a) Reibungsmoment eines Tragzapfens.

Eine Achse sei rechtwinklig zu ihrer Mittellinie belastet und stütze sich mittels cylindrischer Zapfen auf cylindrische Lager, welche die Zapfen mit geringem Spielraum umschliessen. Auf einen Zapfen vom Halbmesser r komme ein durch die Zapfenmitte gehender Zapfendruck D, der rechtwinklig zur Längenachse des Zapfens steht, so dass die Cylinderfläche des Zapfens den Druck bekommt. Ein derartiger Zapfen heisst Tragzapfen.

Wir betrachten zuerst einen sog. eingelaufenen Zapfen (Fig. 275), der mit merklichem Spielraum im Lager liegt, und bei dem man annäherungsweise annehmen kann, die Berührung mit dem Lager finde nicht in einer grösseren Fläche, sondern in einer Seite des Cylinders (in der Figur durch einen Punkt dargestellt) statt. Im Ruhezustande würde A die Berührungsstelle sein. Dreht sich nun aber der Zapfen rechts herum, so gleitet bei A der Zapfen nach links; dem setzt sich der Widerstand fN nach rechts entgegen. Das Moment $fN \cdot r$ macht ein treibendes, die Reibung überwindendes Kräftepaar $\mathfrak{M}$ im Sinne der Drehung nöthig. Aber auch nach Anbringung desselben ist den Gleichgewichtsbedingungen noch nicht genügt, weil die Summe der wagerechten Kräfte nicht Null ist. Es kann daher im Zustande der Bewegung die Berührung nicht in A stattfinden; vielmehr verschiebt sich die Berührungsstelle nach rechts nach einem Punkte B (Fig. 276), der so liegt, dass dort die Mittelkraft W aus N und fN lothrecht gerichtet ist. Dies findet statt für $\sphericalangle AOB = \varphi$. Es wird nun $W = D$, und beide bilden ein dem treibenden Momente $\mathfrak{M}$ widerstehendes Kräftepaar $D r \sin \varphi = \mathfrak{M}$.

Fig. 275.

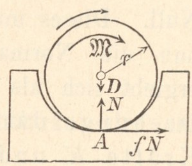
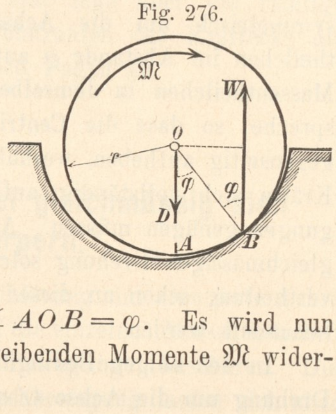


Fig. 276.

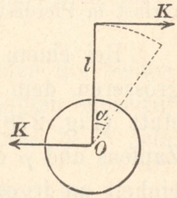


Nun ist $\operatorname{tg} \varphi = f$; weil aber bei geschmierten Drehzapfen, wie wir sie hier im Auge haben, fast stets $f \leqq 0{,}1$ also $\varphi \leqq 6^0$ und $\cos \varphi \geqq 0{,}995$, so ist bei derartig kleinen Winkeln $\sin \varphi$ mit genügender Annäherung gleich $\operatorname{tg}\varphi = f$ zu setzen, so dass das für die gleichförmige Drehung erforderliche Kraftmoment, welches zugleich das Reibungsmoment bezeichnet, gesetzt werden darf

$$\mathfrak{M} = Dfr. \tag{1}$$

Es entspricht z. B. $f = 0{,}1$ dem Werthe $\sin\varphi = 0{,}0995$. Unmittelbar ergiebt sich Gl. 1 aus Fig. 275, wenn man daselbst, ohne Rücksicht auf den kleinen Verstoss gegen die Gleichung der wagerechten Kräfte, $N = D$ also $fN = fD$ einführt. Man denke sich also, um die Gl. 1 leicht zu merken, dass der Zapfendruck D eine Reibung fD und mit dem Hebelarm r ein Moment Dfr bedingt. Bringt man das Moment $\mathfrak{M}$ auf die Form Kl (Fig. 277), legt die eine Kraft durch O, die andere ans Ende eines Halbmessers l und lässt sich die Kräfte K bei der Drehung stets mitdrehen, so verrichtet die in O angreifende Kraft keine Arbeit; die am Endpunkte des Armes l aber während eines Drehungswinkels α die Arbeit $Kl\alpha = \mathfrak{M}\alpha$. Es ist also die Arbeit eines Kräftepaares gleich seinem Momente mal dem Drehungswinkel. Die Zapfenreibung erfordert hiernach einen sekundlichen Arbeitsaufwand $= \mathfrak{M}\omega \cdot = Dfr\omega$.

Fig. 277.



Als Arbeitseinheit dient das Meterkilogramm. Bei regelmässig umlaufenden Maschinen pflegt man aber die in jeder Sekunde geleistete Arbeit in $^{\text{mkg}}$ als Leistung, Arbeitsstärke oder Effekt $= E$ zu bezeichnen. Die Einheit der Leistung ist das Sekunden-Meterkilogramm $= 1 \frac{\text{mkg}}{\text{s.}}$. Als grössere Einheit hat man die Pferdestärke $(PS) = 75 \frac{\text{mkg}}{\text{s.}}$ eingeführt.

Ein lebendes Pferd leistet freilich eine sekundliche Arbeit von 75 $^{\text{mkg}}$ nur unter günstigen Umständen. Als aber James Watt i. J. 1782 Dampfmaschinen für Londoner Brauereien zu bauen hatte, kam es darauf an, diejenige Arbeit, die bisher von Pferden am Göpel verrichtet wurde, durch die Maschinen leisten zu lassen. Watt mafs daher die von den Pferden geleistete Arbeit, und eine Dampfmaschine, welche die Leistung von 10 Pferden ersetzte, wurde eine 10pferdige Maschine genannt. Die dort benutzten Pferde waren sehr kräftig; auch wird Watt der Sicherheit wegen, damit seine Dampfmaschine keinen Misserfolg erlitte, die Arbeit der Pferde eher zu hoch als zu niedrig geschätzt haben. Auf diese Weise hat sich als Maschinen-Pferdestärke die

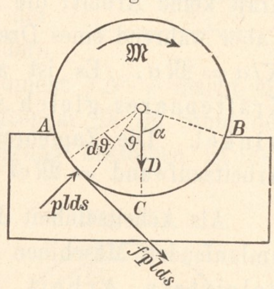
Leistung von $75 \frac{\text{mkg}}{\text{s.}}$ eingebürgert. Es wird dafür auch nicht selten Pferdekraft gesagt; doch ist diese Bezeichnung wenig passend, da man mit dem Ausdrucke doch nicht eine Kraft, sondern eine sekundliche Arbeit bezeichnen will.

Für die Anzahl der Pferdestärken wird das Zeichen N benutzt, während n die Zahl der Umdrehungen in einer Minute bedeutet.

Beispiel: Ein Wasserrad wiegt einschl. des darin befindlichen Wassers $10\,000^{\text{kg}}$; seine Achse werde durch 2 Zapfen von $r = 0{,}1^{\text{m}}$ Halbmesser getragen und mache 10 Umdrehungen in der Minute. Nimmt man $f = 0{,}1$ an, so ist, da die Summe der Zapfendrücke an beiden Tragzapfen $10\,000^{\text{kg}}$ beträgt, das gesammte Reibungsmoment $\mathfrak{M} = 10\,000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 100^{\text{mkg}}$. Bei $n = 10$ ist der Drehungswinkel in der Minute $20\,\pi$, in der Sekunde also $20\,\pi : 60 = {}^1/_3\,\pi = 1{,}047$, daher die sekundl. Reibungsarbeit $E = 104{,}7 \frac{\text{mkg}}{\text{s.}}$ und der Reibungsverlust in Pferdestärken $N = 104{,}7 : 75 = 1{,}396\ PS.$

Bei einem neuen Tragzapfen findet die Berührung längs einer grösseren, dem Mittelpunktswinkel $2\,\alpha$ entsprechenden Fläche ACB statt (Fig. 278). Ist l die Länge des Zapfens und p der Druck für die Flächeneinheit an irgend einer Stelle, so kommt auf ein Theilchen $l\,ds$ der Cylinderfläche der Druck $p\,l\,ds$ und die Reibung $f\,p\,l\,ds$. Das treibende Moment muss dann betragen

Fig. 278.



$$\mathfrak{M} = f\,l\,r \int p\,ds\,.$$

Macht man die Voraussetzung, dass der Zapfen überall gleich stark anliegt, so wird

$$\mathfrak{M} = f\,p\,l\,r \int ds = 2\,f\,p\,l\,r^2 \alpha\,.$$

Nun muss aber $$D = p\,l \int \cos\vartheta\,ds$$
sein, oder, weil $ds \cos\vartheta = dx$

$$D = p\,l \int dx\,.$$

Darin ist $\int dx$ die Sehne $AB = 2\,r\,\sin\alpha$, mithin

$$D = 2\,p\,l\,r \sin\alpha\,.$$

Dann wird $\dfrac{\mathfrak{M}}{D} = f\,r \dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$ oder

$$\mathfrak{M} = f\,D\,r \frac{\alpha}{\sin\alpha} = f\,D\,r \frac{\widehat{AB}}{\overline{AB}}\,. \tag{2}$$

Hiernach ist beim neuen Zapfen, weil wegen des theilweise keilförmigen Einpressens die Summe der Normaldrücke grösser ist als D, auch die Reibung grösser als beim eingelaufenen Zapfen, u. zw. im Verhältnisse des Bogens zur Sehne.

$$\alpha = 0 \text{ giebt wieder } \mathfrak{M} = Dfr;$$

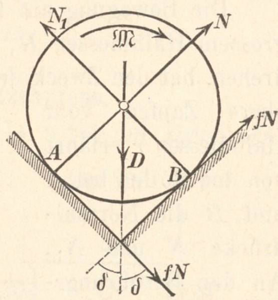
$$\alpha = {}^1/_2\,\pi \text{ aber } \mathfrak{M} = Dfr\,{}^1/_2\,\pi = 1{,}57\,Dfr.$$

Die Reibungswiderstände geben nach senkrechter oder wagerechter Richtung zerlegt, Seitenkräfte, die in senkrechter Richtung die Summe Null liefern, in wagerechter Richtung aber nicht. Daher besteht bei vorstehender Ableitung ein ähnlicher kleiner Verstoss gegen die Gleichung der wagerechten Kräfte wie bei Benutzung der Fig. 275 zur schnellen Entwickelung der Gl. 1.

Eine diesen Umstand berücksichtigende schärfere aber umständlichere Behandlung ergiebt wiederum, dass für f eigentlich $\sin\varphi$ gesetzt werden müsste.

Beim Zapfen im Keillager (Fig. 279) werden die beiden Reibungswiderstände fN und fN_1 wiederum die Zapfen einseitig nach rechts hinüber drücken, in Folge dessen N_1 etwas $> N$ sein muss. Nimmt man aber trotzdem annäherungsweise $N_1 = N$ an, so ergiebt sich in lothrechter Richtung

Fig. 279.



$$2\,N \sin\delta = D, \quad \text{also} \quad 2\,N = \frac{D}{\sin\delta},$$

$$3) \qquad \text{und} \quad \mathfrak{M} = 2\,f\,N\,r = \frac{Dfr}{\sin\delta}.$$

Der Ersatz des eingelaufenen cylindrischen Lagers durch das Keillager bewirkt daher, dass wegen des keilförmigen Einpressens $\mathfrak{M}$ grösser wird als beim cylindrischen Lager, dass man aber, wie bei der Bewegung in Keilnuthen (S. 197), statt f einfach den grösseren Werth $f:\sin\delta$ zu setzen hat. $\delta = 30^0$ giebt $f:\sin\delta = 2\,f$, entsprechend einer Verdoppelung des Reibungsmoments.

Mit Rücksicht auf den Unterschied zwischen N und N_1 muss stattfinden

1. in wagerechter Richtung

$$0 = N\cos\delta + fN\sin\delta - N_1\cos\delta + fN_1\sin\delta;$$

2. in senkrechtem Sinne

$$D = N\sin\delta - fN\cos\delta + N_1\sin\delta + fN_1\cos\delta;$$

3. $\mathfrak{M} = f\,(N + N_1)\,r$.

Die ersten beiden Gleichungen lassen sich ordnen:

$$0 = -(N_1 - N)\cos\delta + (N + N_1) f \sin\delta$$
$$D = (N_1 - N) f \cos\delta + (N + N_1)\sin\delta.$$

Multiplicirt man die erstere dieser Gleichungen mit f, so entsteht durch Zusammenzählen

$$D = (N + N_1)(1 + f^2)\sin\delta \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{M} = \frac{D f r}{\sin\delta\,(1 + f^2)}.$$

Darin ist $\frac{f}{1+f^2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sec^2\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos^2\varphi = \sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$

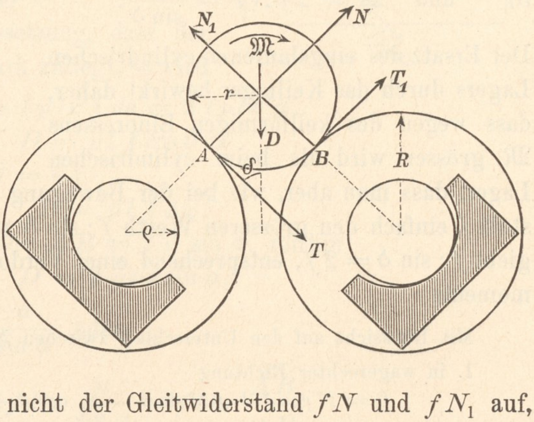
$$\text{also} \quad \mathfrak{M} = D r \frac{\sin 2\varphi}{2\sin\delta}.$$

Bei $f = 0{,}1$ kann aber f^2 gegen 1 vernachlässigt oder $\sin 2\varphi = 2\operatorname{tg}\varphi$ gesetzt werden, so dass dann wieder als Annäherung Gleichung 3 entsteht.

Dem Nachtheile der Vergrösserung der Reibung durch Benutzung des Keillagers steht der Vortheil gegenüber, dass der Zapfen im Keillager auch nach erfolgter Abnutzung immer noch eine sichere Führung findet, während er im eingelaufenen cylindrischen Lager um das Maſs des Spielraumes hin und her schleudern kann. Das Keillager wird deshalb besonders bei Mess-Instrumenten angewandt, bei denen es mehr auf sichere Lage als auf Kleinheit der Reibung ankommt.

Die Bewegung auf Reibungsrollen (Fig. 280) von möglichst grossem Halbmesser R, welche sich um Zapfen vom Halbmesser ϱ drehen, hat den Zweck der Verminderuug des Reibungsmoments. Der obere Zapfen vom Halbmesser r erfährt von den Rollen bei A und B die Normaldrücke N und N_1. An den Berührungsstellen A und B findet aber kein Gleiten statt, vielmehr haben die Rollen dort dieselbe Umfangsgeschwindigkeit wie die Zapfen; daher tritt an diesen Stellen nicht der Gleitwiderstand fN und fN_1 auf, sondern Reibungswiderstände T und T_1, die im Allgemeinen kleiner sind. Es wird

Fig. 280.



$$\mathfrak{M} = (T + T_1)\,r.$$

Die Kräfte T und T_1 wirken auf die Rollen im entgegengesetzten Sinne wie auf den Zapfen und bewirken die gleichmässige Drehung der Rollen, haben also deren Zapfenreibung zu überwinden.

Die thatsächliche Ungleichheit von N und N_1 würde in derselben Weise sich geltend machen wie im vorigen Falle; sie hat auf das wirkliche Ergebnis keinen nennenswerthen Einfluss, soll daher der Einfachheit wegen vernachlässigt werden.

Die Drücke $N = N_1$ bilden (ebenfalls umgekehrt) die Zapfendrücke in den Lagern der Rollen, erzeugen dort die Reibungsmomente $Nf\varrho$ und müssen durch die Momente der Umfangskräfte $T = T_1$ überwunden werden. Daher wird $TR = Nf\varrho$, $T = Nf\frac{\varrho}{R}$ und $\mathfrak{M} = 2\,Nf\frac{\varrho}{R}r$. Am Zapfen liefert aber die Gleichung der lothrechten Kräfte wieder $D = 2\,N \sin\delta$, wenn δ der Winkel ist, den die Tangenten in A und B mit der lothrechten Mittellinie bilden; hiernach wird

$$\mathfrak{M} = \frac{Dfr}{\sin\delta}\frac{\varrho}{R}. \tag{4}$$

Damit dies kleiner werde als Dfr, muss $\varrho : R < \sin\delta$ sein. $\sin\delta = 1/2$ und $\varrho : R = 1/6$ geben $\mathfrak{M} = \frac{1}{3}Dfr$.

b) Reibungsmoment eines Stützzapfens.

Beim Stütz- oder Spurzapfen (Fig. 281) wirkt der Druck D in der Achsenrichtung desselben. Die Berührung mit der Spurplatte des Lagers erfolge (der Allgemeinheit wegen) in einer Ringfläche der Halbmesser r und R. Zeichnet man im Grundriss einen schmalen Ring vom Halbmesser ϱ und der Breite $d\varrho$, so kommt auf ein Theilchen dF desselben ein Druck $p\,dF$, wenn p der Druck für die Flächeneinheit. Dieser Druck liefert eine Reibung $fp\,dF$ und ein Reibungsmoment $d\mathfrak{M} = fp\,dF\varrho$. Da man annehmen darf, dass im ganzen Umkreise dieses Ringes p denselben Werth haben wird, so kann

Fig. 281.