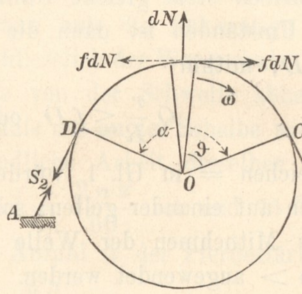
der sog. Keilnuthenräder mehrere Keilnuthen neben einander anordnet, hat mit der Wirkung nichts zu thun.

Beispiel: Macht man $2\delta = 30^{\circ}$, so ist $\sin\delta = 0{,}26$, und es wird mit den sonstigen Zahlen des vorhergehenden Beispiels der untere Grenzwerth von D: $333 \cdot 0{,}26 = 87^{\text{kg}}$, also nur etwas mehr als $^1/_4$ des vorigen.

f) Seilreibung.

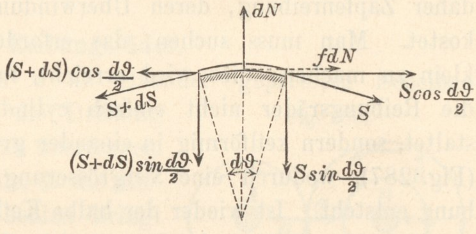
1. Über einen Cylinder vom Halbmesser r, der sich gleichförmig um eine Achse O dreht (Fig. 288), sei ein biegsames Seil, ein biegsamer Faden, Riemen oder dgl. gelegt, bei A befestigt und bei B am freien Ende mit einer Kraft S_1 gespannt, dann drückt das Seil gegen den Cylinderumfang; an einem Bogentheilchen $ds = r\,d\vartheta$ entsteht ein Normaldruck dN und ein Gleitwiderstand $f\,dN$, der auf den sich rechts drehenden Cylinder nach links, auf das Seil aber nach rechts wirkt, das Seil also mitzunehmen strebt. In dem bei A befestigten Seilstücke möge eine Spannkraft S_2 herrschen, dann befindet sich das Seil unter Einwirkung der an ihm auftretenden Kräfte S_1, S_2 Gruppe $[dN]$ und Gruppe $[f\,dN]$ im Gleichgewichte, so dass die Momentengleichung in Bezug auf O liefert (weil die dN-Kräfte durch O gehen): $S_1 r + rf\Sigma dN = S_2 r$, d. h. die gesammte Seilreibung $f\Sigma dN$ wird gemessen durch den Unterschied der Seilkräfte $S_2 - S_1$. Um also die gesammte Seilreibung zu finden, müssen wir $S_2 - S_1$ zu ermitteln suchen.

Fig. 288.



Schneiden wir aus dem Seile das Bogentheilchen $ds = r\,d\vartheta$ heraus (Figur 289), so wirken ausser den Kräften dN und $f\,dN$ noch die Spannkräfte S und $S + dS$. Zerlegt man sämmtliche Kräfte $\parallel$ und $\perp$ zu dN, so verlangt das Gleichgewicht

Fig. 289.



$$dN = (S + S + dS)\sin {}^1/_2\, d\vartheta$$
$$f\,dN = dS \cos {}^1/_2\, d\vartheta,$$

oder weil $\sin {}^1\!/_2\, d\vartheta = {}^1\!/_2\, d\vartheta$, $\cos {}^1\!/_2\, d\vartheta = 1$ und $dSd\vartheta$ unendlich klein zweiter Ordnung:

$$dN = Sd\vartheta$$

$$fdN = dS, \text{ mithin}$$

$$fd\vartheta = dS : S.$$

Durch Integration entsteht:

$$f\vartheta = 1 S + C.$$

$\vartheta = 0$ entspreche dem Punkte C (Fig. 288) und der Spannkraft S_1, $\vartheta = a$ dem Punkte D und der Spannkraft S_2, dann wird $fa = 1 S_2 + C$; $o = 1 S_1 + C$, mithin aus beiden:

2) $$fa = 1\left(\frac{S_2}{S_1}\right) \text{ oder } \frac{S_2}{S_1} = e^{fa},$$

und die ganze Seilreibung

3) $$S_2 - S_1 = S_1\,(e^{fa} - 1).$$

Dabei ist besonders bemerkenswerth, dass das Verhältnis der Kräfte unabhängig ist von r, nur abhängig von der Reibungsziffer und dem dem umspannten Bogen entsprechenden Mittelpunktswinkel a.

Wenn der Cylinder ruht, so wird die Summe aller zur Wirkung kommenden Reibungswiderstände $\int dT$ ebenfalls durch $S_2 - S_1$ gemessen; es ist dann aber

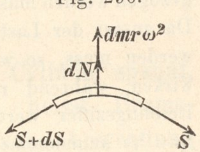
$$S_2 : S_1 < e^{fa} \text{ und auch}$$

$$S_2 - S_1 < S_1\,(e^{fa} - 1).$$

Für $S_2 = S_1$ würde keine Reibung ausgeübt werden. Bei einem Unterschiede zwischen S_1 und S_2 bezeichnen wir mit S_2 stets die grössere der Kräfte.

2. Ist das Seil nicht in Ruhe, sondern wird es mit gleichbleibender Geschwindigkeit $v = r\omega$ über den ruhenden oder mit anderer Geschwindigkeit sich drehenden Cylinder fortgezogen, so heben sich an einem Bogentheilchen $rd\vartheta$ die normal gerichteten Kräfte nicht auf, sondern es geschieht dies erst, nachdem die Centrifugalkraft $dm\,r\,\omega^2$ hinzugefügt ist (Fig. 290). Es wird dann

Fig. 290.



$$dN = Sd\vartheta - dm\,r\,\omega^2.$$

Darin ist $dm = \frac{\gamma}{g} F r d\vartheta$, wenn F der Querschnitt, γ die Dichte des Fadens, Riemens oder Seiles. Die andere Gleichung $f dN = dS$ bleibt unverändert; weil nun

$$d\left(S - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2\right) = dS,$$

so wird

$$f d\vartheta = \frac{d\left(S - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2\right)}{S - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2},$$

also

$$f\vartheta = \mathrm{l}\left(S - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2\right) + C,$$

oder zwischen Grenzen genommen:

$$f\alpha = \mathrm{l}\,\frac{S_2 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2}{S_1 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2}.$$

Daraus entsteht:

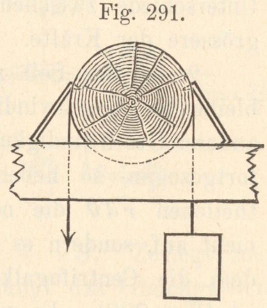
$$S_2 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2 = \left(S_1 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2\right) e^{f\alpha}, \text{ oder}$$

4) $$S_2 - S_1 = \left(S_1 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2\right)\left(e^{f\alpha} - 1\right).$$

In den meisten Fällen ist der Einfluss des Gliedes $\frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2$ unbedeutend; nur bei grossen Geschwindigkeiten $r\omega$ verdient er Berücksichtigung (vergl. S. 238).

Beispiel: Ein runder Baum sei auf einer Schwelle festgelegt (Fig. 291) und ausserdem durch Zimmermannshaken gehalten. Ein Seil sei derartig hinübergeschlungen, dass $\alpha = \pi$. An der rechten Seite hänge eine Last von 1000 kg. Es soll berechnet werden, mit welcher Kraft links gezogen werden muss, um die Last hinauf zu ziehen. Da ausser der Last noch die Reibung überwunden werden muss, so wird links die grössere Kraft S_2 wirken, während rechts $S_1 = 1000$ kg ist. Die Reibungsziffer werde für ein Hanfseil auf Holz $f = {}^1/_3$ angenommen.

Fig. 291.

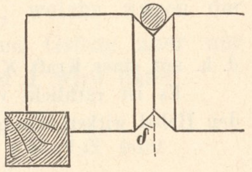


$$S_2 : S_1 = e^{1/3\,\pi}.$$

Nimmt man von beiden Seiten der Gleichung die Briggischen Logarithmen, so wird $\log\left(\frac{S_2}{S_1}\right) = \frac{1}{3}\pi \log e = 1{,}047 \cdot 0{,}434 = 0{,}4544$. Dazu gehört eine Zahl $2{,}85 = S_2 : S_1$. Mithin wird $S_2 = 2850^{\text{kg}}$; die Seilreibung beträgt 1850^{kg}, ist daher sehr gross. Diese Vorrichtung eignet sich daher nicht als Aufzugsmaschine, um so besser aber zum Hinablassen einer Last, wobei die Reibung günstig wirkt. Beim Hinablassen wirkt die kleinere Kraft S_1 auf der linken Seite, während die Last jetzt $S_2 = 1000^{\text{kg}}$ wird. Wiederum ist $e^{f\alpha} = 2{,}85$, daher $S_1 = 1000 : 2{,}85 = 351^{\text{kg}}$. Jetzt kommt also die Seilreibung im Betrage von $1000 - 351 = 649^{\text{kg}}$ der hinablassenden Kraft zu Hülfe. Die Zugkraft an der linken Seite darf zwischen den weiten Grenzen 351 und 2850^{kg} sich bewegen, ohne dass ein vorhandener Ruhezustand gestört werden würde. Da die Reibung das Bestreben hat, den Balken zu drehen, so muss er hiergegen sicher befestigt sein.

Zum Festhalten oder bequemen Hinablassen schwerer Lasten findet eine derartige Vorrichtung vielfache Anwendung. Die Reibung wird noch bedeutend vergrössert, wenn man den Winkel α des umspannten Bogens vergrössert. Man kann dadurch jedes beliebige Verhältnis $S_2 : S_1$ erreichen. Wir wollen berechnen, wie gross α werden muss, wenn $S_2 : S_1 = 1000$ sein soll, d. h. wenn man durch Anwendung von $S_1 = 1^{\text{kg}}$ die Last von 1000^{kg} hinablassen will. Es muss $e^{1/3\,\alpha} = 1000$, d. h. in Logarithmen $1/3\,\alpha\, 0{,}434 = 3$, oder $\alpha = 9 : 0{,}434 = 20{,}7$ sein. Da nun 1 Umwickelung einem Winkel 2π entspricht, so muss die Zahl der Umwickelungen $n = 20{,}7 : 2\pi = 3{,}3$ betragen. Wenn man also das Seil 3 Mal und dann noch 1/3 oder vielleicht 1/2 Mal umlegt, so wird das Ziel erreicht sein. Bei öfterem Umschlagen genügt schliesslich das Gewicht des überhängenden Seilendes zum Festhalten der Last.

Fig. 292.



Es ist für die Wirkung gleichgültig, ob der umspannte Bogen α sich auf e i n e m Cylinder befindet, oder ob das Seil nach einander um mehrere Cylinder geschlungen ist; in letzterem Falle ist α die Summe der umspannten Bögen. Auf diesem Grundgedanken beruhen die Rettungsvorrichtungen bei Feuersgefahr, mittels deren Menschen aus einem brennenden Hause hinabgelassen werden können.

Erheblich vergrössert wird die Seilreibung noch, wenn man das (runde) Seil in eine Keilrinne (Fig. 292) legt, weil dann $f : \sin\delta$ an Stelle von f zu setzen ist.

g) Bandbremse.

Ein dünnes Bandeisen, welches man um einen Cylinder spannt, um an diesem Reibungswiderstand zu erzeugen, heisst Bremsband und findet als Bandbremse bei Winden vielfache Anwendung zum gleichmässigen Hinablassen von Lasten. An einer Windetrommel