$$

Der Winkel α muss also zwischen den Grenzen $\varphi + \varphi_1$ und $2\varphi_1$ liegen, und es muss $\varphi_1 > \varphi$ sein, d. h. der Körper, mit dem der Druck P ausgeübt wird, muss rauher sein als die Unterlage der Kugel. Ist z. B. $f = 0,2$ ($\varphi = 11^\circ$), $f_1 = 0,8$ ($\varphi_1 = 39^\circ$), so muss α zwischen 50 und 78° liegen; es würde daher $\alpha = 60^\circ$ der Bedingung entsprechen.

Zerlegt man nun den Druck P in einen Normaldruck K und die Reibung $f_1 K$, W in N und fN , zerlegt ferner K und $f_1 K$ nach wagerechter und lothrechter Richtung, so wird (Fig. 386), da in lothrechtem Sinne keine Verschiebung erfolgt, $N = K(\cos \alpha + f_1 \sin \alpha)$. Dann ergibt sich als Beschleunigung des Schwerpunktes nach rechts

$$p_0 = \frac{K \sin \alpha - f_1 K \cos \alpha - fN}{M} \quad \text{oder}$$

$$p_0 = \frac{K}{M} (\sin \alpha - f_1 \cos \alpha - f \cos \alpha - f f_1 \sin \alpha)$$

und die Umfangsbeschleunigung der Drehung

$$r \varepsilon_0 = \frac{f_1 K - fN}{\mu} = \frac{K}{\mu} (f_1 - f \cos \alpha - f f_1 \sin \alpha).$$

Für das Zurückrollen besteht nun die Bedingung $\mu r \varepsilon_0 > p_0 M$; da nun p_0 und $r \varepsilon_0$ beide mit K verhältnissgleich sind, so kommt es auf die Grösse von K nicht an, sondern nur auf die Winkel α , φ und φ_1 . Eine Veränderlichkeit der Grösse von K , wie sie beim Stosse besteht, bringt keine wesentliche Änderung.

Es sei $\alpha = 60^\circ$, $f = 0,2$, $f_1 = 0,8$ und beispielsweise $K = 20 \text{ Mg}$, dann wird

$$p_0 = 20 g (0,866 - 0,8 \cdot 0,5 - 0,2 \cdot 0,5 - 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,866) = 44,5;$$

$$r \varepsilon_0 = 50 g (0,8 - 0,2 \cdot 0,5 - 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,866) = 275.$$

Wie es sein musste, ist $r \varepsilon_0 > 6 p_0$.

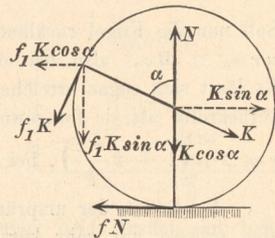
Wirkt die Kraft $K = 20 \text{ Mg}$ nebst der entsprechenden Reibung $f_1 K$ nur $\frac{1}{20}$ Sekunde, so braucht man die Verschiebung ihres Angriffspunktes nicht zu berücksichtigen. Es wird dann $c = 44,5 \cdot \frac{1}{20} = 2,23$, $r \omega_0 = 13,75$. Mit diesen Geschwindigkeiten wird sich die Kugel nach dem Aufhören der Kräfte K und $f_1 K$ bewegen und wird, da nun $p = 0,2 g$ und $r \varepsilon = 0,5 g$, zurückrollen mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{0,2 \cdot 13,75 - 2,23 \cdot 0,5}{0,2 + 0,5} = 2,33;$$

das Gleiten währt im Ganzen

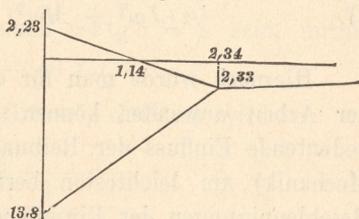
$$t_1 = \frac{c + r \omega_0}{p + r \varepsilon} = 2,34 \text{ Sek.}$$

Fig. 386.



Die Umkehr der Kugel erfolgt übrigens schon während des Gleitens. Nach der Zeit $t = c : (fg) = 2,23 : 1,962 = 1,14$ Sek. und nachdem die Kugel sich um $s' = 2,23 \cdot 1,14 \cdot 0,5 = 1,27$ m nach rechts bewegt hat, ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes nach rechts Null geworden, kehrt dann während des Restes der Gleitzeit, d. h. während der Zeit $t'' = 2,34 - 1,14 = 1,20$ Sek. um $s'' = 2,33 \cdot 1,20 \cdot 0,5 = 1,4$ m gleitend nach links zurück. An dem um $0,13$ m links von der Ausgangsstelle gelegenen Punkte beginnt erst das Rollen, welches sich dann mit der Geschwindigkeit $2,33$ m/s. fortsetzt. Fig. 387 zeigt die Geschwindigkeitsgesetze der Bewegungen.

Fig. 387.



Beispiel 2: Wirkt auf eine auf wagerechter Ebene anfänglich ruhende Kugel eine wagerechte Kraft K , die um l oberhalb des Schwerpunktes liegt, nach rechts und soll eine Rollbewegung entstehen, so ist am Auflagerpunkte ein Widerstand T erforderlich, den wir nach links gerichtet annehmen wollen (Fig. 388). Die Beschleunigung des Schwerpunktes p (S. 142) und die Winkelbeschleunigung ε der Drehung (S. 276) werden dann

Fig. 388.

$$p = \frac{K - T}{M}; \quad \varepsilon = \frac{Kl + Tr}{\mu r^2}.$$

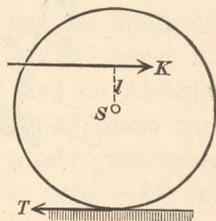
Für Rollbewegung muss nun $r\varepsilon = p$ sein, oder

$$K\mu r - T\mu r = Kml + TMr.$$

Hieraus bestimmt sich

$$T = K \frac{\mu r - Ml}{(M + \mu)r}.$$

Für $l = 0$ wird $T = K : \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) = \frac{2}{1} K$. Für $l = r$ wird T negativ, nämlich $T = -K \frac{M - \mu}{M + \mu} = -\frac{3}{1} K$. Soll aber die Kraft K ohne jede Mitwirkung von T , d. h. auf völlig glatter Ebene eine Rollbewegung erzeugen, soll $T = 0$ sein, so wird $l : r = \mu : M = 0,4$, d. h. $l = \frac{2}{5} r$. In dieser Höhe darf eine Kugel beliebig heftig gestossen werden, ohne dass sie unten gleitet; sie wird sofort eine Rollbewegung beginnen.



e) Beschleunigte Schraubenbewegung.

Die Schraubenbewegung besteht aus einer Drehung um die Achse der Schraube und einer gleichzeitigen Verschiebung längs der Achse. Sind die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen ω und u , so ist das Arbeitsvermögen der Schraube $\frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} Mu^2$ (S. 296). Weil aber bei der Schraube vom mittleren Halbmesser r ,

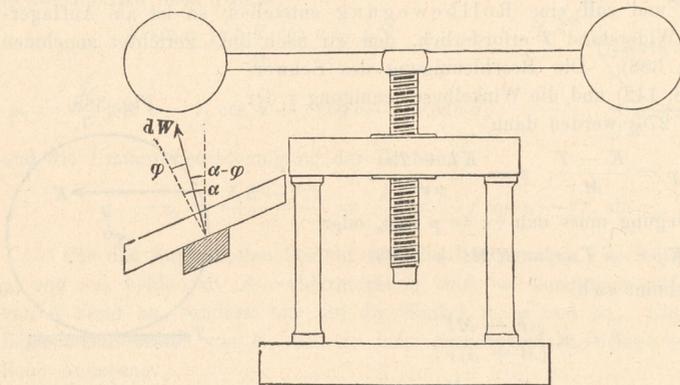
dem Steigungswinkel α der mittleren Schraubelinie und der Ganghöhe h $2r\pi\text{tg}\alpha = h$, so ist auch $r\omega\text{tg}\alpha = u$, also mit $J = \mu r^2$

$$1) \quad \frac{1}{2}(J\omega^2 + Mu^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\text{tg}^2\alpha} + M\right)u^2.$$

Hiernach würde man für eine ideelle Schraube leicht den Satz der Arbeit anwenden können. Der bei wirklichen Schrauben sehr bedeutende Einfluss der Reibung kann aber (nach A. Ritter, Techn. Mechanik) am leichtesten berücksichtigt werden, wenn man die Beschleunigungen der Einzelbewegungen berechnet.

Die Schraube sei flachgängig und oben mit Schwungkugel-Armen versehen (Fig. 389). Solche Schrauben kommen in Präge-

Fig. 389.



werken und in Hüttenwerken (zum Zerbrechen von Eisenstäben) vor. Die Schrauben werden durch Arbeiter in die Höhe gedreht und sind nicht selbsthemmend, vielmehr gewinnen sie durch ihr Gewicht (z. Th. unter Nachhülfe der Arbeiter) ein gewisses Arbeitsvermögen, welches dann zum Zerbrechen verbraucht wird. Die treibende Kraft sei allein die Schwere Mg . Ein Theilchen der Schraubennutter leistet beim Abwärtsgleiten einen Widerstand dW , der um $\alpha - \varphi$ von der Achsenrichtung abweicht.

Der Schwerpunkt der Schraube kann sich nur geradlinig bewegen; die Beschleunigung p des Schwerpunktes folgt aus der Gleichung

$$2) \quad Mp = Mg - \cos(\alpha - \varphi) \int dW.$$

Die wagerechten Seitenkräfte $\sin(\alpha - \varphi) dW$ bilden das treibende Kräftepaar für die Drehung; es wird (S. 277, Gl. 4)

$$\mu r \varepsilon = \sin(\alpha - \varphi) f dW.$$

Weil aber $r \omega \operatorname{tg} \alpha = u$, so muss auch $r \varepsilon \operatorname{tg} \alpha = p$ sein, mithin

$$3) \quad \mu p = \operatorname{tg} \alpha \sin(\alpha - \varphi) f dW.$$

Entfernt man aus Gl. 2 und 3 die Grösse $f dW$, so wird

$$4) \quad p = \frac{g}{1 + \frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}}.$$

Ist die Schraube in aufwärts drehende Bewegung versetzt und wird sie dann der Wirkung der Schwere überlassen, so kehrt die Reibung ihren Sinn um, es ist $-\varphi$ mit $+\varphi$ zu vertauschen, und die Verzögerung der aufwärts gerichteten Bewegung wird

$$5) \quad p = \frac{g}{1 + \frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}}.$$

Bei einer Spindel mit Schwungkugeln wird nun das Trägheitsmoment wesentlich von diesen geliefert, und es ist, wenn die Schwungkugeln zusammen die Masse M_1 haben und im Abstände R von der Mitte sich befinden, annähernd $J = M_1 R^2$; dann wird $\mu r^2 = M_1 R^2$ und, weil $R : r$ meist gross, auch μ sehr gross gegen M . Ausserdem sind, wenn auch $\alpha > \varphi$ ist, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$ und $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ immer ziemlich kleine Brüche, so dass $\frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi)}$ gegen die Einheit so gross wird, dass diese dagegen verschwindet. Daher kann man mit grosser Annäherung statt der Gl. 4 und 5 die einfachere Doppelformel

$$6) \quad p = g \frac{M}{\mu} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi) \text{ schreiben.}$$

Beginnt die Bewegung mit der Geschwindigkeit Null, so ist, nachdem die Schraube um h gesunken,

$$7) \quad v^2 = 2 p h.$$

Das Arbeitsvermögen wird dann $\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + M \right) 2 p h$.

Beispiel: Das Gesamtgewicht der Schraube betrage 300 kg, wovon auf die Schwungkugeln 200 kg kommen mögen. Ausserdem sei $\operatorname{tg} \varphi = f = 0,1$; $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$;

$R = 20r$. Dann ist $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = 0,093$, $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 0,306$. Ferner ist mit genügender Genauigkeit $\mu r^2 = \frac{2}{3} MR^2$, daher $\mu = \frac{2}{3} \cdot 400 M = \frac{800}{3} M$, so dass dagegen M in Gl. 1 zu vernachlässigen ist. Dann kann auch das Arbeitsvermögen einfacher geschrieben werden $\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \frac{u^2}{2} = \frac{20000 M}{3} \frac{u^2}{2}$. Die Beschleunigung der Abwärtsbewegung wird nach Gl. 6

$$p = g \frac{3}{800} 0,2 \cdot 0,093 = 0,000714 g = 0,00072 \frac{m}{s^2}.$$

Nennt man p_0 die Beschleunigung einer reibungslosen Schraube von den gleichen Verhältnissen, so ist nach Gl. 6 (für $\varphi = 0$)

$$p_0 = g \frac{M}{\mu} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{daher} \quad p = p_0 \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Da nun nach Gl. 7 v^2 mit p verhältnissgleich, so ist auch, wenn \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_0 das Arbeitsvermögen der wirklichen bezw. der reibungslosen Schraube, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}$. Will man daher das Arbeitsvermögen der sinkenden

Schraube verwerthen, so ist $\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}$ der Wirkungsgrad der sinkenden

Schraube. Es muss zugleich $\mathfrak{A}_0 = Mgh$ sein, da bei der reibungslos sinkenden Schraube nur die Schwerkraft Arbeit verrichtet. Um aber von der Höhe h sinken zu können, musste die Schraube um diese Grösse gehoben werden, und

weil der Wirkungsgrad der Schraube beim Heben nach S. 259 $\eta_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$,

so war zum Heben die Arbeit $\mathfrak{A}_1 = Mgh \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}$ erforderlich. Betrachtet man nun Auf- und Abwärtsbewegung im Zusammenhange, so ist der Gesamtwirkungsgrad

$$\eta_2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}_1} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = 0,32.$$

Annähernd kann man auch bei der Kleinheit der Winkel α und φ $\operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi) = \operatorname{tg} \alpha \mp \varphi$ schreiben, dann wird

$$\eta_2 = \frac{0,2 - 0,1}{0,2 + 0,1} = \frac{1}{3} = 0,33.$$

Derartige Vernachlässigungen sind zulässig, weil ja φ und f doch in jedem Falle nur unsicher bekannt sind. Um die Schraube von 300 kg Gewicht um $h = 0,1$ m zu heben, waren $30 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha} =$ annähernd 45 mkg Arbeit aufzuwenden. Nach dem Hinabsinken um $0,1$ m beträgt das Arbeitsvermögen noch $30 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha} =$ annähernd 15 mkg.

